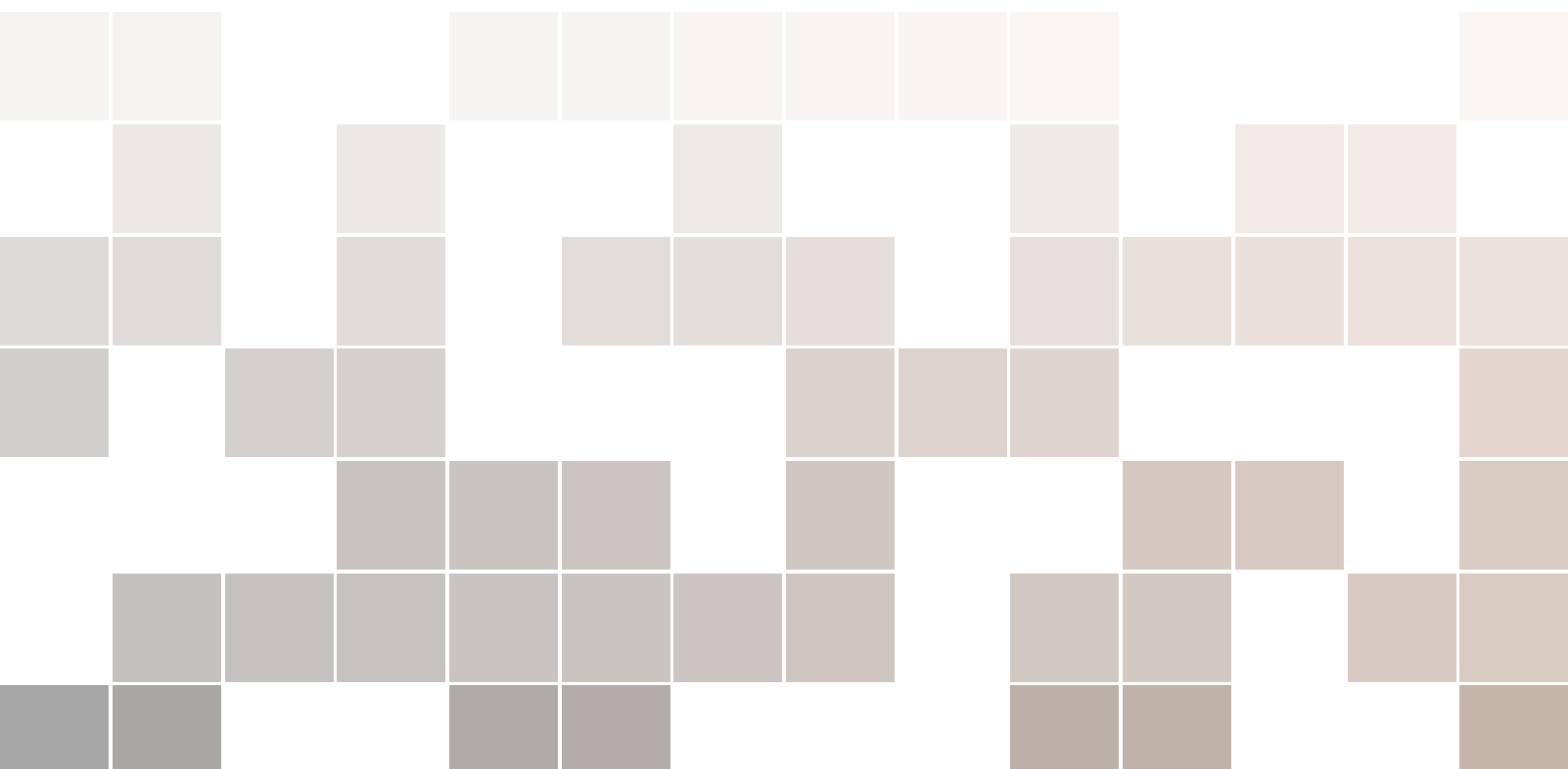


Fisika Komputasi

Phenomena based Learning

Joko Saefan



Copyright © 2016 Joko Saefan

PUBLISHED BY PENDIDIKAN FISIKA UNIVERSITAS PGRI SEMARANG

JOKOSAEFAN@YAHOO.COM

Licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License (the “License”). You may not use this file except in compliance with the License. You may obtain a copy of the License at <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>. Unless required by applicable law or agreed to in writing, software distributed under the License is distributed on an “AS IS” BASIS, WITHOUT WARRANTIES OR CONDITIONS OF ANY KIND, either express or implied. See the License for the specific language governing permissions and limitations under the License.

First printing, March 2015

Daftar Isi

1	Beberapa Contoh Plotting	5
1.1	Rencana Perkuliahan	5
1.1.1	Preview Pemrograman Komputer	5
1.1.2	Beberapa Contoh Plotting	5
1.1.3	Metode numerik	5
1.2	Beberapa Contoh Plotting	6
1.2.1	Peluruhan radioaktif	6
1.2.2	Gerak parabola	7
1.2.3	Medan listrik di sekitar muatan bola	8
1.2.4	Superposisi getaran	9
1.3	Latihan Analisis	10
2	Analitik vs Numerik	13
2.1	Pendahuluan	13
2.2	Peluruhan	13
2.2.1	Analitik	13
2.2.2	Numerik	14
2.2.3	Source code peluruhan secara analitik dan numerik	14
2.3	Gerak 1 Dimensi	14
2.3.1	Analitik	15
2.3.2	Numerik	15
2.3.3	Source code gerak 1D	15
3	Gerak Periodik	17
3.1	Pendahuluan	17

3.2	Gerak Pegas	17
3.2.1	Persamaan Gerak	17
3.2.2	<i>Source code</i> gerak pegas	18
3.3	Gerak Pegas Teredam	18
3.3.1	Persamaan gerak	18
3.3.2	<i>Source code</i> Gerak pegas	19
4	Chaos	21
4.1	Pendahuluan	21
4.2	Ayunan	21
4.2.1	Persamaan Gerak	21
4.2.2	Metode Runge-Kutta	21
4.2.3	<i>Source code</i> ayunan	23
4.3	Ayunan Teredam	24
4.3.1	Persamaan gerak	24
4.3.2	<i>Source code</i> Gerak ayunan teredam	25
5	Double Pendulum Motion with Constraint	27
5.1	INTRODUCTION	27
5.2	DOUBLE PENDULUM	28
5.2.1	The System	28
5.2.2	Equation of Motion	28
5.2.3	Numerical Approach	29
5.3	RESULT AND DISCUSSION	29
5.4	CONCLUSION	30
6	Gerak Muatan dalam Medan Listrik dan Magnet	33
6.1	Pendahuluan	33
6.2	Penguraian Rumusan	33
6.2.1	Gaya Lorentz	33
6.2.2	Penerapan Hukum II Newton	34
6.3	Pembuatan Program	34
6.3.1	Nilai awal	34
6.3.2	Metode Numerik	35
6.4	Hasil dan Pembahasan	35
6.4.1	<i>Source code</i> ayunan	35
6.4.2	Pembahasan	35
6.5	Diskusi	36
6.6	Tugas	36

1. Beberapa Contoh Plotting

If the facts don't fit the theory, change the facts.

—Albert Einstein

1.1 Rencana Perkuliahan

Proses pembelajaran dalam perkuliahan ini akan dilakukan menggunakan pendekatan fenomena. Pada dasarnya, perkuliahan Fisika Komputasi akan menjelaskan beberapa metode numerik untuk membantu menginterpretasikan kasus-kasus fisika yang sering dijumpai. Bahkan, beberapa kasus yang cenderung rumit akan lebih mudah digambarkan melalui perkuliahan ini. Pendekatan fenomena dipilih agar konsep-konsep metode numerik yang dipelajari lebih terlihat aplikatif sehingga mahasiswa dapat menggunakan pemahamannya ketika mempelajari kasus-kasus Fisika yang dijumpai pada pembelajaran fisika yang lain.

1.1.1 Preview Pemrograman Komputer

Untuk menempuh perkuliahan ini, mahasiswa harus pernah menempuh mata kuliah Pemrograman Komputer. Beberapa hal yang telah dipelajari dalam pemrograman komputer yaitu: pengenalan komputer, pengenalan pemrograman (Matlab), kontrol program (if then, for to do) dan penerapannya. Kompetensi-kompetensi tersebut harus pernah dilalui agar dapat menempuh perkuliahan Fisika Komputasi.

1.1.2 Beberapa Contoh Plotting

Dalam berbagai kasus, Fisikawan akan menginterpretasi fenomena yang ditemui sesuai dengan keunikan fenomena tersebut. Salah satu contoh interpretasi yang mudah adalah grafik. Grafik tersebut dapat dibuat dalam berbagai cara untuk memberikan informasi yang dibutuhkan.

1.1.3 Metode numerik

Fokus utama dalam mata kuliah ini adalah metode numerik, yaitu penerapan beberapa metode numerik dalam berbagai masalah fisika yang cocok dengan metode tersebut. Pertama, mahasiswa

akan dikenalkan tentang turunan dan integrasi numerik. Kedua, metode Euler dan Feynmann-Newton akan diperkenalkan untuk menjawab beberapa permasalahan Mekanika. Ketiga, metode akan diperbaiki menggunakan metode Runge-Kutta orde ke-4 terkait dengan gerak periodik. Kasus yang diangkat dalam beberapa metode tersebut masuk ke dalam kategori permasalahan 1D dan 2D. Kemudian, mahasiswa akan diperkenalkan masalah 3D untuk menjawab persamaan diferensial parsial dalam permasalahan parabolik, eliptik, dan hiperbolik.

1.2 Beberapa Contoh Plotting

1.2.1 Peluruhan radioaktif

Jumlah mula-mula zat radioaktif N_0 dapat meluruh menjadi sejumlah N sebagai fungsi waktu t menurut

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad (1.1)$$

dengan λ merupakan konstanta peluruhan. Berdasarkan persamaan (1.1) jelas bahwa jumlah zat N merupakan fungsi eksponensial dari waktu t .

Plot x versus $y(x)$

Andaikan suatu fungsi $y(x)$ (dibaca: y sebagai fungsi x atau y bergantung pada x) akan dibuatkan grafik untuk memudahkan pemahaman terkait fungsi tersebut yang sedang ditinjau. Langkah yang dilakukan adalah membuat sejumlah n grid sepanjang sumbu x mendatar dengan beda tertentu, misalnya $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$. grid ini dapat disebut sebagai *domain*. Kemudian, fungsi $y(x)$ dioperasikan ke grid yang dibuat tersebut sehingga diperoleh $(y(x_1), y(x_2), y(x_3), \dots, y(x_n))$ pada sepanjang sumbu y . Hasil ini dapat disebut sebagai *range*. Berikutnya, *domain* tersebut dipetakan ke *range* sehingga diperoleh titik-titik koordinat $((x_1, y(x_1)), (x_2, y(x_2)), \dots, (x_n, y(x_n)))$. Suatu kurva akan diperoleh dengan membuat garis yang melewati titik-titik yang telah diperoleh tersebut. Agar lebih jelas, perhatikanlah contoh peluruhan dibawah ini beserta listing pembuatan programnya.

Grafik peluruhan persamaan (1.1) dapat dibuat langkah-langkah berikut. Pertama, grid dibuat pada sepanjang sumbu t dengan beda h tertentu sebagai *domain*. Kedua, N dihitung untuk setiap grid t yang dibuat sebagai *range*. Ketiga, domain t yang dibuat dipetakan ke *range* sehingga diperoleh titik-titik koordinat. Listing 1 merupakan contoh program untuk membuat grafik tersebut.

Source code peluruhan

```
%peluruhan.m
clear;

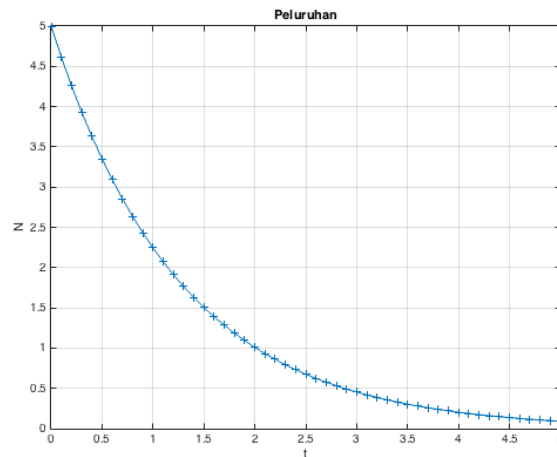
%nilai awal (initial values)
5 N_0=5;
  lambda=0.8;
  t=0:0.1:5;

%proses perhitungan
10 N=N_0*exp(-lambda*t);

%output
plot(t,N,'+-'); grid on;
title('Peluruhan'); xlabel('t'); ylabel('N');
```

Listing 1.1: Peluruhan sebagai fungsi waktu.

Hasil yang muncul dari Listing. 1 ditunjukkan pada gambar 1.1.



Gambar 1.1: Peluruhan N sebagai fungsi waktu t .

1.2.2 Gerak parabola

Gerak parabola merupakan gabungan dua buah gerak yang saling tegak lurus, masing-masing gerak vertikal y yang berupa GLBB dan gerak horisontal x yang berupa GLB. Gerak tersebut bergantung waktu t yang dirumuskan menurut

$$y = y_0 + v_0 \sin \theta t + \frac{1}{2} g t^2 \quad (1.2)$$

$$x = x_0 + v_0 \cos \theta t, \quad (1.3)$$

dengan (x_0, y_0) adalah titik awal gerak, θ merupakan sudut elevasi, dan g adalah percepatan gravitasi.

Plot $x(t)$ versus $y(t)$

Plot ini sedikit berbeda dari plot yang telah dijelaskan sebelumnya. Perbedaannya terletak pada *domain*. Pada bagian sebelumnya *domain* merupakan variabel bebas. Tetapi, pada bagian ini *domain* merupakan variabel terikat yang bergantung pada variabel lain.

Pada plot parabola *domain* x bergantung pada t . *Range*-nya adalah y yang juga bergantung pada t .

Source code parabola

```
%parabola.m
clear;

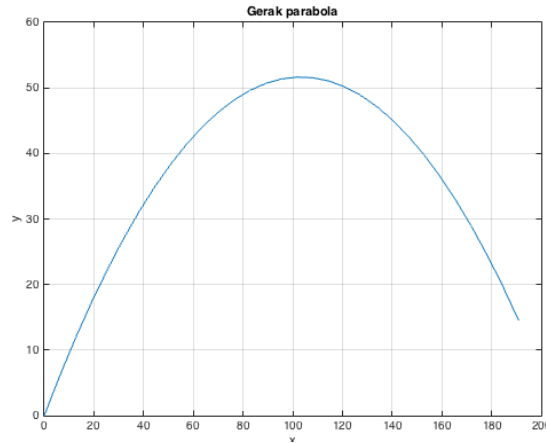
%nilai awal
5 t=0:0.2:6;
  v_0=45;
  g=9.8;
  theta=45/180*pi; %sudut dibuat dalam radian

10
%proses
y=v_0*sin(theta)*t-0.5*g*t.^2;
x=v_0*cos(theta)*t;

15 plot(x,y); grid on;
   title('Gerak parabola'); xlabel('x'); ylabel('y');
```

Listing 1.2: Gerak parabola.

Hasil Listing 2 ditunjukkan pada gambar 1.2.



Gambar 1.2: Gerak parabola.

1.2.3 Medan listrik di sekitar muatan bola

Medan listrik E di sekitar muatan bola Q berjari-jari R dirumuskan menurut

$$E = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} r, & r \leq R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, & r \geq R, \end{cases} \quad (1.4)$$

dengan ϵ_0 adalah permitivitas ruang hampa dan R adalah jari-jari bola.

Plot lebih dari satu fungsi

Plot yang dibuat untuk kasus medan listrik ini sebenarnya sama dengan plot x versus $y(x)$ yang telah diuraikan sebelumnya. Akan tetapi, pada kasus ini fungsi yang akan diplot lebih dari satu. Oleh karena itu, perlu sedikit modifikasi pada *source code* program agar fungsi-fungsi tersebut dapat digabung.

Source code medan listrik

```
%medan_listrik.m
clear;

%nilai awal
5 r=0;
  R_0=2;
  h=0.2;
  ep_0=8.854e-12;
  Q=2e2;
10 E=0;

%proses
for i=1:50
    x(i)=r;
    y(i)=E;
15     if r < 2
```

```

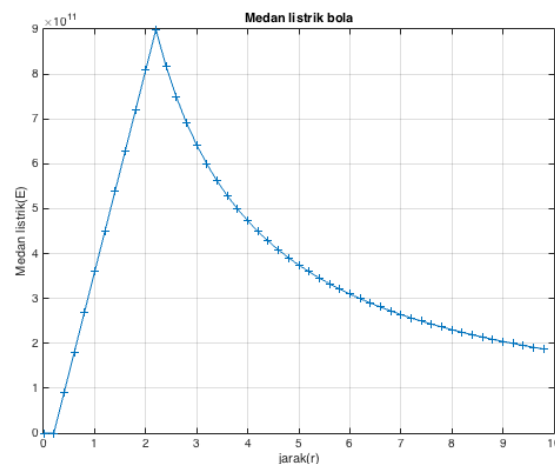
    E=1/(4*pi*ep_0)*Q/R_0^2*r;
    else
    E=1/(4*pi*ep_0)*Q/r;
20  end
    r=r+h;
end

%output
25 plot(x,y,'+-'); grid on;
    title('Medan listrik bola'); xlabel('jarak(r)'); ylabel('Medan listrik
    (E)');

```

Listing 1.3: Medan listrik sebagai fungsi jarak.

Hasil Listing 3 ditunjukkan pada gambar 1.4.

Gambar 1.3: Medan listrik E di sekitar muatan bola sebagai fungsi jarak r .

1.2.4 Superposisi getaran

Simpangan y suatu getaran dapat dirumuskan menurut

$$y = A \sin \omega t, \quad (1.5)$$

dengan A adalah amplitudo getaran, $\omega = 2\pi f$ dan f adalah frekuensi getaran. Simpangan dua buah getaran masing-masing dengan amplitudo A_1 dan A_2 , frekuensi f_1 dan f_2 dapat dirumuskan menurut

$$y_1 = A_1 \sin \omega_1 t, \quad (1.6)$$

$$y_2 = A_2 \sin \omega_2 t, \quad (1.7)$$

dengan $\omega_1 = 2\pi f_1$ dan $\omega_2 = 2\pi f_2$.

Plot superposisi

Variasi Plot yang dapat dibuat pada kasus superposisi adalah ketiga jenis plot yang telah dijelaskan semuanya. Untuk itu, akan dicontohkan semua jenis plot tersebut yang dibuat pada satu program.

Source code superposisi

```

%superposisi
clear;

%nilai awal
5 t=0:0.02:0.5*pi;
  A1=2;
  A2=1;
  f1=1;
  f2=2;

10 y1=A1*sin(2*pi*f1*t);
   y2=A2*sin(2*pi*f2*t);

   subplot(2,2,1);
15 plot(t,y1); grid on;
   title('Getaran pertama'); ylabel('y_1'); xlabel('t');

   subplot(2,2,2);
   plot(t,y2); grid on;
20 title('Getaran kedua'); ylabel('y_2'); xlabel('t');

   subplot(2,2,3);
   plot(t,y2); grid on;
   title('Superposisi'); ylabel('y_1+y_2'); xlabel('t');
25 subplot(2,2,4);
   plot(y1,y2); grid on;
   title('Lisajous'); ylabel('y_2'); xlabel('y_1');

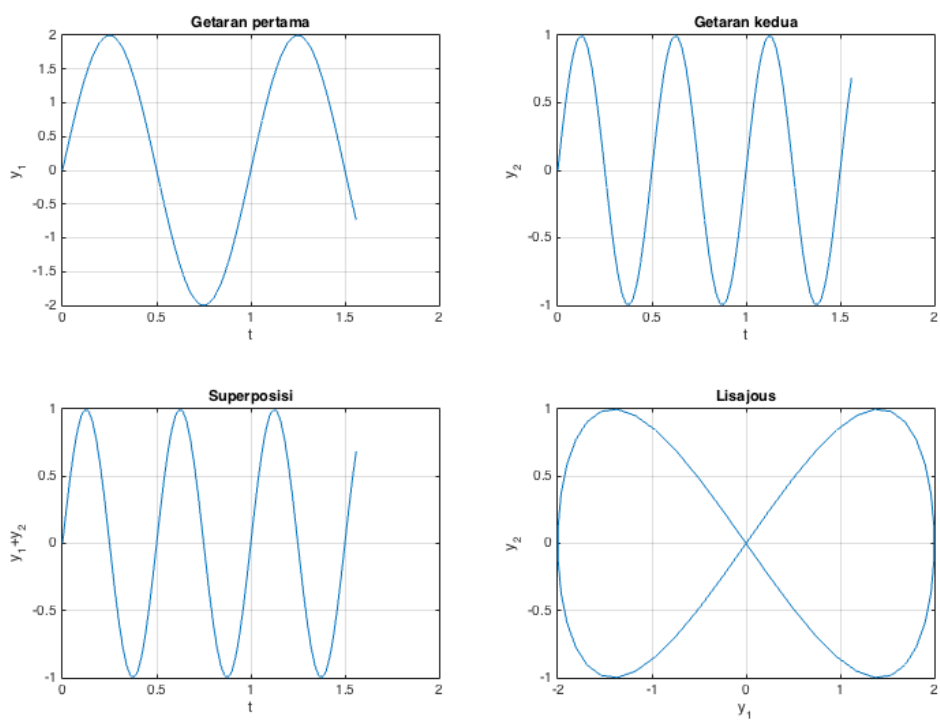
```

Listing 1.4: Superposisi dua getaran.

Hasil Listing 3 ditunjukkan pada gambar 1.4.

1.3 Latihan Analisis

1. Apa kesamaan dan perbedaan penggambaran empat kasus yang dicontohkan di atas? Uraikan!
2. Carilah kasus dengan penggambaran yang sepadan dengan setiap kasus yang dicontohkan tersebut!!
3. Carilah kasus dengan penggambaran selain keempat contoh yang disebutkan?



Gambar 1.4: Superposisi getaran

2. Analitik vs Numerik

2.1 Pendahuluan

Secara umum masalah yang akan diuraikan pada bagian ini berupa persamaan diferensial. Masalah tersebut dapat disebut dengan *masalah nilai awal*. Andaikan suatu persamaan diferensial berupa dy/dx . Persamaan tersebut dapat dijawab secara khusus jika nilai y diketahui untuk x tertentu. Pemberian nilai awal ini yang menjadikan kasus-kasus semacam itu disebut dengan masalah nilai awal.

Permasalahan yang akan dicontohkan baik secara analitik maupun numerik adalah kasus peluruhan, dan gerak dalam 1 dimensi.

2.2 Peluruhan

Visualisasi grafik peluruhan telah ditinjau pada bagian terdahulu. Pada bagian ini, peluruhan akan ditinjau kembali yang akan disajikan menurut jawaban analitik dan numerik.

2.2.1 Analitik

Peluruhan suatu zat radioaktif N sebagai fungsi waktu t memiliki laju yang sebanding dengan jumlah zat pada saat itu yang dirumuskan menurut

$$N' = \frac{dN}{dt} = -\lambda N \quad (2.1)$$

dengan λ merupakan konstanta pembanding. Dengan memberikan nilai awal $N = N_0$ pada $t = 0$, jawaban analitik permasalahan tersebut adalah

$$N = N_0 e^{-\lambda t}. \quad (2.2)$$

2.2.2 Numerik

Apabila $f' = df(x)/dx$, menurut pendekatan geometri dapat diuraikan menurut

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad (2.3)$$

$$y' \simeq \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad (2.4)$$

$$f(x+h) = f(x) + hy'. \quad (2.5)$$

dengan h adalah grid pada x yang dipilih.

Dalam kasus peluruhan ini, jawaban dapat dituliskan menurut

$$N(t+h) = N(t) + hN'. \quad (2.6)$$

2.2.3 Source code peluruhan secara analitik dan numerik

```
%peluruhan2.m
clear;

%ANALITIK
5 Na_0=5;
  lambda=0.8;
  ta=0:0.1:5;
  Na=Na_0*exp(-lambda*ta);

10 %NUMERIK
  tn=0;
  h=0.1;
  tmak=5;
  N=tmak/h;
15 Nn=Na_0;
  dn=-lambda*Nn;
  xp(1)=tn;
  yp(1)=Nn;
  for i=2:N
20     Nn=Nn+h*dn;
     dn=-lambda*Nn;
     tn=tn+h;
     xp(i)=tn;
     yp(i)=Nn;
25 end;

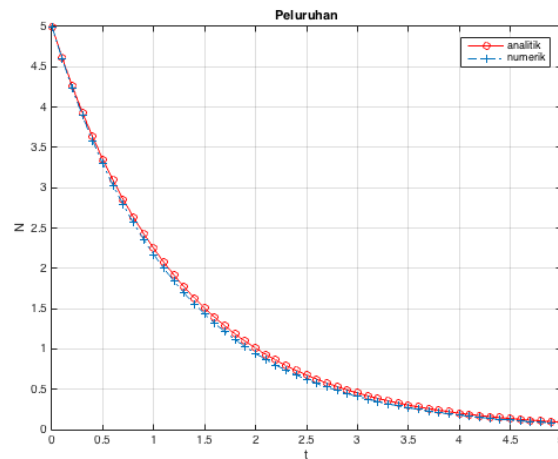
%PLOT
plot(ta,Na,'-ro',xp,yp,'-.+'); grid on;
title('Peluruhan'); xlabel('t'); ylabel('N');
30 legend('analitik','numerik');
```

Listing 2.1: Peluruhan sebagai fungsi waktu secara analitik dan numerik.

Hasil yang muncul dari Listing. 1 ditunjukkan pada gambar 2.1.

2.3 Gerak 1 Dimensi

Gerak 1 dimensi yang akan ditinjau di sini berupa gerak lurus berubah beraturan atau gerak dengan percepatan konstan. Persamaan diferensial pada kasus ini berupa persamaan diferensial orde kedua.



Gambar 2.1: Peluruhan N sebagai fungsi waktu t secara analitik dan numerik.

2.3.1 Analitik

Andaikan suatu benda bekerja di sepanjang garis lurus x pada waktu t dengan dengan percepatan konstan

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = c, \quad (2.7)$$

dengan c suatu konstanta.

Apabila diberikan nilai awal pada $t = 0, v = v_0$ dan $x = 0$, dengan $v = dx/dt$, jawaban analitik dari permasalahan tersebut adalah

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (2.8)$$

$$v = v_0 + a t. \quad (2.9)$$

2.3.2 Numerik

Jawaban numerik untuk gerak 1 dimensi ini dapat diperoleh dengan cara yang sama dengan kasus peluruhan. Hanya saja pendekatan tersebut dilakukan dua kali, masing-masing untuk x dan v .

Jawaban tersebut masing-masing

$$x(t+h) = x(t) + hv(t), \quad (2.10)$$

$$v(t+h) = v(t) + ha. \quad (2.11)$$

2.3.3 Source code gerak 1D

```
%gerak 1D
clear;

%ANALITIK
5 ta=0:0.1:5;
  v0=2;
  a=2;

  xa=v0*ta+0.5*a*ta.^2;
10 va=v0+a*ta;

%NUMERIK
```

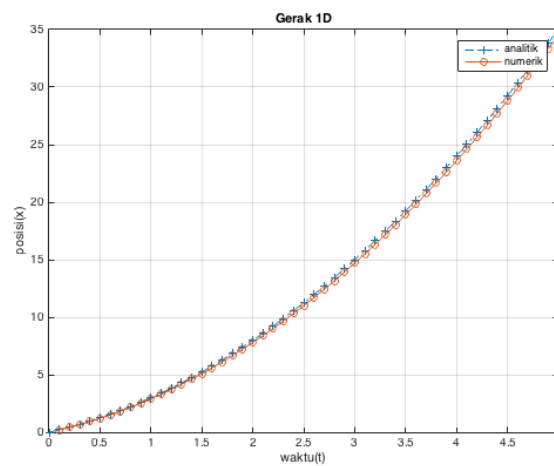
```

tn=0;
tmax=5;
15 h=0.1;
N=tmax/h;
xn=0;
vn=v0;
an=a;
20 xp(1)=tn;
yp(1)=xn;
for i=1:N
    xn=xn+h*vn;
    vn=vn+h*an;
25 tn=tn+h;
xp(i)=tn;
yp(i)=xn;
end
plot(ta,xa,'-.+',xp,yp,'-o'); grid on;
30 title('Gerak 1D'); xlabel('waktu(t)'); ylabel('posisi(x)');
legend('analitik','numerik');

```

Listing 2.2: Gerak 1 dimensi.

Hasil yang muncul dari Listing. 1 ditunjukkan pada gambar 2.2.

Gambar 2.2: Posisi x sebagai fungsi waktu t pada gerak 1 dimensi.

3. Gerak Periodik

3.1 Pendahuluan

Gerak periodik yang akan diuraikan adalah dinamika gerak pegas. Pada bagian ini, jawaban analitik tidak ditampilkan lagi. Begitu pula dengan kasus-kasus selanjutnya yang akan ditinjau. Jawaban akan difokuskan pada metode numerik saja. Akan tetapi, penguraian kasus untuk mendapatkan persamaan diferensial tetap diuraikan sebagai ciri khas dalam mempelajari fenomena fisika.

3.2 Gerak Pegas

3.2.1 Persamaan Gerak

Andaikan suatu pegas pada bidang datar salah satu ujung dihubungkan pada statip tetap, sementara ujung lainnya dihubungkan dengan benda bermassa m . Apabila pegas direntangkan sejauh x , kemudian dilepaskan sehingga terjadi gerak periodik. Menurut Hukum Hooke, gaya F yang bekerja pada pegas adalah

$$F = -kx, \quad (3.1)$$

dengan k merupakan konstanta pegas. Jika Hukum II Newton diterapkan pada kasus ini, akan diperoleh

$$F = -kx \quad (3.2)$$

$$ma = -kx \quad (3.3)$$

$$a = -\frac{k}{m}x \quad (3.4)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x. \quad (3.5)$$

Persamaan diferensial orde ke-2 diperoleh dari penguraian kasus tersebut. Apabila $dx/dt = v$, jawaban numerik metode Euler dapat dituliskan menurut

$$x_{n+1} = x_n + hv \quad (3.6)$$

$$v_{n+1} = v_n + ha. \quad (3.7)$$

3.2.2 Source code gerak pegas

```

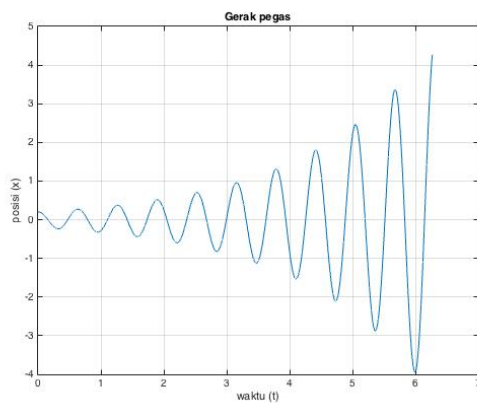
%Gerak pegas
clear;
t=0;
tmak=2*pi;
5 h=0.01;
N=tmak/h;
k=10;
m=0.1;
x=0.2;
10 v=0;
a=-k/m*x;

for i=1:N
    xp(i)=t;
    yp(i)=x;
    x=x+h*v;
    v=v+h*a;
    a=-k/m*x;
    t=t+h;
20 end;
plot(xp,yp); grid on;
title('Gerak pegas'); xlabel('waktu (t)'); ylabel('posisi (x)');

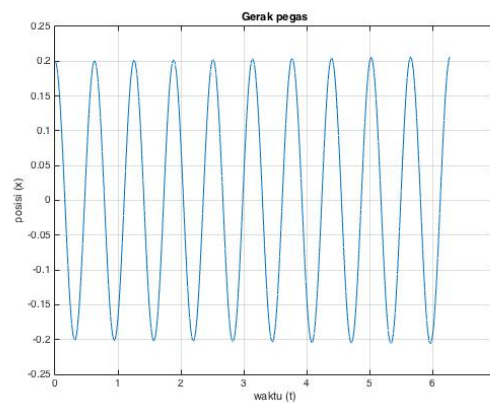
```

Listing 3.1: Gerak pegas.

Hasil yang muncul dari Listing. 1 ditunjukkan pada gambar 3.1a. Apabila h diperkecil mencapai 0.001, hasil yang diperoleh ditunjukkan pada gambar 3.1b.



(a) $h = 0.01$



(b) $h = 0.0001$

Gambar 3.1: Posis x sebagai fungsi waktu t pada gerak pegas.

3.3 Gerak Pegas Teredam

3.3.1 Persamaan gerak

Masih tentang gerak pegas, hanya saja sistem mendapat redaman yang berupa gaya gesek. Andaikan gaya gesek tersebut sebanding dengan kecepatan benda v dengan konstanta pembanding c . Per-

samaan (4.2) dapat diuraikan kembali menurut

$$\sum F = -kx \quad (3.8)$$

$$ma = -kx - cv \quad (3.9)$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (3.10)$$

Apabila dianggap $\omega^2 = k/m$ dan $2b = c/m$, akan diperoleh

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0, \quad (3.11)$$

atau dapat ditulis menurut

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x - 2b \frac{dx}{dt}. \quad (3.12)$$

Secara numerik, masalah ini dapat dijawab menggunakan pendekatan persamaan (3.6) dan (3.7).

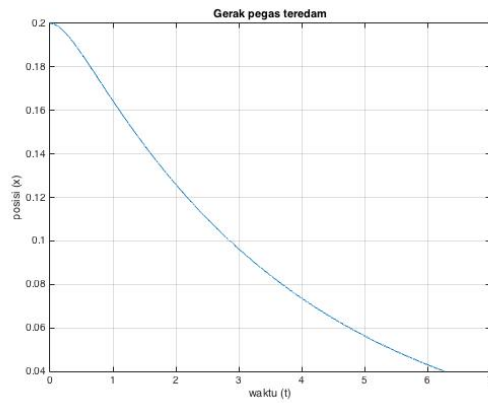
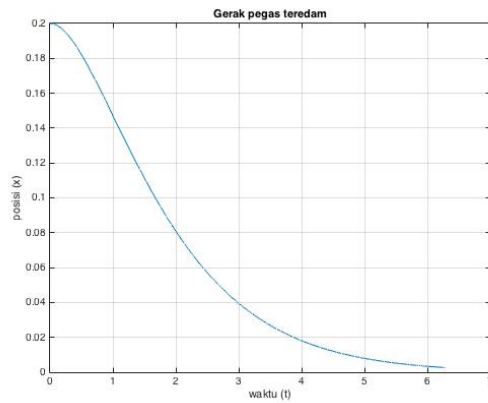
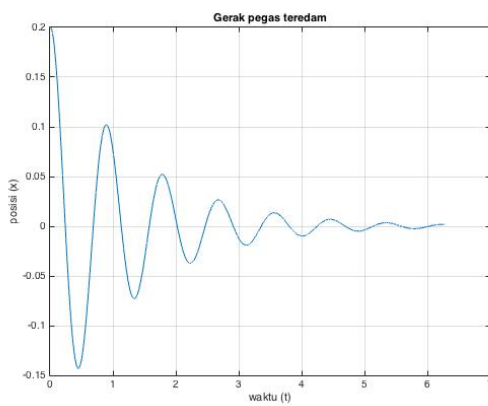
3.3.2 Source code Gerak pegas

```
%Gerak pegas
clear;
t=0;
tmak=2*pi;
5 h=0.01;
N=tmak/h;
k=0.1;
m=0.1;
c=0.4;
10 x=0.2;
v=0;
a=-k/m*x-c/m*v;

for i=1:N
15 xp(i)=t;
yp(i)=x;
x=x+h*v;
v=v+h*a;
a=-k/m*x-c/m*v;
20 t=t+h;
end;
plot(xp,yp);grid on;
title('Gerak pegas teredam'); xlabel('waktu (t)'); ylabel('posisi (x)');
);
```

Listing 3.2: Gerak Pegas.

Hasil yang muncul dari Listing. 1 ditunjukkan pada gambar 3.2a. Dua jawaban lain dapat diperoleh dengan variasi b dan ω . Apabila $b^2 > \omega^2$, gerak biasa disebut sebagai gerak **Teredam Berat**. Apabila $b^2 = \omega^2$, gerak biasa disebut dengan gerak **teredam kritis** dan jika $b^2 < \omega^2$ gerak biasa disebut dengan gerak **teredam harmonik**

(a) Teredam berat ($c = 0.4, k = 0.1$)(b) Teredam kritis ($c = 0.2, k = 0.1$)(c) Teredam harmonik ($c = 0.2, k = 5$)**Gambar 3.2:** Posis x sebagai fungsi waktu t pada gerak pegas teredam.

4. Chaos

4.1 Pendahuluan

Pada bagian ini, penjelasan masih difokuskan pada gerak periodik, hanya saja metode yang digunakan diperbaharui ke metode yang lebih teliti. Metode tersebut adalah metode Runge-Kutta orde ke-4. Metode ini lebih baik dibandingkan metode sebelumnya karena akurasi ditambah pada daerah setengah h yang diambil.

4.2 Ayunan

4.2.1 Persamaan Gerak

Andai suatu benda bermassa m digantungkan pada tali sepanjang l dan disimpangkan sejauh θ . Apabila benda tersebut dilepaskan, persamaan gerak yang mewakili θ pada sembarang waktu t adalah

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta, \quad (4.1)$$

dengan g merupakan percepatan gravitasi.

Seperti pada bab sebelumnya, jawaban menggunakan metode Euler dirumuskan menurut

$$\theta_{n+1} = \theta_n + h\omega, \quad (4.2)$$

$$\omega_{n+1} = \omega_n + h\alpha, \quad (4.3)$$

dengan $\omega = d\theta/dt$.

4.2.2 Metode Runge-Kutta

Metode Runge-Kutta yang akan ditinjau adalah metode Runge-Kutta orde ke-4. Apabila suatu persamaan diferensial $f' = dy/dx$, tentu dapat diperkirakan bahwa jawaban numerik dapat berupa $f(y,x)$ yaitu suatu fungsi yang dapat bergantung pada y atau x . Metode Runge-kutta ini dapat

dikatakan sebagai pengembangan metode Euler dengan menambahkan beberapa suku tambahan pada satu grid yang dibuat. Suku-suku tersebut adalah

$$j_1 = hf'(y, x) \quad (4.4)$$

$$j_2 = hf'(y + \frac{j_1}{2}, x + \frac{h}{2}) \quad (4.5)$$

$$j_3 = hf'(y + \frac{j_2}{2}, x + \frac{h}{2}) \quad (4.6)$$

$$j_4 = hf'(y + j_3, x + h). \quad (4.7)$$

Lalu, jawaban metode ini dirumuskan menurut

$$f_{n+1} = f_n + \frac{1}{6}(j_1 + 2j_2 + 2j_3 + j_4). \quad (4.8)$$

Perhatikanlah, jika persamaan (4.8) diambil sampai suku j_1 dan mengabaikan faktor pembagi akan diperoleh

$$f_{n+1} = f_n + hf', \quad (4.9)$$

yang berupa jawaban metode Euler.

Apabila persamaan diferensial merupakan persamaan diferensial orde 2, metode Runge-kutta ini saling terkait, tidak seperti metode Euler yang dapat dipisah. Andaikan $g' = d^2y/dx^2$ dan $f' = g = dy/dx$, tentu jawaban f berupa fungsi yang dapat bergantung pada y , $g = f'$, atau x . Jawaban numerik akan diberikan menurut

$$f_{n+1} = f_n + \frac{1}{6}(j_1 + 2j_2 + 2j_3 + j_4), \quad (4.10)$$

$$g_{n+1} = g_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (4.11)$$

dengan

$$j_1 = hg(y, g, x) \quad (4.12)$$

$$k_1 = hg'(y, g, x) \quad (4.13)$$

$$j_2 = hg(y + \frac{j_1}{2}, g + \frac{k_1}{2}, x + \frac{h}{2}) \quad (4.14)$$

$$k_2 = hg'(y + \frac{j_1}{2}, g + \frac{k_1}{2}, x + \frac{h}{2}) \quad (4.15)$$

$$j_3 = hg(y + \frac{j_2}{2}, g + \frac{k_2}{2}, x + \frac{h}{2}) \quad (4.16)$$

$$k_3 = hg'(y + \frac{j_2}{2}, g + \frac{k_2}{2}, x + \frac{h}{2}) \quad (4.17)$$

$$j_4 = hg(y + j_3, g + k_3, x + h) \quad (4.18)$$

$$k_4 = hg'(y + j_3, g + k_3, x + h). \quad (4.19)$$

Apabila jawaban ini diterapkan pada gerak ayunan persamaan (4.1), akan diperoleh

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{1}{6}(j_1 + 2j_2 + 2j_3 + j_4) \quad (4.20)$$

$$\omega_{n+1} = \omega_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (4.21)$$

dengan

$$j_1 = h\omega \quad (4.22)$$

$$k_1 = h(-g/l \sin \theta) \quad (4.23)$$

$$j_2 = h\left(\omega + \frac{k_1}{2}\right) \quad (4.24)$$

$$k_2 = h\left(-g/l \sin\left(\theta + \frac{j_1}{2}\right)\right) \quad (4.25)$$

$$(4.26)$$

$$j_3 = h\left(\omega + \frac{k_2}{2}\right) \quad (4.27)$$

$$k_3 = h\left(-g/l \sin\left(\theta + \frac{j_2}{2}\right)\right) \quad (4.28)$$

$$j_4 = h(\omega + k_3) \quad (4.29)$$

$$k_4 = h(-g/l \sin(\theta + j_3)). \quad (4.30)$$

4.2.3 Source code ayunan

```

clear;
t=0;
tmak=4*pi;
h=0.1;
5 N=tmak/h;

tt=30/180*pi;
xe=tt; %posisi awal metode Euler
xr=tt; %posisi awal metode Runge-Kutta orde ke-4
10 v=0;
ve=v; %kecepatan sudut awal metode Euler
vr=v; %kecepatan sudut awal metode Runge-Kutta orde ke-4
g=9.8;
l=2;
15 a=-g/l*sin(tt);
ae=a; %percepatan sudut awal metode Euler
ar=a; %percepatan sudut awal metode Runge-Kutta orde ke-4

%Metode Euler
20 for i=1:N
    %Metode Euler
    xpe(i)=t;
    ype(i)=xe;
    xe=xe+h*ve;
    25 ve=ve+h*ae;
    ae=-g/l*sin(xe);

    %metode Runge-Kutta
    ypr(i)=xr;
    30 j1=h*vr;
    k1=h*(-g/l*sin(xr));
    j2=h*(vr+k1/2);
    k2=h*(-g/l*sin(xr+j1/2));
    j3=h*(vr+k2/2);
    35 k3=h*(-g/l*sin(xr+j2/2));
    j4=h*(vr+k3);
    k4=h*(-g/l*sin(xr+j3));
    xr=xr+1/6*(j1+2*j2+2*j3+j4);

```

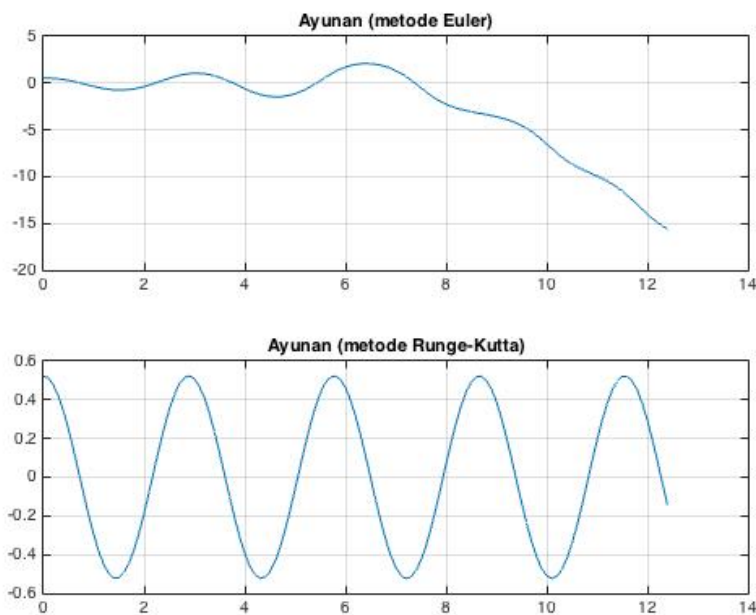
```

40      vr=vr+1/6*(k1+2*k2+2*k3+k4);
      t=t+h;
end;
subplot(2,1,1);
plot(xpe,ype); grid on; title('Ayunan (metode Euler)');
45 subplot(2,1,2);
plot(xpr,ypr); grid on; title('Ayunan (metode Runge-Kutta)');

```

Listing 4.1: Ayunan.

Hasil yang muncul dari Listing. 1 ditunjukkan pada gambar (??). Gambar atas menunjukkan visualisasi hasil menggunakan metode Euler dan gambar bawah menggunakan metode Runge-Kutta orde-4.



Gambar 4.1: Posisi sudut θ sebagai fungsi waktu t pada gerak ayunan dengan metode Euler dan Runge-Kutta.

4.3 Ayunan Teredam

4.3.1 Persamaan gerak

Andaikan sistem ayunan yang telah dijelaskan pada bagian di atas diberi suatu redaman yang bergantung pada v , persamaan gerak dapat dirumuskan kembali menurut

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta - q\omega, \quad (4.31)$$

dengan q merupakan konstanta yang terkait dengan redaman tersebut.

Jawaban metode Runge-kutta persamaan ini dirumuskan menurut

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{1}{6}(j_1 + 2j_2 + 2j_3 + j_4) \quad (4.32)$$

$$\omega_{n+1} = \omega_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (4.33)$$

dengan

$$j_1 = h\omega \quad (4.34)$$

$$k_1 = h(-g/l \sin \theta - q\omega) \quad (4.35)$$

$$j_2 = h(\omega + \frac{k_1}{2}) \quad (4.36)$$

$$k_2 = h\left(-g/l \sin(\theta + \frac{j_1}{2}) - q(\omega + \frac{k_1}{2})\right) \quad (4.37)$$

$$j_3 = h(\omega + \frac{k_2}{2}) \quad (4.38)$$

$$k_3 = h\left(-g/l \sin(\theta + \frac{j_2}{2}) - q(\omega + \frac{k_2}{2})\right) \quad (4.39)$$

$$j_4 = h(\omega + k_3) \quad (4.40)$$

$$k_4 = h(-g/l \sin(\theta + j_3) - q(\omega + k_3)). \quad (4.41)$$

4.3.2 Source code Gerak ayunan teredam

```

clear;
t=0;
tmak=5*pi;
h=0.1;
5 N=tmak/h;

tt=30/180*pi;
xe=tt; %posisi awal metode Euler
xr=tt; %posisi awal metode Runge-Kutta orde ke-4
10 v=0;
ve=v; %kecepatan sudut awal metode Euler
vr=v; %kecepatan sudut awal metode Runge-Kutta orde ke-4
g=9.8;
q=0.5;
15 l=2;
a=-g/l*sin(tt)-q*v;
ae=a; %percepatan sudut awal metode Euler
ar=a; %percepatan sudut awal metode Runge-Kutta orde ke-4

20 %Metode Euler
for i=1:N
    %Metode Euler
    xpe(i)=t;
    ype(i)=xe;
    25 rpe(i)=ve;
    xe=xe+h*ve;
    ve=ve+h*ae;
    ae=-g/l*sin(xe)-q*ve;

    30 %metode Runge-Kutta
    ypr(i)=xr;
    rpr(i)=vr;
    j1=h*vr;
    k1=h*(-g/l*sin(xr)-q*vr);
    35 j2=h*(vr+k1/2);
    k2=h*(-g/l*sin(xr+j1/2)-q*(vr+k1/2));
    j3=h*(vr+k2/2);
    k3=h*(-g/l*sin(xr+j2/2)-q*(vr+k2/2));
    j4=h*(vr+k3);
    40 k4=h*(-g/l*sin(xr+j3)-q*(vr+k3));

```

```

    xr=xr+1/6*(j1+2*j2+2*j3+j4);
    vr=vr+1/6*(k1+2*k2+2*k3+k4);

    t=t+h;
45 end;
    subplot(2,2,1);
    plot(xpe,ype); grid on; title('Ayunan (metode Euler)'); xlabel('t');
    ylabel('\theta');

    subplot(2,2,2);
50 plot(xpe,ypr); grid on; title('Ayunan (metode Runge-Kutta)'); xlabel('
    t'); ylabel('\theta');

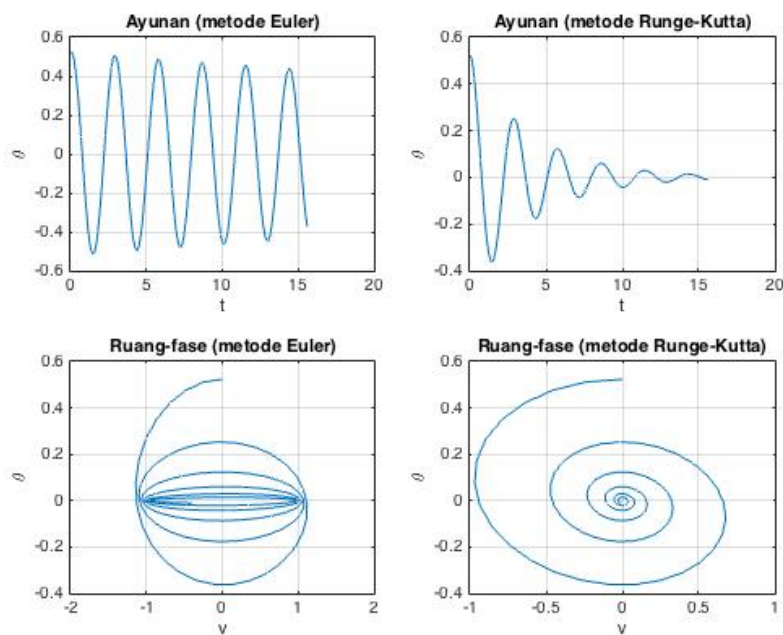
    subplot(2,2,3);
    plot(rpe,ypr); grid on; title('Ruang-fase (metode Euler)'); xlabel('v
    '); ylabel('\theta');

55 subplot(2,2,4);
    plot(rpr,ypr); grid on; title('Ruang-fase (metode Runge-Kutta)');
    xlabel('v'); ylabel('\theta');

```

Listing 4.2: Ayunan teredam.

Hasil yang muncul dari Listing. 1 ditunjukkan pada gambar



Gambar 4.2: Posisi sudut θ sebagai fungsi waktu t dan ruang-fase pada gerak ayunan dengan metode Euler dan Runge-Kutta.

5. Double Pendulum Motion with Constraint

5.1 INTRODUCTION

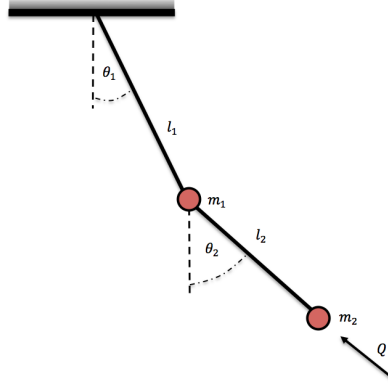
The purpose of this article is to solve Hamilton equations on constrained double pendulum motion. This was initialized by given usual Hamiltonian on double pendulum system after the generalized coordinates and momenta had been determined. Total Hamiltonian on constrained system was constructed by axial forcing given on second pendulum. The equations of motion were decomposed from thus Hamiltonian. They were solved by numerical approach. The Runge-Kutta method which is finite difference method was used to solve the differential equations of the equations motion. This method is sophisticated approach in various case. The results of this approach were posssed in poicare maps. The chaotic motion was seen clearly from the map since the constraint was time function.

The double pendulum system had been considered by [anli] in fractional order Langrange equations. This consideration was about constrained system given on second pendulum. In few years ago, [tavak] introduced the equations of motion on constrained Hamiltonian system. It will be interesting to try to solve constrained pendulum on [anli] using equation of motion on [tavak]. The equations of motion of double pendulum system had been decomposed by [stikel, sumin] without constraint. They include differential equations which consist of four equations. Runge-kutta method is usully used on many work of periodic motion as numerical approach. So this approach is used in this work. Otherwise, in this article numerical approach is choosen to solve the equations since constrained system is not easy to solve analitically. This approach usually uses to solve physics system, as shown in [nguyen, balac]. Some people will try to detect chaos behavior on motion which looks like complicated periodic motion. One of method on the detection is a poicare map. It simplifies the complicated system and useful for stability analysis. Chaotic and other motion can be distinguished visually by distinct point on the poicare map [ozer, kokos, marathe].

5.2 DOUBLE PENDULUM

5.2.1 The System

FIGURE 5.1 shows the double pendulum model which consists of simple pendulum system attached to the end of another simple pendulum. First simple pendulum is initialized by mass m_1 , thin rod wire length l_1 and the second one by m_2 and l_2 . Axial forcing Q is chosen as constraint of the system.



Gambar 5.1: Double pendulum model.

5.2.2 Equation of Motion

Usual Hamiltonian on double pendulum system is

$$H = \frac{m_2 l_2^2 p_{\theta_1}^2 + (m_1 + m_2) l_1^2 p_{\theta_2}^2 - 2m_2 l_1 l_2 p_{\theta_1} p_{\theta_2} \cos(\theta_1 - \theta_2)}{2l_1^2 l_2^2 m_2 [m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2)]} - (m_1 + m_2) g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g l_2 \cos \theta_2, \quad (5.1)$$

where θ_1, θ_2 are generalized coordinates and $p_{\theta_1}, p_{\theta_2}$ are generalized momenta. The axial forcing constraint is assumed

$$Q = A \sin(\theta_2 - \theta_1), \quad (5.2)$$

where A is a constant. According to the [tavak] equation of motion for the constrained system can be derived as

$$\dot{\theta}_i = \frac{\partial H}{\partial p_{\theta_i}} - \lambda \frac{\partial Q}{\partial p_{\theta_i}}, \quad \dot{p}_{\theta_i} = -\frac{\partial H}{\partial \theta_i} + \lambda \frac{\partial Q}{\partial \theta_i}, \quad (5.3)$$

where λ can be unknown parameter which can be a function which depends on t, p_{θ_i} , and θ_i , $i = 1, 2$. By a comparison to the Hamiltonian of unconstrained systems, a more general definition for the Hamiltonian of the system can be defined as

$$H_{total} = H - \lambda Q. \quad (5.4)$$

In this case, the equations of motion are decomposed from the terms of total Hamiltonian H_{total} . Actually, some steps are needed to obtained the equation of motion in terms of H_{total} , but for this numerical approach, it is assumed that

$$\dot{\theta}_i \approx \frac{\partial H_{total}}{\partial p_{\theta_i}}, \quad \dot{p}_{\theta_i} \approx -\frac{\partial H_{total}}{\partial \theta_i}. \quad (5.5)$$

For the simulation, assume that two masses are equal $m_1 = m_2 = m$, two length rods are equal $l_1 = l_2 = l$ and $\lambda = qp_{\theta_2} + f \cos \omega t$, where q, f, ω are constant, so equation (5.5) reduces to

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{p}_{\theta_1} \\ \dot{p}_{\theta_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p_{\theta_1} - p_{\theta_2} \cos(\theta_1 - \theta_2)}{ml^2 [1 + \sin^2(\theta_1 - \theta_2)]} \\ \frac{2p_{\theta_2} - p_{\theta_1} \cos(\theta_1 - \theta_2)}{ml^2 [1 + \sin^2(\theta_1 - \theta_2)]} \\ -2mgl \sin \theta_1 - c_1 + c_2 + k \\ -mgl \sin \theta_2 + c_1 - c_2 - k \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

where

$$c_1 = \frac{p_{\theta_1} p_{\theta_2} \sin(\theta_1 - \theta_2)}{ml^2 [1 + \sin^2(\theta_1 - \theta_2)]}, \quad (5.7)$$

$$c_2 = \frac{p_{\theta_1}^2 + p_{\theta_2}^2 - 2p_{\theta_1} p_{\theta_2} \cos(\theta_1 - \theta_2)}{ml^2 [1 + \sin^2(\theta_1 - \theta_2)]} \sin(\theta_1 - \theta_2), \quad (5.8)$$

and $k = (qp_{\theta_2} + f \cos \omega t) \cos(\theta_2 - \theta_1)$.

5.2.3 Numerical Approach

Numerical approach used is fourth order Runge-Kutta's method. The solution is decomposed according to

$$\theta_{i,n+1} = \theta_{i,n} + \frac{1}{6}(j_{i1} + 2j_{i2} + 2j_{i3} + j_{i4}), \quad (5.9)$$

$$p_{\theta_{i,n+1}} = p_{\theta_{i,n}} + \frac{1}{6}(k_{i1} + 2k_{i2} + 2k_{i3} + k_{i4}), \quad (5.10)$$

where

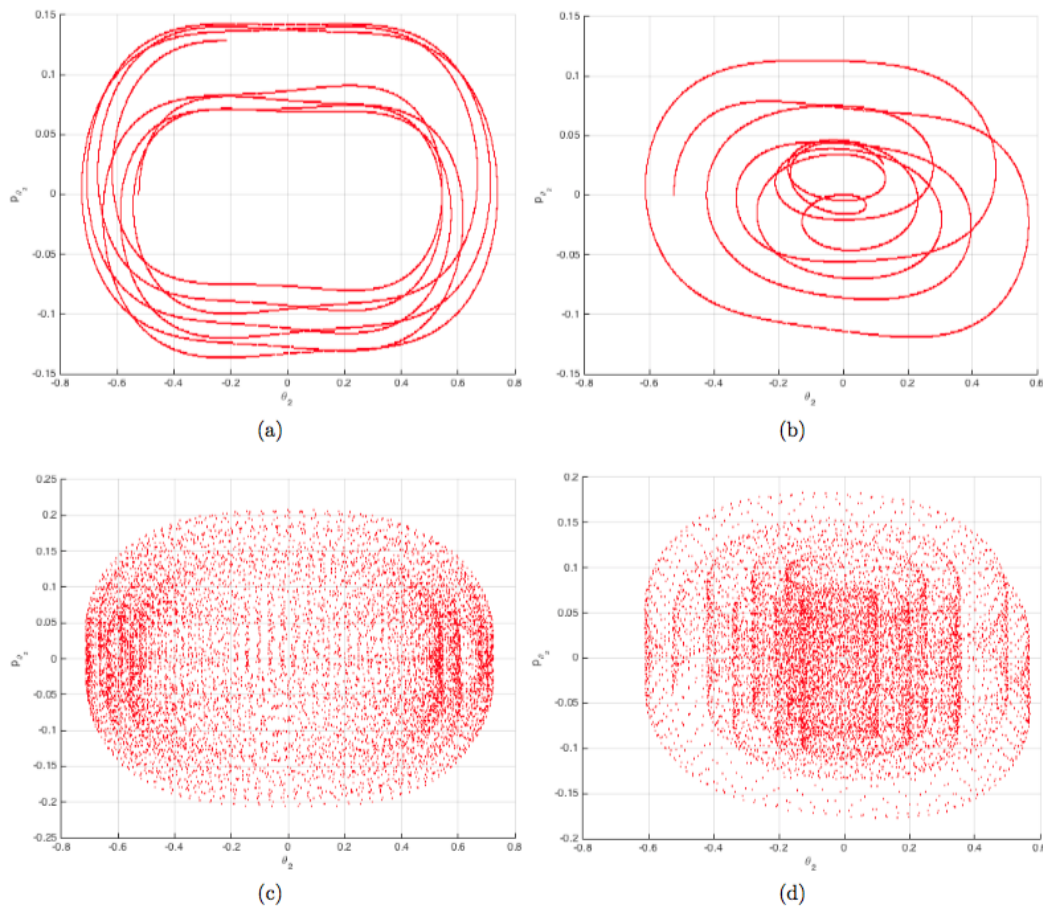
$$\begin{aligned} j_{i1} &= h\dot{\theta}_{i,n}(\theta_i, p_{\theta_i}), & k_{i1} &= h\dot{p}_{\theta_{i,n}}(\theta_i, p_{\theta_i}, t), \\ j_{i2} &= h\dot{\theta}_{i,n}\left(\theta_i + \frac{j_{i1}}{2}, p_{\theta_i} + \frac{k_{i1}}{2}\right), & k_{i2} &= h\dot{p}_{\theta_{i,n}}\left(\theta_i + \frac{j_{i1}}{2}, p_{\theta_i} + \frac{k_{i1}}{2}, t + \frac{h}{2}\right), \\ j_{i3} &= h\dot{\theta}_{i,n}\left(\theta_i + \frac{j_{i2}}{2}, p_{\theta_i} + \frac{k_{i2}}{2}\right), & k_{i3} &= h\dot{p}_{\theta_{i,n}}\left(\theta_i + \frac{j_{i2}}{2}, p_{\theta_i} + \frac{k_{i2}}{2}, t + \frac{h}{2}\right), \\ j_{i4} &= h\dot{\theta}_{i,n}(\theta_i + j_{i3}, p_{\theta_i} + k_{i3}), & k_{i4} &= h\dot{p}_{\theta_{i,n}}(\theta_i + j_{i3}, p_{\theta_i} + k_{i3}, t + h), \end{aligned} \quad (5.11)$$

and h is time steps on numerical grid.

5.3 RESULT AND DISCUSSION

The results of this paper display in the poicare maps. They are shown in FIGURE 5.2 which are displayed for some different initial values. The some initial values which are equal are $\theta_1 = 30^\circ, \theta_2 = -30^\circ, p_{\theta_1} = 0$, and $p_{\theta_2} = 0$. FIGURE 5.2(a) is a motion without constraint which is identified by $q = 0$ and $f = 0$. FIGURE 5.2(b) shows constrained system which is identified by $q = 0.5$ and $f = 0$. The constraint is a damped function which depends on p_{θ_2} . FIGURE 5.2(c) includes constrained system which is identified by $q = 0$ and $f = 40$. But, in this case, the constraint is a axial forcing which depends on t . FIGURE 5.2(d) also shows constrained system which is identified by $q = 0.5$ and $f = 40$. In addition, in this case, the constraint consist of a damped function depending on p_{θ_2} and a axial forcing depending on t .

FIGURE 5.2(a) and (b) display the poicare map in closed path. It means that the motions are quasi-periodic [ozer]. Meanwhile, distinct point are found on the poicare map in FIGURE 5.2(c) and (d). This means that the motion is chaotic behavior. While the given constraint depends on time, chaotic behavior can be found in determined initial value.



Gambar 5.2: Poincare maps in various initial values on double pendulum system .

5.4 CONCLUSION

Constrained Hamilton equation on the double pendulum system has been solved using fourth order Runge-Kutta method. The chaotic motion can be identified on double pendulum system which depend on the given constraint related to time function.

```

clear ;
l=1;
m=0.1;
g=9.8;
5 q=0.5;
f=40;
d=500;
n=10000;
h=0.001;
10 p1=zeros(n,1);
p2=zeros(n,1);
tt1=zeros(n,1);
tt2=zeros(n,1);
t=zeros(n,1);
15 p1(1)=0;
p2(1)=0;
tt1(1)=30/180*pi;
tt2(1)=-30/180*pi;
for i=1:n-1
20 j11=h*((p1(i)-p2(i)*cos(tt1(i)-tt2(i)))/(m*l^2*(1+(sin(tt1(i)-tt2(i)

```

```

        i))~2)))));
j21=h*((2*p2(i)-p1(i)*cos(tt1(i)-tt2(i)))/(m*1^2*(1+(sin(tt1(i)-
tt2(i))^2)))));
c11=(p1(i)*p2(i)*sin(tt1(i)-tt2(i)))/(m*1^2*(1+(sin(tt1(i)-tt2(i))
^2)))));
c21=(p1(i)^2+2*p2(i)^2-2*p1(i)*p2(2)*cos(tt1(i)-tt2(i)))/(2*m*1
^2*(1+(sin(tt1(i)-tt2(i))^2)^2)*sin(2*(tt1(i)-tt2(i))));
lam1=q*p2(i)+f*cos(d*t(i));
25 k1=lam1*cos(tt2(i)-tt1(i));
k11=h*(-2*m*g*1*sin(tt1(i))-c11+c21+k1);
k21=h*(-m*g*1*sin(tt2(i))+c11-c21-k1);

j12=h*((p1(i)+k11/2)-(p2(i)+k21/2)*cos((tt1(i)+j11/2)-(tt2(i)+j21
/2)))/(m*1^2*(1+(sin((tt1(i)+j11/2)-(tt2(i)+j21/2))^2)))));
30 j22=h*((2*(p2(i)+k11/2)-(p1(i)+k21/2)*cos((tt1(i)+j11/2)-(tt2(i)+
j21/2)))/(m*1^2*(1+(sin((tt1(i)+j11/2)-(tt2(i)+j21/2))^2)))));
c12=((p1(i)+k11/2)*(p2(i)+k21/2)*sin((tt1(i)+j11/2)-(tt2(i)+j21/2)
))/(m*1^2*(1+(sin((tt1(i)+j11/2)-(tt2(i)+j21/2))^2)))));
c22=((p1(i)+k11/2)^2+2*(p2(i)+k21/2)^2-2*(p1(i)+k11/2)*(p2(2)+k21
/2)*cos((tt1(i)+j11/2)-(tt2(i)+j21/2)))/(2*m*1^2*(1+(sin((tt1(i)
i)+j11/2)-(tt2(i)+j21/2))^2)^2)*sin(2*(tt1(i)+j11/2)-(tt2(i)
+j21/2))));
lam2=q*(p2(i)+k21/2)+f*cos(d*(t(i)+h/2));
k2=lam2*cos((tt2(i)+j21/2)-(tt1(i)+j11/2));
35 k12=h*(-2*m*g*1*sin((tt1(i)+j11/2))-c12+c22+k2);
k22=h*(-m*g*1*sin((tt2(i)+j21/2))+c12-c22-k2);

j13=h*((p1(i)+k12/2)-(p2(i)+k22/2)*cos((tt1(i)+j12/2)-(tt2(i)+j22
/2)))/(m*1^2*(1+(sin((tt1(i)+j12/2)-(tt2(i)+j22/2))^2)))));
j23=h*((2*(p2(i)+k12/2)-(p1(i)+k22/2)*cos((tt1(i)+j12/2)-(tt2(i)+
j22/2)))/(m*1^2*(1+(sin((tt1(i)+j12/2)-(tt2(i)+j22/2))^2)))));
40 c13=((p1(i)+k12/2)*(p2(i)+k22/2)*sin((tt1(i)+j12/2)-(tt2(i)+j22/2)
))/(m*1^2*(1+(sin((tt1(i)+j12/2)-(tt2(i)+j22/2))^2)))));
c23=((p1(i)+k12/2)^2+2*(p2(i)+k22/2)^2-2*(p1(i)+k12/2)*(p2(2)+k22
/2)*cos((tt1(i)+j12/2)-(tt2(i)+j22/2)))/(2*m*1^2*(1+(sin((tt1(i)
i)+j12/2)-(tt2(i)+j22/2))^2)^2)*sin(2*(tt1(i)+j12/2)-(tt2(i)
+j22/2))));
lam3=q*(p2(i)+k22/2)+f*cos(d*(t(i)+h/2));
k3=lam3*cos((tt2(i)+j22/2)-(tt1(i)+j12/2));
k13=h*(-2*m*g*1*sin((tt1(i)+j12/2))-c13+c23+k3);
45 k23=h*(-m*g*1*sin((tt2(i)+j22/2))+c13-c23-k3);

j14=h*((p1(i)+k13)-(p2(i)+k23)*cos((tt1(i)+j13)-(tt2(i)+j23)))/(m
*1^2*(1+(sin((tt1(i)+j13)-(tt2(i)+j23))^2)))));
j24=h*((2*(p2(i)+k13)-(p1(i)+k23)*cos((tt1(i)+j13)-(tt2(i)+j23)))/
(m*1^2*(1+(sin((tt1(i)+j13)-(tt2(i)+j23))^2)))));
c14=((p1(i)+k13)*(p2(i)+k23)*sin((tt1(i)+j13)-(tt2(i)+j23)))/(m*1
^2*(1+(sin((tt1(i)+j13)-(tt2(i)+j23))^2)))));
50 c24=((p1(i)+k13)^2+2*(p2(i)+k23)^2-2*(p1(i)+k13)*(p2(2)+k23)*cos((
tt1(i)+j13)-(tt2(i)+j23)))/(2*m*1^2*(1+(sin((tt1(i)+j13)-(tt2(i)
i)+j23))^2)^2)*sin(2*(tt1(i)+j13)-(tt2(i)+j23))));
lam4=q*(p2(i)+k23)+f*cos(d*(t(i)+h));
k4=lam4*cos((tt2(i)+j23)-(tt1(i)+j13));
k14=h*(-2*m*g*1*sin((tt1(i)+j13))-c14+c24+k4);
k24=h*(-m*g*1*sin((tt2(i)+j23))+c14-c24-k4);
55 tt1(i+1)=tt1(i)+1/6*(j11+2*j12+2*j13+j14);
tt2(i+1)=tt2(i)+1/6*(j21+2*j22+2*j23+j24);
p1(i+1)=p1(i)+1/6*(k11+2*k12+2*k13+k14);
p2(i+1)=p2(i)+1/6*(k21+2*k22+2*k23+k24);
if(tt1(i+1) < -pi)
60 tt1(i+1)=tt1(i+1)+2*pi;

```

```
elseif (tt1(i+1) > pi)
    tt1(i+1)=tt1(i+1)-2*pi;
end;
if (tt2(i+1) < -pi)
65     tt2(i+1)=tt2(i+1)+2*pi;
elseif (tt2(i+1) > pi)
    tt2(i+1)=tt2(i+1)-2*pi;
end;
t(i+1)=t(i)+h;
70 end;
I=find(abs(rem(t,2*pi/d))>0.02);
p2(I)=NaN;
tt2(I)=NaN;
scatter(tt2,p2,1,'r'); grid on;
75 xlabel('\theta_2');
ylabel('p_{\theta_2}');
```

Listing 5.1: Contoh Source Code.

6. Gerak Muatan dalam Medan Listrik dan Magnet

6.1 Pendahuluan

Pada bagian ini, kita akan bermain-main dengan dinamika suatu muatan titik yang berada dalam daerah medan listrik dan medan magnet. Pertama-tama akan diuraikan rumusan terkait kasus tersebut dengan memanfaatkan Hukum II Newton. Setelah sistem persamaan diferensial diperoleh, pembuatan program dapat dilakukan. Pembuatan program ini diawali dengan memberikan beberapa nilai awal yang diperlukan. Lalu, metode numerik digunakan untuk mendapatkan jawaban terkait kasus tersebut. Interpretasi hasil diwujudkan dalam plot 3D.

6.2 Penguraian Rumusan

6.2.1 Gaya Lorentz

Apabila suatu muatan q berada dalam medan listrik \mathbf{E} , q tersebut akan memperoleh gaya listrik \mathbf{F}_e sebesar

$$\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}. \quad (6.1)$$

Persamaan (6.1) memperlihatkan bahwa arah \mathbf{F}_e sama dengan arah \mathbf{E} .

Apabila q bergerak dengan kecepatan \mathbf{v} dalam medan magnetik \mathbf{B} , q tersebut akan memperoleh gaya magnetik \mathbf{F}_m sebesar

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (6.2)$$

Persamaan (6.2) memperlihatkan bahwa arah \mathbf{F}_m tegak lurus dengan arah \mathbf{v} dan \mathbf{B} . Oleh karena itu, ilustrasi dan penguraian rumusan yang akan diberikan harus dalam **koordinat 3 dimensi**.

Berikutnya, apabila suatu muatan bergerak dipengaruhi \mathbf{E} dan \mathbf{B} , muatan tersebut akan memperoleh gaya \mathbf{F} sebesar

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m \quad (6.3)$$

$$= q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (6.4)$$

$$= q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (6.5)$$

Persamaan (6.5) biasa dikenal dengan sebutan **Gaya Lorentz**.

6.2.2 Penerapan Hukum II Newton

Hukum II newton menyatakan bahwa percepatan \mathbf{a} benda sebanding dengan gaya luar F menurut

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \quad (6.6)$$

dengan m adalah massa benda. Apabila gaya yang bekerja berupa gaya Lorentz, akan diperoleh

$$q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = m\mathbf{a} \quad (6.7)$$

$$\mathbf{a} = \frac{q}{m}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (6.8)$$

Secara umum dapat diuraikan bahwa $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$, $\mathbf{E} = E_x\mathbf{i} + E_y\mathbf{j} + E_z\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$, dan $\mathbf{B} = B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}$, sehingga persamaan (6.8) dapat dituliskan menurut

$$a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} = \frac{q}{m} \{ (E_x\mathbf{i} + E_y\mathbf{j} + E_z\mathbf{k}) + \quad (6.9)$$

$$(v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}) \times (B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}) \} \quad (6.10)$$

$$= \frac{q}{m} \{ (E_x\mathbf{i} + E_y\mathbf{j} + E_z\mathbf{k}) + \quad (6.11)$$

$$(v_yB_z - v_zB_y)\mathbf{i} - (v_xB_z - v_zB_x)\mathbf{j} + (v_xB_y - v_yB_x)\mathbf{k} \}. \quad (6.12)$$

Komponen arah \mathbf{i} ruas kiri sama dengan komponen arah \mathbf{i} ruas kanan. Demikian pula untuk komponen \mathbf{j} dan \mathbf{k} , sehingga akan diperoleh

$$a_x = \frac{q}{m}(E_x + v_yB_z - v_zB_y) \quad (6.13)$$

$$a_y = \frac{q}{m}(E_y - v_xB_z + v_zB_x) \quad (6.14)$$

$$a_z = \frac{q}{m}(E_z + v_xB_y - v_yB_x). \quad (6.15)$$

Kita tahu bahwa $a_\alpha = \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \ddot{\alpha}$ dan $v_\alpha = \frac{d\alpha}{dt}$ dengan $\alpha = x, y, z$. Lalu, persamaan (6.13)-(6.15) dapat dituliskan menurut

$$\ddot{x} = \frac{q}{m}(E_x + v_yB_z - v_zB_y) \quad (6.16)$$

$$\ddot{y} = \frac{q}{m}(E_y - v_xB_z + v_zB_x) \quad (6.17)$$

$$\ddot{z} = \frac{q}{m}(E_z + v_xB_y - v_yB_x). \quad (6.18)$$

Kita telah mendapatkan tiga buah **Persamaan Diferensial Biasa** yang saling terkait. Secara analitik jawaban persamaan ini cukup rumit tanpa pemberian contoh medan magnetik, medan listrik, dan kecepatan secara real. Akan tetapi, secara numerik pemberian contoh tersebut dapat disiasati saat pemberian nilai awal.

6.3 Pembuatan Program

6.3.1 Nilai awal

Contoh pertama yang akan dibuat adalah dengan mengandaikan tidak ada medan listrik $\mathbf{E} = 0$, dan arah kecepatan awal tegak lurus dengan arah medan magnetik yang dapat diberikan dengan contoh $\mathbf{v} = \mathbf{i}$ dan $\mathbf{B} = \mathbf{k}$. Lalu dapat diandaikan pula partikel bergerak dari pusat koordinat. Beberapa nilai awal lain yang dapat diberikan adalah waktu awal $t = 0$, waktu akhir $t_{mak} = 3s$, jarak antar grid $h = 10^{-5}$, massa benda $m = 0.1kg$, jumlah muatan $q = 1C$.

6.3.2 Metode Numerik

Metode numerik yang akan digunakan pertama kali adalah metode Euler dengan

$$f_{n+1} = f_n + hf'_n. \quad (6.19)$$

6.4 Hasil dan Pembahasan

6.4.1 Source code ayunan

```
%sikloid.m

clear;
t=0;
5 h=0.00001;
tmak=3;
N=(tmak-t)/h;
q=1;
m=0.1;
10 x=0 ; y=0; z=0;
ex=0 ; ey=0; ez=0;
bx=0 ; by=0; bz=1;
vx=1 ; vy=0; vz=0;
ax=q/m*(ex+vy*bz-vz*by);
15 ay=q/m*(ey-vx*bz+vz*bx);
az=q/m*(ez+vx*by-vy*bx);
for i=1:N
    xp(i)=x;
    yp(i)=y;
20 zp(i)=z;
    x=x+h*vx;
    y=y+h*vy;
    z=z+h*vz;
    vx=vx+h*ax;
25 vy=vy+h*ay;
    vz=vz+h*az;
    ax=q/m*(ex+vy*bz-vz*by);
    ay=q/m*(ey-vx*bz+vz*bx);
    az=q/m*(ez+vx*by-vy*bx);
30 t=t+h;
end;
plot3(xp,yp,zp); grid on;
```

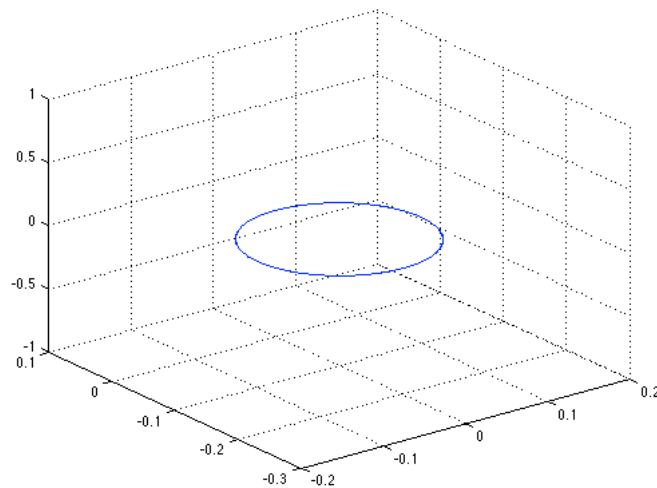
Listing 6.1: Gerak muatan dalam medan magnet.

6.4.2 Pembahasan

Hasil yang diperoleh dari contoh pertama dapat dilihat pada gambar 6.1. Gerak muatan berupa **gerak melingkar**.

Kita juga dapat memberikan beberapa nilai awal lain misalnya dengan memberi tambahan medan listrik yang tegak lurus dengan arah gerak benda dan medan magnet. Contoh yang dapat diberikan dengan memberikan $\mathbf{E} = 0.3\mathbf{j}$. Dalam listing program, kita cukup mengganti $ey = 0$ dengan $ey = 0.3$. Hasil yang ditunjukkan terlihat pada gambar 6.2a. Gerak muatan berupa lintasan **Heliks**.

Berikutnya, kita dapat mencoba memberikan nilai medan listrik yang berbeda-beda. Contoh yang diberikan kita akan mencoba memberikan besar medan listrik setengah kali medan magnetik yaitu dengan $ey = 0.5$. Hasil yang diperoleh ditunjukkan pada gambar 6.2b. Gerak muatan berupa lintasan **Sikloid**.



Gambar 6.1: Gerak muatan q dengan medan $\mathbf{E} = 0$, arah gerak awak tegak lurus dengan arah medan magnet $\mathbf{v} = \mathbf{i}$ dan $\mathbf{B} = \mathbf{k}$.

6.5 Diskusi

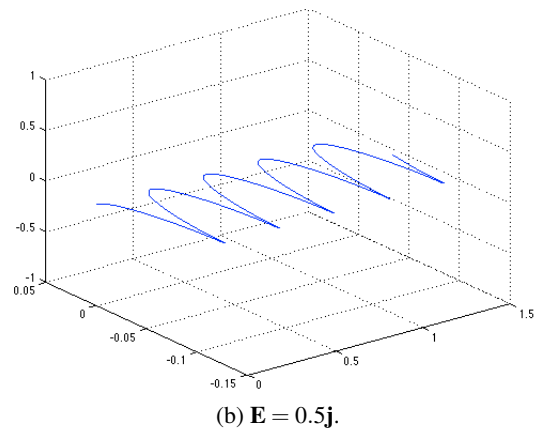
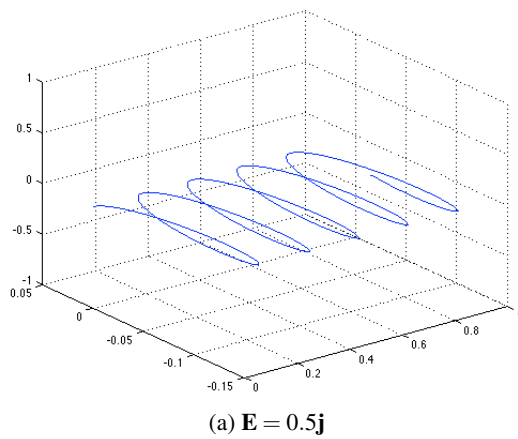
Ilustrasi gerak akan dengan mudah diperoleh menggunakan metode numerik. Akan tetapi beberapa informasi gerak lebih detail membutuhkan eksplorasi lebih lanjut. Pada hasil gambar 6.1 kita dapat langsung mengetahui bahwa lintasan gerak berupa lingkaran. Apabila ditanyakan, berapakah jari-jari lingkaran yang dihasilkan?. Perlu skenario tambahan untuk menjawab pertanyaan ini. Apabila nilai awal yang diberikan pada contoh ini dimasukkan ke persamaan (6.16)-(6.18), kita akan memperoleh tiga persamaan baru yang akan cenderung mudah diselesaikan secara analitik dan kita akan dapat memperoleh jari-jari lingkaran dari lintasan yang terbuat.

Berikutnya untuk hasil 6.2 informasi detail lain yang juga penting adalah frekuensi lintasan. Informasi ini tidak dapat secara langsung diperoleh. Metode analitik dibutuhkan untuk mendapatkan hasil ini. Cara analitik untuk memperolehnya adalah dengan memasukkan nilai awal yang diberikan ke persamaan (6.16)-(6.18).

6.6 Tugas

Setelah membuat program tersebut di atas. Kerjakanlah beberapa pengembangan terkait program tersebut!

1. Update-lah metode yang digunakan dengan metode Runge-Kutta orde IV sehingga dalam pembuatan program dapat digunakan h yang lebih besar yang dapat memperkecil jumlah iterasi !
2. Berikanlah beberapa nilai awal lain selain yang dicontohkan ! Dapatkah ditemukan lintasan baru selain yang dicontohkan ! Apabila ditemukan, gerak apa lintasan tersebut ?
3. Carilah jari-jari lingkaran dari contoh pertama yang diberikan, baik secara analitik maupun eksplorasi perhitungan numerik !
4. Carilah frekuensi dari hasil gambar 6.2 baik secara analitik maupun eksplorasi perhitungan numerik !



Gambar 6.2: Gerak muatan dengan tambahan medan listrik yang tegak lurus arah gerak awal dan medan magnetik $\mathbf{v} = \mathbf{i}$, dan $\mathbf{B} = \mathbf{k}$.

