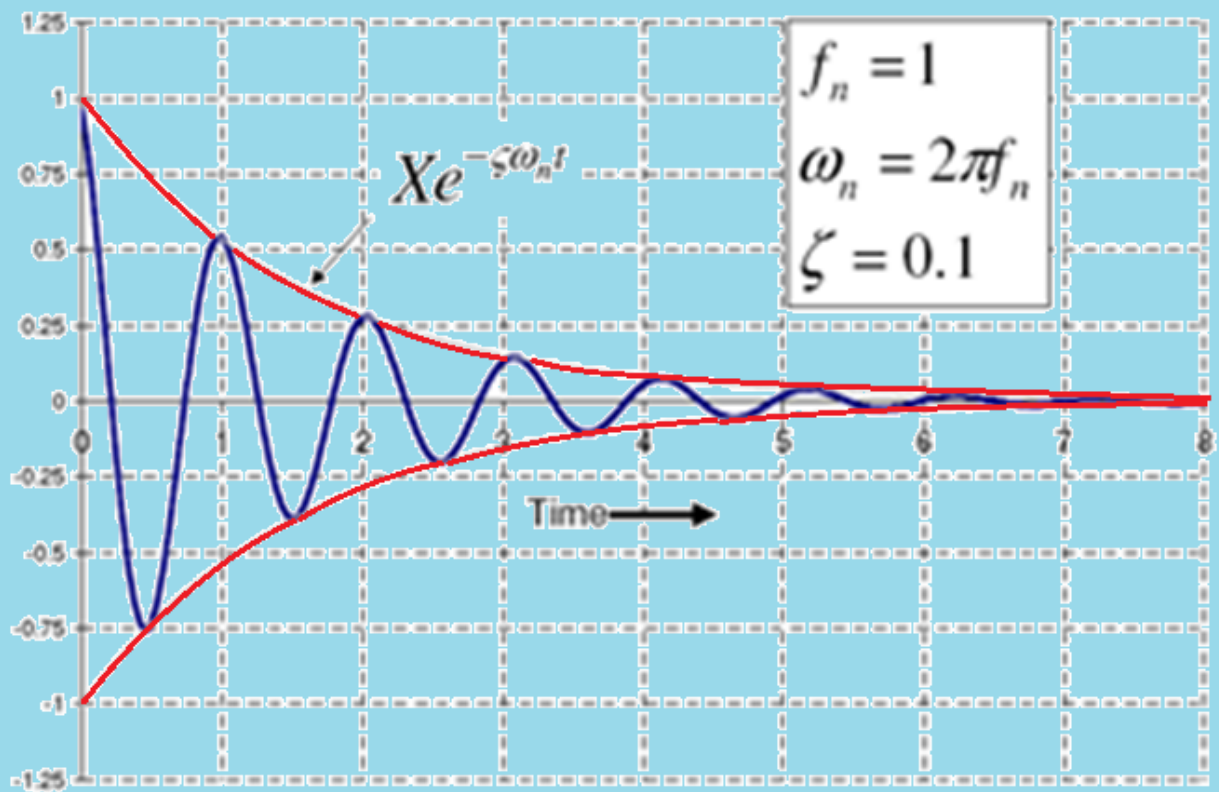


# GETARAN MEKANIS



**Toto Rusianto**

**Anak Agung Putu Susastriawan**



**AKPRIND PRESS**

# **GETARAN MEKANIS**

**Toto Rusianto**

**Anak Agung Putu Susastriawan**



**AKPRIND PRESS**

Undang-undang Nomor 7 Tahun 1987  
Tentang Hak Cipta  
Pasal 44

- (1) Barang siapa dengan Sengaja mengumumkan atau memperbanyak suatu ciptaan atau memberi ijin untuk itu, dipidana dengan pidana penjara paling lama 7 (tahun) dan /atau denda paling banyak Rp. 100.000.000,00 (seratus Juta Rupiah).
- (2) Barang siapa dengan sengaja menyiarkan, memamerkan, mengedarkan, atau menjual kepada umum suatu ciptaan atau barang hasil pelanggaran Hak Cipta sebagaimana dimaksud dalam ayat (1), dipidana dengan pidana penjara paling lama 5 (lima ) tahun dan / denda paling banyak Rp. 50.000.000,00,- (limapuluh juta rupiah)

## GETARAN MEKANIS

Hak Cipta 2021 pada penulis, dilarang keras mengutip, menjiplak, memfotocopy baik sebagian atau keseluruhan isi buku ini tanpa mendapat ijin tertulis dari pengarang dan penerbit

Penulis : Toto Rusianto, Anak Agung Putu Susastriawan  
Page makeup : -  
Desain Cover : -  
Diterbitkan oleh : AKPRIND PRESS  
ISBN : 978-623-7772-12-5

HAKCIPTA DILINDUNGI OLEH UNDANG-UNDANG

## DAFTAR ISI

Halaman Judul .....	i
Halaman Balik Judul .....	ii
Dafatar Isi .....	iii
Kata Pengantar .....	iv
Bab I Gerak Harmonik Sederhana .....	1
Bab II Hukum Hooke Pada Pegas .....	9
Bab III Getaran Bebas Teredam .....	19
Bab IV Getaran Paksa .....	32
Bab V Getaran Mekanis Dua Derajat Kebebasan .....	39
Bab VI Getaran Peredam Pada Dua Derajat Kebebasan .....	49
Bab VII Konstanta Kekakuan Benda Rigid .....	55
Bab VIII Elemen Redaman ( <i>Damping Element</i> ) .....	65
Bab IX Analisis Putaran Poros Dan Getaran Aksial .....	71
Daftar Pustaka .....	78

## **KATA PENGHANTAR**

Bagian mesin berputar memiliki frekwensi yang dapat mengakibatkan getaran pada bagian bagian komponen yang berputar maupun komponen yang diam. Getaran yang terjadi itu disebut dengan getaran mekanis. Pengetahuan akan getaran mekanis diberikan dalam mata Kuliah Getaran Mekanis. Mata Kuliah Getaran Mekanaik adalah mata kuliah wajib progran tudi Sarjana di Jurusan Teknik Mesin Institut Sains dan Teknologi AKPRIND Yogyakarta dan merupakan matakuliah wajib di kosorsium Teknik Mesin se Indonesia.

Di dalam buku ini, diberikan ringkasan tentang beberapa materi hasil kajian jurnal maupun yang diambil ataupun diterjemahkan dari buku-buku teks getaran mekanis. Materi materi tersebut meliputi getaran harmonik sederhana, getaran bebas dan getaran paksa, getaran tak teredam dan getaran teredam, getaran dengan satu derajat kebebasan 1DOF ataupun dua derajat kebebasan 2DOF atau Multi DOF. Jenis jenis peredam maupun faktor redaman. Untuk memudahkan pemahaman oleh mahasiswa, buku ajat ini dilengkapi dengan contoh soal dan penyelesaian, serta pada beberapa bab dilengkapi dengan soal-soal latihan. Walaupun buku ini masih sangat jauh dari yang diharapkan, namun sekiranya dapat memudahkan mahasiswa dalam mempelajari Getaran Mekanis.

Yogyakarta, ..... Mei 2021

penulis

# BAB I

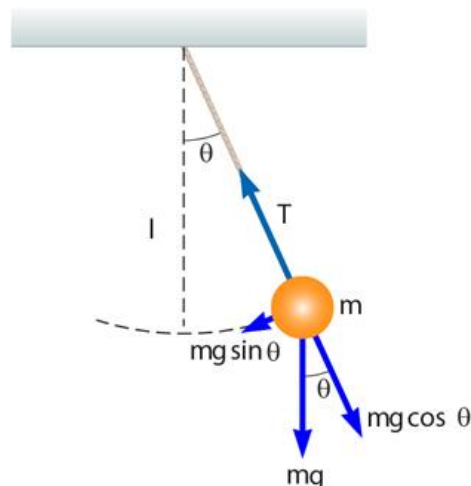
## GERAK HARMONIK SEDERHANA

---

Dalam mekanika dan fisika, gerak harmonik sederhana adalah tipe khusus gerak periodik atau osilasi dimana gaya ( $F$ ) berbanding lurus dengan perpindahan ( $x$ ) dan dengan arah yang berlawanan dengan perpindahan. Gerakan harmonik sederhana dapat berfungsi sebagai model matematika untuk berbagai gerakan, seperti osilasi pegas. Selain itu, fenomena lain dapat didekati dengan gerakan harmonik sederhana, termasuk gerakan pendulum/bandul dan getaran molekul. Gerakan harmonik sederhana ditandai oleh gerakan massa pada pegas ketika dikenakan gaya pemulihan elastis linier yang diberikan oleh hukum Hooke. Gerakan ini sinusoidal dalam waktu dan menunjukkan frekuensi resonansi tunggal. Agar gerakan harmonik sederhana menjadi model yang akurat untuk pendulum, gaya total pada objek di ujung pendulum harus proporsional dengan perpindahan.

### 1.2. Gerak Harmonik Sederhana Pada Bandul

Sebuah bandul sederhana terdiri atas sebuah beban bermassa  $m$  yang digantung di ujung tali ringan (massanya dapat diabaikan) yang panjangnya  $l$ . Jika beban ditarik ke satu sisi dan dilepaskan, maka beban berayun melalui titik keseimbangan menuju ke sisi yang lain. Jika amplitudo ayunan kecil, maka bandul melakukan getaran harmonik. Periode dan frekuensi getaran pada bandul sederhana sama seperti pada pegas. Artinya, periode dan frekuensinya dapat dihitung dengan menyamakan gaya pemulih dan gaya sentripetal.



Gambar 1.1. Gaya pada bandul sederhana

Persamaan gaya pemulih pada bandul sederhana adalah:

$$F = -mg \sin \theta \quad (1.1)$$

Untuk sudut  $\theta$  kecil ( $\theta$  dalam satuan radian), maka  $\sin \theta = \theta$ . Maka persamaannya dapat dituliskan mejadi

$$F = -mg \left( \frac{x}{l} \right) \quad (1.2)$$

Sedangkan gaya sentripetal dari bandul adalah

$$F = -4\pi^2 m f^2 X \quad (1.3)$$

Maka dengan menggabungkan Pers. (1.2) dan Pers. (1.3), maka didapatkan frekwensi (f) dan periode (T) gerakan bandul sebagai berikut

$$-4\pi^2 m f^2 X = -mg \left( \frac{x}{l} \right)$$

$$4\pi^2 f^2 = \left( \frac{g}{l} \right)$$

$$f^2 = \frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{g}{l} \right)$$

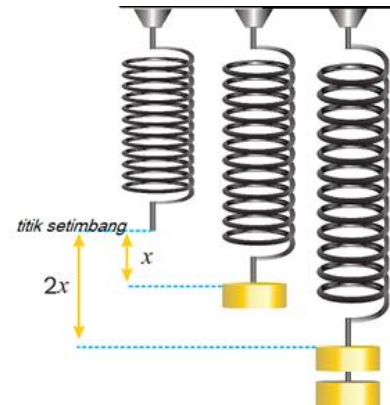
$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (1.4)$$

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (1.5)$$

Periode dan frekuensi bandul sederhana tidak bergantung pada massa dan simpangan bandul, tetapi hanya bergantung pada panjang tali dan percepatan gravitasi setempat.

## 1.2. Gerak Harmonik pada Pegas

Gerakan simple harmonic oscillato diperlihatkan pada gambar yang terdiri dari bobot/benda yang melekat pada salah satu ujung pegas. Ujung pegas yang terhubung ke dukungan kaku seperti dinding. Jika sistem dibiarkan diam pada posisi setimbang maka tidak ada gaya total yang bekerja pada massa. Namun, jika massa dipindahkan dari posisi kesetimbangan, pegas memberikan gaya elastis yang memulihkan yang sesuai hukum Hooke (hukum elastisitas).



Gambar 1.2. Pegas sederhana

Secara matematis, gaya pemulih  $F$  diberikan oleh

$$F_p = -kx \quad (1.6)$$

dimana

$F$  = gaya elastis yang diberikan oleh pegas (N),

$k$  = konstanta pegas (N/m),

$x$  = perpindahan dari posisi kesetimbangan (m).

tanda negatif menunjukkan arah berlawanan dari gaya berat

## 1.3. Osilator Harmonik Mekanis Sederhana

Gerakan harmonik sederhana ditampilkan baik dalam ruang nyata maupun ruang fase. Orbitnya periodik. (Di sini sumbu kecepatan dan posisi telah dibalik dari konvensi standar untuk menyelaraskan kedua diagram). Ketika sistem dipindahkan dari posisi setimbangnya, gaya pemulih yang dipatuhi Hukum Hooke cenderung untuk mengembalikan sistem ke keseimbangan. Setelah massa dipindahkan dari posisi setimbang, ia mengalami gaya pemulih bersih. Akibatnya, ia berakselerasi dan mulai kembali ke posisi setimbang. Ketika massa bergerak lebih dekat ke posisi kesetimbangan,



gaya pemulih menurun. Pada posisi setimbang, gaya pemulih menghilang. Namun, pada  $x = 0$ , massa memiliki momentum karena percepatan yang diberikan oleh gaya pemulih. Oleh karena itu, massa terus melewati posisi kesetimbangan, menekan pegas. Suatu gaya pemulih jaring kemudian memperlambatnya hingga kecepatannya mencapai nol, dan kemudian dipercepat kembali ke posisi setimbang lagi. Selama sistem tidak kehilangan energi, massa terus berosilasi. Jadi gerak harmonik sederhana adalah jenis gerakan periodik. Perhatikan jika ruang nyata dan diagram ruang fase tidak co-linear, gerakan ruang fase menjadi elips. Area yang tertutup tergantung pada amplitudo dan momentum maksimum.

#### 1.4. Dinamika Gerak

Dalam mekanika Newton, untuk gerak harmonik sederhana satu dimensi, persamaan gerak, yang merupakan persamaan diferensial biasa linear orde dua dengan koefisien konstan, dapat diperoleh dengan menggunakan hukum 2 Newton dan hukum Hooke untuk massa pada pegas.

Berat benda dinyatakan dalam gaya berat dengan persamaan Newton sebagai

$$F_g = mg \quad (1.7)$$

$g$  adalah percepatan gravitasi yang merupakan fungsi perubahan kecepatan ( $dV$ ) terhadap waktu ( $dt$ ).

$$g = \frac{dV}{dt} \quad (1.8)$$

Sedang kecepatan ( $V$ ) merupakan fungsi perpindahan ( $dx$ ) terhadap waktu ( $dt$ )

$$V = \frac{dx}{dt} \quad (1.9)$$

Sehingga

$$g = \frac{dV}{dt} = \frac{d\frac{dx}{dt}}{dt} \rightarrow g = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (1.10)$$

Dengan mensubstitusi Pers (1.10) ke Pers. (1.8), maka persamaan gaya pemulih menjadi:

$$F_g = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (1.11)$$

dimana

$m$  = massa inersia dari benda berosilasi

$x$  = perpindahannya dari kesetimbangan.

Dengan memperhatikan hukum kesetimbangan dimana Gaya Pegas sama dengan Gaya Berat

$$F_g = F_p \quad (1.12)$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad (1.13)$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad (1.14)$$

Secara matematik Pers (1.14) adalah persamaan Diferensial Linier Orde Dua Homogen.

Penyelesaian Pers (1.14) adalah seperti berikut ini

$$dx/dt = \lambda x \quad (1.15)$$

$$dx/x = \lambda dt \quad (1.16)$$

dengan meintegralkan masing ruas kiri dan kanan diperoleh

$$\ln x = \lambda t \quad (1.17)$$

maka  $x = e^{\lambda t}$  diferensial pertama  $x(t) \rightarrow dx/dt = \lambda e^{\lambda t}$  diferensial kedua  $x^2(t) \rightarrow d^2x/dt^2 = \lambda^2 e^{\lambda t}$

Persamaan ini dapat ditulis dalam bentuk:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0 \quad (1.18)$$

$$m\lambda^2 e^{\lambda t} + k e^{\lambda t} = 0 \quad (1.19)$$

$$e^{\lambda t} (m\lambda^2 + k) = 0 \quad (1.20)$$

Penyelesain dari persamaan tersebut

$$m\lambda^2 + k = 0 \quad (1.21)$$

$$\lambda^2 = -\frac{k}{m} \rightarrow \lambda = \pm \sqrt{-\frac{k}{m}} \rightarrow \lambda = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{-1} \quad (1.22)$$

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} i \quad (1.23)$$

Dengan memperhatikan persamaan  $x(t) = e^{\lambda t}$ , maka penyelesaiannya menjadi

$$x(t) = e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t} \quad (2.24)$$

$$x(t) = e^{+\sqrt{\frac{k}{m}} ti} + e^{-\sqrt{\frac{k}{m}} ti} \quad (2.25)$$

Jika  $= \sqrt{\frac{k}{m}}$ , maka

$$x(t) = e^{+\omega ti} + e^{-\omega ti} \quad (2.26)$$

$$x(t) = \cos \omega t + \sin \omega t \quad (2.27)$$

Pegas awal memanjang akibat gaya F memiliki simpangan awal A (Amplitudo), saat akan beresilasi dimana  $t = 0$ , persamaan menjadi

$$x(t) = A \cos \omega t \quad (2.28)$$

Jika gelombang memiliki kecepatan fase awal  $\phi$  maka persamaan menjadi

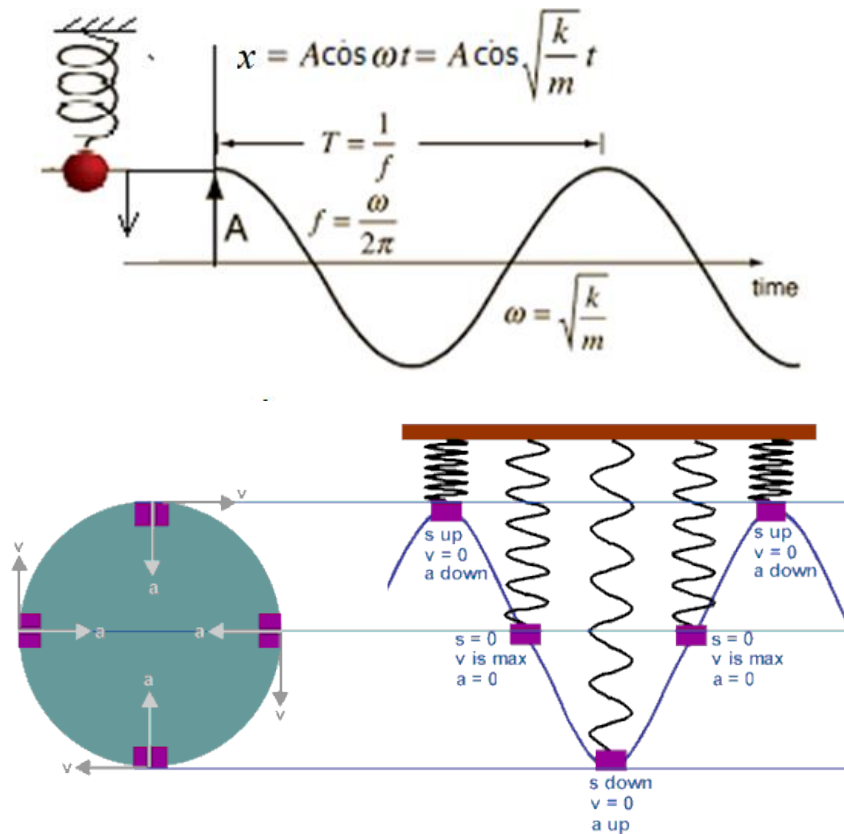
$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (2.29)$$

dimana  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  merupakan kecepatan angular/kecepatan sudut,  $\omega = 2\pi f$  dan  $T = 1/f$  maka periode (T) dalam detik dan frekuensi (f) dalam Herzt menjadi

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.30)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (1.31)$$

Periode dan frekuensi tidak tergantung pada amplitudo dan fase awal gerak. Jika gerak harmonic sederhana pada pegas digambarkan dalam grafik, maka didapatkan grafik seperti pada Gambar 1.3.



Gambar 1.3. Grafik gerak harmonik sederhana pada pegas

### 1.5. Energi Pegas

Pergantian  $\omega^2$  dengan  $k/m$ , energi kinetik  $K$  pada sistem pada  $t$  tertentu adalah

$$E(t) = \frac{1}{2}mv^2(t) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - \varphi) = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t - \varphi) \quad (1.32)$$

Dan energi potensial

$$U(t) = \frac{1}{2}kx^2(t) = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t - \varphi) \quad (1.33)$$

Dengan tidak adanya gesekan dan kehilangan energi lainnya, energi mekanis total memiliki nilai konstan

$$E = K + U = \frac{1}{2}kA^2 \quad (1.34)$$

## BAB II

### HUKUM HOOKE PADA PEGAS

---

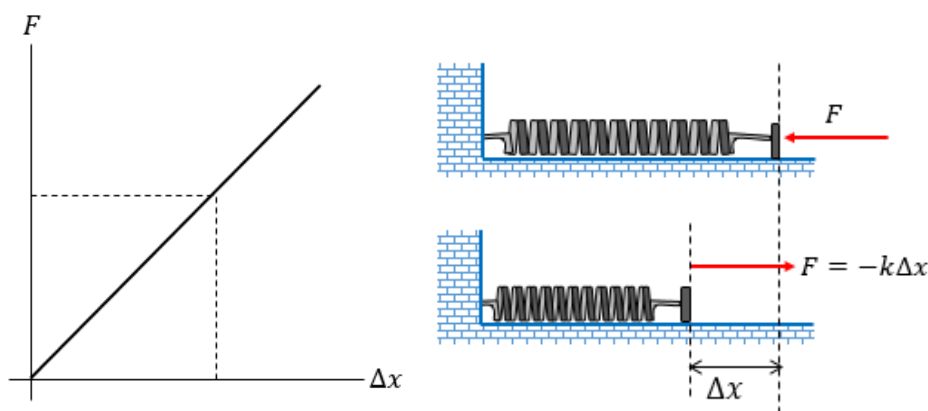
Bahan memiliki sifat elastisitas yang dibatasi oleh nilai Modulus. Hukum Hooke menjelaskan tentang perbandingan gaya yang bekerja pada benda dengan perubahan panjang benda pada daerah elastis.

#### 2.1. Hukum Hooke

Hukum Hooke adalah hukum fisika yang menyatakan bahwa gaya ( $F$ ) yang diperlukan untuk memperpanjang atau mengkompres pegas dengan jarak tertentu ( $x$ ) skala secara linear sehubungan dengan jarak itu yaitu,  $F = -kx$  di mana  $k$  adalah karakteristik faktor konstan pegas (yaitu, kekakuannya). Hukum ini dinamai sesuai dengan fisikawan Inggris abad ke-17 Robert Hooke. Dia pertama kali menyatakan hukum pada 1676

“Jika gaya tarik tidak melampaui batas elastis pegas, maka pertambahan panjang pegas berbanding lurus (sebanding) dengan gaya tariknya.”

Menurut Hukum Hooke, pada daerah elastis, yaitu daerah dimana sebuah benda masih dapat kembali ke bentuk semula setelah diberi gaya. Perubahan panjang benda akibat gaya luar sebanding dengan gaya luar yang bekerja. Untuk mempermudah mempelajari teori hukum Hooke pada pegas mari kita tinjau sebuah pegas.



Gambar 2.1. Hukum Hooke pada pegas

Pegas yang diberi gaya luar sebesar  $F$  maka, pegas akan memberi gaya yang besarnya sama namun berlawanan arah. Gaya ini disebut dengan gaya pulih. Jika sebuah pegas yang panjangnya dikenai gaya sehingga panjangnya berubah menjadi  $\Delta x$ , maka besar gaya pulih dapat dituliskan sebagai berikut.

$$F = -k\Delta x \quad (2.1)$$

$k$  adalah konstanta pegas yaitu nilai yang menunjukkan gaya yang dibutuhkan untuk mengubah panjang pegas tiap meter. Tanda negatif menunjukkan bahwa arah gaya pulih berlawanan arah dengan vektor perubahan panjang pegas. Jika pegas ditekan ke kanan maka gaya pulih pegas mendorong ke kiri dan sebaliknya.

Besar konstanta pegas adalah nilai yang spesifik untuk setiap bahan. Tentu hal ini berkaitan erat dengan elastisitas bahan dan Modulus Young. Modulus Young dinamai setelah ilmuwan Inggris abad ke-19 Thomas Young; tetapi konsep ini dikembangkan pada 1727 oleh Leonhard Euler, dan eksperimen pertama yang menggunakan konsep modulus Young dalam bentuknya dilakukan oleh ilmuwan Italia Giordano Riccati pada 1782. Modulus Young adalah sifat mekanis yang mengukur kekakuan material padat. Ini mendefinisikan hubungan antara tegangan (gaya per satuan luas) dan regangan (deformasi proporsional) dalam suatu bahan dalam rezim elastisitas linier dari deformasi uniaksial. Jika modulus Young sebuah bahan adalah  $E$  dan luas penampangnya adalah  $A$ ,

$$\sigma = E\varepsilon \rightarrow \frac{F}{A} = E \frac{\Delta x}{L_0} \quad (2.2)$$

$$F = AE \frac{\Delta x}{L_0} \quad (2.3)$$

dimana

$E$  = modulus Young

$\sigma$  = sigma adalah tegangan uniaksial, atau gaya uniaksial per unit permukaan

$\varepsilon$  = regangan, (perubahan panjang dibagi dengan panjang awal) tidak berdimensi

Maka konstanta pegas bahan dapat ditentukan dengan persamaan.

$$k = \frac{AE}{L_0} \quad (2.4)$$

Berdasarkan persamaan ini jelas bahwa konstanta pegas dipengaruhi oleh panjang bahan mula-mula, luas penampang dan bahan pegas.

### Contoh Soal & Pembahasan

1. Pegas dengan konstanta sebesar 200 N/m diberi gaya sebesar 50 N. Tentukan pertambahan panjang pegas?

#### *Penyelesaian:*

Pertambahan panjang pegas menurut hukum Hooke adalah

$$\Delta x = F/k = 50/200 = 0,25 \text{ m}$$

2. Sebuah pegas bertambah panjang 5 cm = 0,05 m saat diberi gaya 100 N. Tentukan besar konstanta pegas?

#### *Penyelesaian:*

Konstanta pegas dapat dihitung dengan rumusan hukum Hooke:

$$k = F/\Delta x = 100/0,05 = 2.000 \text{ N/m} = 2 \text{ kN/m}$$

3. Sebuah batang baja berdiameter 4 mm, jika panjang awal 500 mm dan mengalami beban dengan pertambahan panjang dibatasi sebesar 2 mm, berapa gaya tarik F yang harus diberikan? Baja tersebut memiliki modulus elastisitas = 200 GPa

#### *Penyelesaian:*

Konstanta pegas dapat dihitung dengan rumusan

$$k = \frac{AE}{L_o}$$

$$k = \frac{\frac{1}{4}\pi D^2 E}{L_o} = \frac{\frac{1}{4}(3,14)(0,004)^2(200 \cdot 10^9)}{0,5} = 0,005 \cdot 10^9 \text{ N/m} = 5 \text{ MN/m}$$

$$F = k\Delta x = 5 \times 10^6 \times 0,002 = 10.000 \text{ N} = 10 \text{ kN}.$$



## 2.2. Susunan Pegas

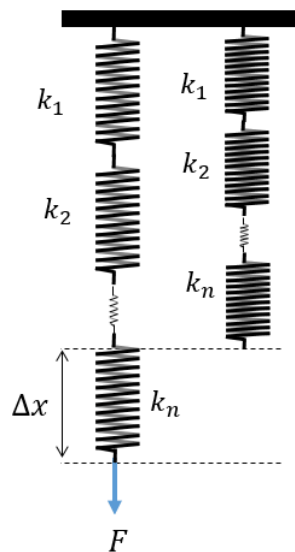
Pada dasarnya rangkaian pegas dapat dirangkai dalam bentuk rangkaian seri dan paralel. Pegas dirangkai dengan tujuan mendapatkan pegas pengganti dengan konstanta sesuai kebutuhan.

Pengertian rangkaian seri dan paralel adalah sebagai berikut;

- Rangkaian seri berfungsi menghasilkan rangkaian pegas dengan konstanta yang lebih kecil.
- Sedangkan pegas yang dirangkai paralel dapat menghasilkan pegas dengan konstanta yang lebih besar.

### 2.2.1. Rangkaian Pegas Seri

Tinjau sejumlah  $n$  pegas ringan dengan konstanta pegas masing-masing  $k_1, k_2, k_3 \dots k_n$  dirangkai secara seri seperti gambar berikut.



Gambar 2.2.n-pegas dengan rangkaian seri

Salah satu ujung rangkaian pegas ditahan kemudian ujung yang lain rangkaian pegas ditarik dengan gaya sebesar  $F$  sehingga rangkaian pegas bertambah panjang sebesar  $\Delta x$ . Pada rangkaian seperti ini maka gaya sebesar  $F$  bekerja pada masing-masing pegas dan besar  $\Delta x$  merupakan penjumlahan dari pertambahan panjang masing-masing pegas

$$\Delta x_{\text{total}} = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \dots + \Delta x_n \quad (2.5)$$

Menurut hukum Hooke,  $\Delta x = F/k$ , sehingga persamaan dapat dikembangkan untuk mendapatkan besar konstanta pegas pengganti rangkaian seri ( $k_s$ ).

$$\begin{aligned} \frac{F}{k_s} &= \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} + \frac{F}{k_3} + \dots + \frac{F}{k_n} \\ \frac{F}{k_s} &= F \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \dots + \frac{1}{k_n} \right) \\ \frac{1}{k_s} &= \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \dots + \frac{1}{k_n} \end{aligned}$$

besar konstanta pegas pengganti rangkaian Seri

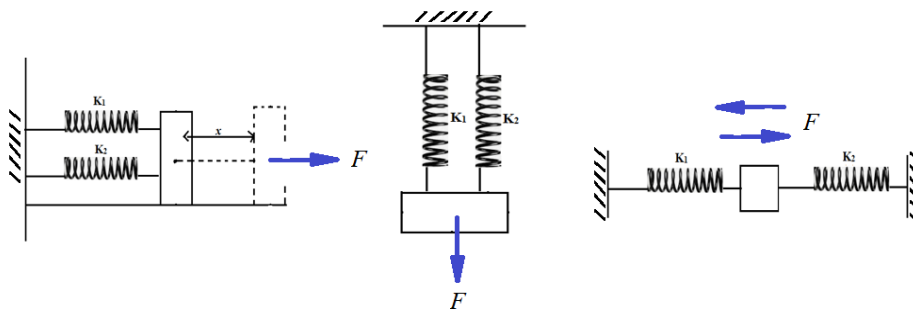
$$k_s = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \dots + \frac{1}{k_n} \right)^{-1} \quad (2.6)$$

Pegas Seri jika mengalami osilasi maka frekuensi ( $f$ ) dan periode ( $T$ )

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_s}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}} \quad (2.7)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_s}} = 2\pi \sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}} \quad (2.8)$$

### 2.2.2. Rangkaian Pegas Paralel



Gambar 2.3. n-pegas dengan rangkaian paralel

Tinjau sejumlah n-pegas ringan dengan konstanta pegas masing-masing konstanta pegas masing-masing  $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$  dirangkai secara paralel seperti contoh soal rangkaian paralel pada gambar berikut. Salah satu ujung rangkaian pegas ditahan kemudian ujung

yang lain rangkaian pegas ditarik dengan gaya sebesar  $F$  sehingga rangkaian pegas bertambah panjang sebesar  $\Delta x$ . Pada contoh soal rangkaian paralel seperti ini maka gaya sebesar  $F$  terbagi ke masing-masing pegas dan setiap pegas bertambah panjang dengan besar yang sama.

$$\begin{aligned}\Delta x &= \Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_n \\ F &= F_1 + F_2 + \dots + F_n \\ k_p \Delta x &= k_1 \Delta x_1 + k_2 \Delta x_2 + \dots + k_n \Delta x_n \\ k_p \Delta x &= \Delta x (k_1 + k_2 + \dots + k_n)\end{aligned}$$

Besar konstanta pegas pengganti rangkaian paralel

$$k_p = k_1 + k_2 + \dots + k_n \quad (2.9)$$

Pegas paralel jika mengalami osilasi maka frekuensi ( $f$ ) dan periode ( $T$ )

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_p}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

(2.10)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$$

(2.11)

Secara umum perbedaan persamaan pegas paralel dan seri adalah seperti tampak dalam Tabel 2.1.

Tabel 2.1. Perbedaan pegas seri dan parallel

Quantity	In Parallel	In Series
Equivalent spring constant is that	$k_{eq} = k_1 + k_2$	$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$
Equivalent compliance	$\frac{1}{c_{eq}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}$	$c_{eq} = c_1 + c_2$
Deflection (elongation)	$x_{eq} = x_1 = x_2$	$x_{eq} = x_1 + x_2$
Force	$F_{eq} = F_1 + F_2$	$F_{eq} = F_1 = F_2$
Stored energy	$E_{eq} = E_1 + E_2$	$E_{eq} = E_1 + E_2$

**Contoh Soal & Pembahasan**

1. Dua pegas dengan konstanta masing-masing 18 N/m dan 9 N/m. Hitung konstanta pegas pengganti jika kedua pegas disusun secara:

(a) seri

(b) paralel

**Penyelesaian:**

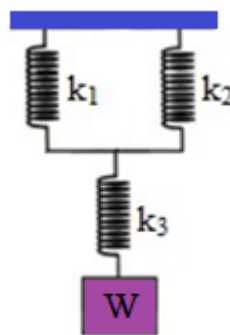
- a. Jika disusun secara seri maka

$$k_s = (k_1 \times k_2) / (k_1 + k_2) = (18 \times 9) / (18 + 9) = 162 / 27 = 6 \text{ N/cm}$$

- b. Jika disusun secara paralel maka

$$k_p = (k_1 + k_2) = 18 + 9 = 27 \text{ N/m}$$

2. Tiga pegas identik, masing-masing mempunyai konstanta elastisitas 200 N/m tersusun seri-paralel seperti pada gambar di bawah. Pada ujung bawah susunan pegas digantungi beban seberat  $w$  sehingga susunan pegas bertambah panjang 1 cm. Berat beban  $w$  adalah...

**Penyelesaian:**

Diketahui :

- Konstanta masing-masing pegas ( $k_1 = k_2 = k_3$ ) = 200 N/m
- Pertambahan panjang sistem pegas ( $x$ ) = 1 cm = 0,01 meter

Ditanya : berat beban ( $w$ )

**Jawab :**

Terlebih dahulu hitung **konstanta pegas** gabungan.

Pegas 1 dan pegas 2 tersusun secara paralel. Konstanta pegas penggantinya adalah:

$$k_p = k_1 + k_2 = 200 + 200 = 400 \text{ Newton/meter}$$



Pegas pengganti susunan paralel ( $k_p$ ) dan pegas 3 ( $k_3$ ) tersusun secara seri.

Konstanta pegas penggantinya adalah:

$$1/k = 1/k_p + 1/k_3 = 1/400 + 1/200 = 1/400 + 2/400 = 3/400$$

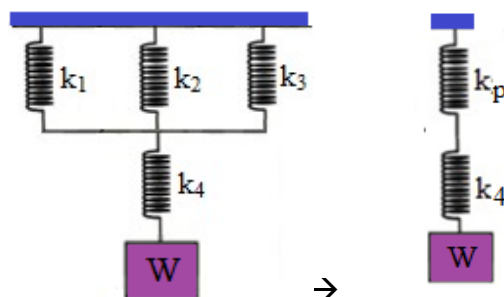
$$k = 400/3 \text{ Newton/meter}$$

$$F = w = k \Delta x$$

$$w = (400/3)(0,01) = 4/3 \text{ Newton}$$

Gaya berat beban adalah 4/3 Newton

3. Empat pegas identik mempunyai konstanta masing-masing sebesar 500 N/m, tersusun secara seri-paralel. Tentukan pertambahan panjang sistem pegas ketika diberi beban sebesar 20 Newton.



**Penyelesaian:**

Diketahui :

Konstanta masing-masing pegas ( $k_1 = k_2 = k_3 = k_4$ ) = 500 N/m

Gaya berat beban ( $F$ ) = 20 Newton

Ditanya : pertambahan panjang sistem pegas ( $x$ )

Jawab:

Terlebih dahulu hitung konstanta pegas gabungan.

Pegas 1, pegas 2 dan pegas 3 tersusun secara paralel. Konstanta pegas penggantinya adalah :

$$k_p = k_1 + k_2 + k_3 = 500 + 500 + 500 = 1500 \text{ Newton/meter}$$

Pegas pengganti susunan paralel ( $k_p$ ) dan pegas 4 ( $k_4$ ) tersusun secara seri. Konstanta pegas penggantinya adalah :

$$1/k = 1/k_p + 1/k_3 = 1/1500 + 1/500 = 1/1500 + 3/1500 = 4/1500$$

$$k = 1500/4 = 375 \text{ N/m}$$

Pertambahan panjang sistem pegas adalah :

$$x = F/k = w / k$$

$$x = 20 / 375$$

$$x = 0,05 \text{ meter}$$

$$x = 5 \text{ cm}$$

4. Empat pegas identik disusun seri-paralel seperti gambar di bawah. Ketika diberi beban sebesar 20 Newton, sistem pegas bertambah panjang 4 cm. Tentukan (a) konstanta gabungan sistem pegas yang tersusun seri-paralel (b) konstanta masing-masing pegas.

**Penyelesaian:**

Diketahui :

Gaya berat beban ( $w$ ) = 20 Newton

Pertambahan panjang sistem pegas ( $x$ ) = 4 cm = 0,04 meter

Jawab :

(a) **konstanta gabungan sistem pegas**

$$k = F / x = w / x$$

$$k = 20 / 0,04 = 500 \text{ Newton/meter}$$

**(b) konstanta masing-masing pegas**

Keempat pegas identik sehingga keempat pegas mempunyai konstanta yang sama. Jika pegas 1, pegas 2 dan pegas 3 diganti dengan sebuah pegas maka akan terdapat dua pegas, yakni pegas pengganti paralel ( $k_p$ ) dan pegas 4 ( $k_4$ ). Kedua pegas ini tersusun secara seri. Rumus untuk menentukan konstanta susunan seri adalah :

$$1/k = 1/k_p + 1/k_4$$

$$1/500 = 1/k_p + 1/k_4 \text{ --- persamaan 1}$$

$k_p$  adalah konstanta pegas pengganti untuk pegas 1, pegas 2 dan pegas 3 yang tersusun paralel. Karena ketiga pegas identik maka konstanta masing-masing pegas mempunyai besar yang sama dan dapat diwakili oleh huruf  $k$ .

$$k_p = k_1 + k_2 + k_3$$

$$k_p = k + k + k$$

$$k_p = 3k \text{ --- persamaan 2}$$

Gantikan  $k_p$  pada persamaan 1 dengan  $k_p$  pada persamaan 2. Gantikan juga  $k_4$  dengan  $k$

$$1/500 = 1/3k + 1/k$$

$$1/500 = 1/3k + 3/3k$$

$$1/500 = 4/3k$$

$$3k = (4)(500)$$

$$3k = 2000$$

$$k = 2000 / 3$$

$$k = 667 \text{ N/m (hasil pembulatan)}$$

Jadi konstanta masing-masing pegas adalah  $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 667 \text{ Newton/meter}$ .

## BAB III

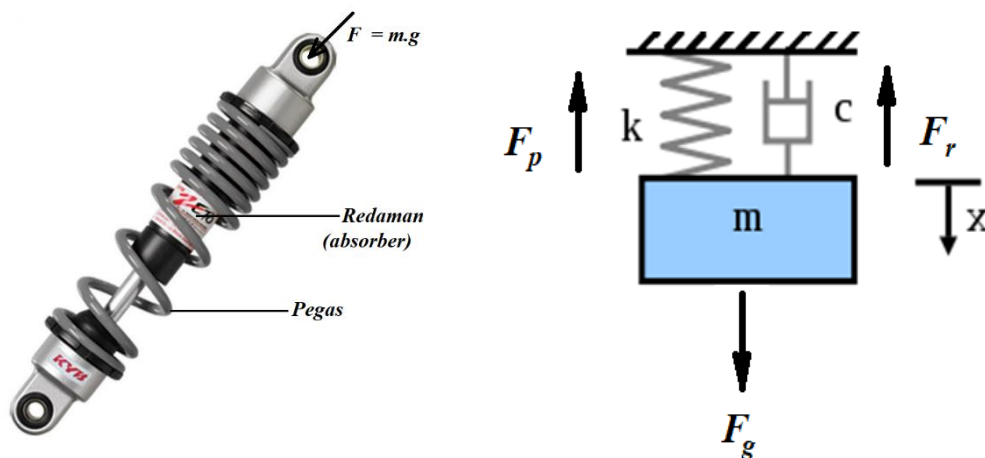
### GETARAN BEBAS TEREDAM

---

#### 3.1. Komponen Sistem Getaran

Pegas dalam mekanisa adalah sebuah perangkat yang dapat menyerap dan melepaskan energi bersama perubahan dalam bentuknya. Pegas dapat dibuat dalam berbagai jenis dan ukuran dari hampir semua bahan yang memiliki elastisitas (kemampuan untuk mendapatkan kembali bentuk dan ukuran setelah deformasi). Baja dan logam lainnya adalah bahan semi yang paling banyak digunakan sebagai pegas karena sifat elastisnya.

Elemen-elemen dari sistem getaran ditunjukkan sebagaimana Gambar 1. Masing-masing diidealisasikan sebagai massa ( $m$ ), pegas ( $k$ ), peredam ( $c$ ), dan eksitasi ( $F$ ). Tiga elemen pertama menunjukkan kondisi fisik dari sistem. Keadaan fisik suatu sistem dapat dinyatakan sebagai massa, pegas dan peredam yang tersusun misalnya seperti pada Gambar 1. Massa ( $m$ ) diasumsikan sebagai body kaku (rigid) yang tidak memiliki elastisitas dan redaman. Sebaliknya pegas juga dianggap hanya memiliki elastisitas ( $k$ ) saja sehingga massa dan redamannya diabaikan. Demikian halnya peredam juga dianggap hanya memiliki sifat redaman saja. Komponen sock-absorber adalah suatu sistem mekanisme getaran mekanis yang sangat lazim dikenal. Gambar 3.1 adalah gambar shock-absorber serta pemodelan matematika sistem getarannya



Gambar 3.1. Kontruksi shock-absorber dan pemodelan matematikanya



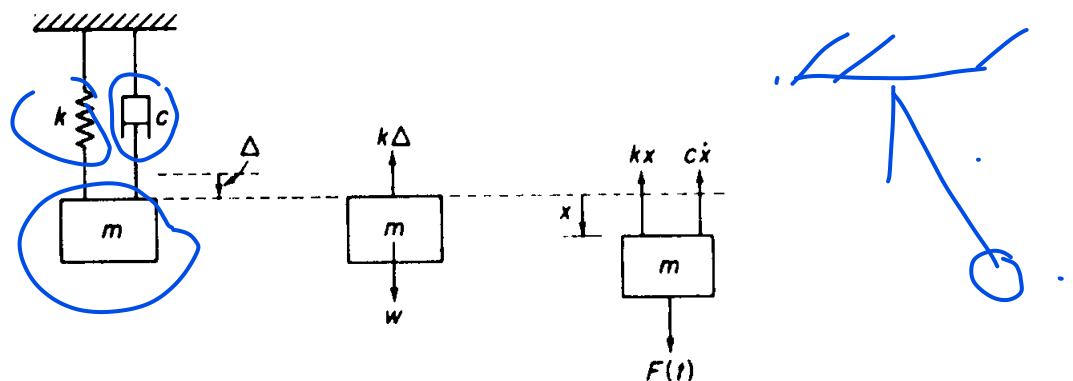
### 3.2. Klasifikasi

Getaran dapat diklasifikasikan menurut ada tidaknya eksitasi yang bekerja secara kontinyu, menurut derajat kebebasannya atau menurut sistem massanya. Menurut klasifikasi yang pertama getaran dibedakan sebagai getaran bebas atau getaran paksa. Disebut sebagai getaran paksa jika pada sistem getaran terdapat gaya eksitasi periodik yang bekerja kontinyu sebagai fungsi waktu. Pada sistem getaran bebas getaran terjadi karena adanya eksitasi sesaat seperti gaya impulsif atau adanya simpangan awal. Menurut derajat kebebasannya getaran dapat dibedakan sebagai getaran derajat satu, dua, atau  $n$  derajat sesuai dengan banyaknya koordinat bebas (independence) yang diperlukan untuk mendefinisikan persamaan gerak sistem tersebut. Pada sistem getaran massa diskret setiap massa dianggap sebagai bodi kaku dan tidak mempunyai elastisitas. Sebaliknya pada sistem massa kontinyu, massa yang bergetar tidak dianggap sebagai bodi kaku tetapi mempunyai elastisitas sehingga dimungkinkan adanya gerak relatif di antara titik-titik pada massa tersebut. Sistem massa kontinyu memiliki  $n$  derajat kebebasan yang tak berhingga. Ketiga model klasifikasi getaran tersebut adalah:

- (a) Sistem getaran bebas massa diskret dua derajat kebebasan
- (b) Sistem getaran paksa massa diskret satu derajat kebebasan
- (c) Sistem getaran paksa massa kontinyu

### 3.3. Analisa Getaran Bebas Tereadam

Gambar 3.2 adalah model matematika sistem getaran yang terdiri dari massa ( $m$ ), pegas dengan konstanta pegas  $k$ , serta damper dengan konstanta redaman  $c$ . Sedangkan  $F_g$  adalah gaya gravitasi.  $F_p$  adalah gaya pegas, dan  $F_r$  adalah gaya redaman



Gambar 3.2. Getaran Bebas dengan Peredam

Berdasarkan hukum kesetimbangan, jumlah gaya-gaya vertikal selalu dalam keadaan setimbang, maka

$$F_g(t) + F_r(t) + F_p(t) = F(t) \quad (3.1)$$

Jika  $F(t) = 0$ , persamaan diferensial homogen yang solusinya sesuai secara fisik dengan getaran bebas teredam dimana pengaruh gaya luar  $F(t)=0$ . Dengan  $F(t) = 0$ , diperoleh solusi khusus yang disebabkan oleh eksitasi homogen yang memberi pemahaman tentang peran redaman, dengan persamaan menjadi

$$F_g(t) + F_r(t) + F_p(t) = 0 \quad (3.2)$$

$F_g(t)$  adalah gaya gravitasi sebagai fungsi waktu, maka

$$F_g = m \cdot g \rightarrow g = \frac{d^2 x}{dt^2} \rightarrow F_g = m \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (3.3)$$

$F_r(t)$  adalah gaya redaman sebagai fungsi waktu, maka

$$F_r = CV \rightarrow V = \frac{dx}{dt} \rightarrow F_r = C \frac{dx}{dt} \quad (3.4)$$

$F_p(t)$  adalah gaya pegas sebagai fungsi waktu

$$F_p = k \cdot x \quad (3.5)$$

Jika sistem mendapat pengaruh gaya luar  $F(t)$ , maka persamaan umumnya menjadi

$$F_g + F_r + F_p = F(t)$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F(t) \quad (3.6)$$

Secara umum kontrusi pegas dengan redaman dengan massa tertentu tanpa ada pengaruh gaya luar dirumuskan sebagai persamaan Diferensial Linier Orde 2 Homogen

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (3.7)$$

Penyelesaian Pers. (3.7) diatas adalah seperti berikut:

$$\frac{dx}{dt} = \omega x \quad (3.8)$$

$$\frac{dx}{x} = \omega dt \quad (3.9)$$

Integralkan kedua ruas Pers. (3.9)

$$\ln x = \omega t \quad (3.10)$$

Sehingga  $x$  menjadi

$$x = e^{\omega t} \quad (3.11)$$

Dengan mensubstitusi Pers (3.11) ke Pers. (3.8), maka

$$\frac{dx}{dt} = \omega e^{\omega t} \quad (3.12)$$

Serta diferensial dari Pers (3.12) adalah

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 e^{\omega t} \quad (3.13)$$

Dengan mensubstitusi Pers (3.12) dan Pers. (3.13) ke Pers. (3.7), maka persamaan getaran bebas teredam menjadi

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + kx &= 0 \\ m \omega^2 e^{\omega t} + c \omega e^{\omega t} + k e^{\omega t} &= 0 \\ e^{\omega t} (m \omega^2 + c \omega + k) &= 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Penyelesaian dari Pers. (3.14) tersebut hanya tergantung dari persamaan kuadrat berikut:

$$m \omega^2 + c \omega + k = 0 \quad (3.15)$$

Dimana penyelesaian persamaan kuadrat tersebut adalah sebagai berikut

$$\omega_1, \omega_2 = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2m} \sqrt{c^2 - 4mk} \quad (3.16)$$

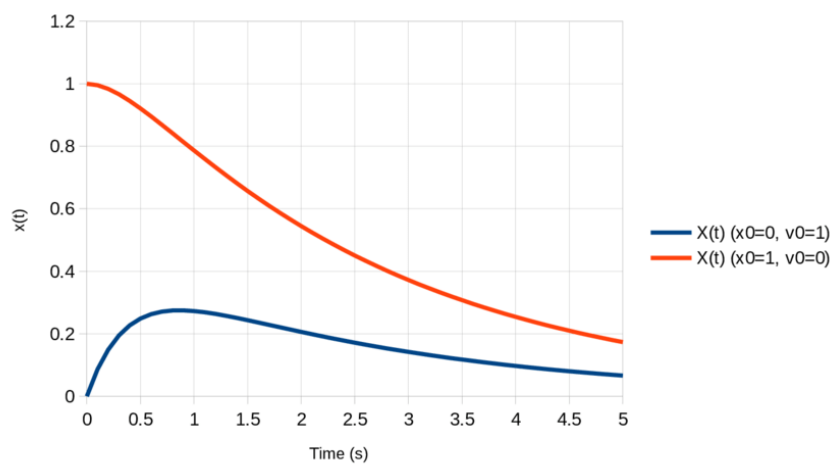
Solusi persamaan kuadrat tergantung dari  $\sqrt{c^2 - 4mk}$

1. Jika  $c^2 - 4mk > 0 \rightarrow c^2 > 4mk \rightarrow$  maka persamaan kuadrat tersebut memiliki dua penyelesaian bilangan real  $\omega_1$  dan  $\omega_2$  dimana  $\omega_1 \neq \omega_2$

$$\omega_1, \omega_2 = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2m} \sqrt{c^2 - 4mk}$$

$$x(t) = A_1 e^{\omega_1 t} + A_2 e^{\omega_2 t} \quad (3.17)$$

Bentuk solusi persamaan disebut **Over-Damped**



Gambar 3.3. Getaran bebas *Over-Damped*

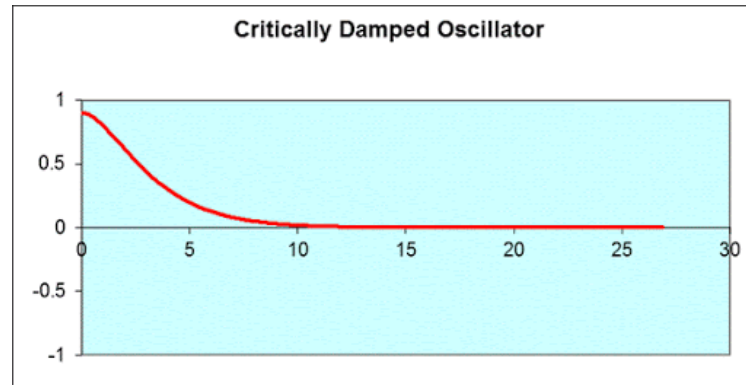
2. Jika  $c^2 - 4mk = 0 \rightarrow c^2 = 4mk$  maka persamaan kuadrat tersebut memiliki satu penyelesaian bilangan real atau  $\omega_1 = \omega_2$

$$\omega_1, \omega_2 = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2m} \sqrt{c^2 - 4mk}$$

$$\omega_1 = \omega_2 = -\frac{c}{2m} \pm 0$$

$$x(t) = (A_1 + A_2 t) e^{\omega t} \quad (3.18)$$

Bentuk solusi persamaan disebut **Critical-Damped**

Gambar 3.4. Getaran bebas *Critical Damped*

3. Jika  $c^2 - 4mk < 0 \rightarrow c^2 < 4mk$ , maka persamaan kuadrat tersebut memiliki dua penyelesaian bilangan kompleks. Hasilnya  $\omega_1$  dan  $\omega_2$  bilangan kompleks (bilangan nyata dan bilangan imajiner).

Hasil bilangan nyata:  $-\frac{c}{2m}$

Hasil bilangan imajiner:  $\sqrt{(c^2 - 4mk)} = \sqrt{-1}\sqrt{-(c^2 - 4mk)}$

$$= \sqrt{-(c^2 - 4mk)} (i), \quad z = \frac{\sqrt{-(c^2 - 4mk)}}{2m}$$

$$\omega_1, \omega_2 = -\frac{c}{2m} \pm zi$$

$$x(t) = e^{\left(-\frac{c}{2m} \pm zi\right)t}$$

$$x(t) = e^{\left(-\frac{c}{2m} + zi\right)t} + e^{\left(-\frac{c}{2m} - zi\right)t}$$

$$x(t) = e^{-\frac{c}{2m}t} \cdot (e^{(+zi)t} + e^{(-zi)t})$$

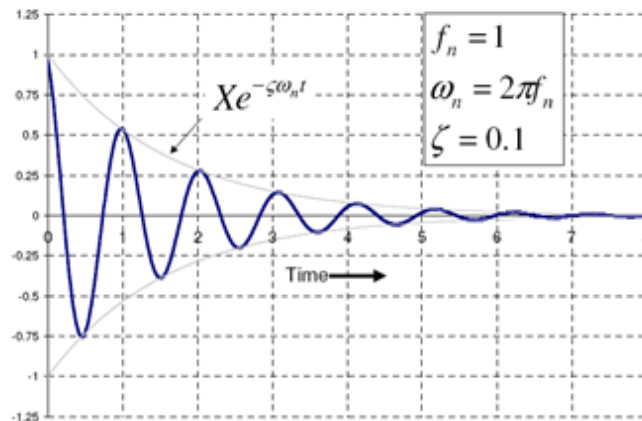
$$e^{\pm zi} = (\cos \omega t + \sin \omega t)$$

$$x(t) = e^{-\frac{c}{2m}t} (A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t) \quad (3.19)$$

Atau

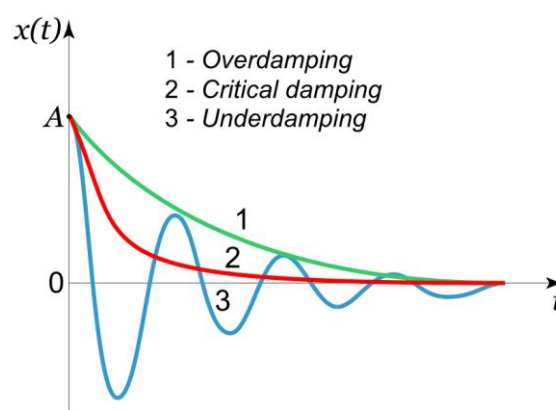
$$x(t) = A e^{-\frac{c}{2m}t} (\cos \omega t + \theta) \quad (3.20)$$

Bentuk solusi persamaan disebut *Under-Damped*



Gambar 3.5. Getaran bebas *Under-Damped*

Perbedaan masing-masing sistem sangat tergantung dari konstanta pegas ( $k$ ) dan konstanta redaman ( $c$ ). Pengaruh tersebut memberikan getaran dengan fungsi amplitudo ( $x$ ) sebagai fungsi waktu ( $t$ ) yang berbeda, perbedaan tersebut dapat dilihat pada gambar di bawah ini



Gambar 3.6. Getaran *over*, *critical*, dan *under damping*

Solusi persamaan ini tergantung pada besarnya redaman. Bila redaman cukup kecil, sistem masih akan bergetar, namun pada akhirnya akan berhenti. Keadaan ini disebut kurang redam, dan merupakan kasus yang paling mendapatkan perhatian dalam analisis vibrasi. Bila peredaman diperbesar sehingga mencapai titik saat sistem tidak lagi beresilasi, kita mencapai titik redaman kritis. Bila peredaman ditambahkan melewati titik kritis ini sistem disebut dalam keadaan lewat redam. Nilai koefisien redaman yang diperlukan untuk mencapai titik **redaman kritis** pada model massa-pegas-peredam adalah:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{(c_c^2 - 4mk)} &= 0 \\
 (c_c^2 - 4mk) &= 0 \\
 c_c^2 &= 4mk \\
 c_c &= \sqrt{4mk} \\
 c_c &= 2\sqrt{mk}
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Untuk mengkarakterisasi jumlah peredaman dalam sistem digunakan nisbah yang dinamakan nisbah redaman. Nisbah ini adalah perbandingan antara peredaman sebenarnya terhadap jumlah peredaman yang diperlukan untuk mencapai titik redaman kritis. Rumus untuk nisbah redaman ( $\zeta$ ) (zeta) adalah :

$$\begin{aligned}
 \zeta &= \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \\
 \zeta &= \frac{c}{2\sqrt{mk}}
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Sebagai contoh struktur logam akan memiliki nisbah redaman lebih kecil dari 0,05 sedangkan suspensi otomotif akan berada pada selang  $\zeta = 0,2 - 0,3$ . Solusi sistem kurang redam pada model massa-pegas-peredam adalah:

$$x(t) = X e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t - \phi), \quad \omega_n = 2\pi f_n \tag{3.23}$$

- Nilai X, amplitudo awal dan insutatan fase, ditentukan oleh panjang regangan pegas. Dari solusi tersebut perlu diperhatikan dua hal: faktor eksponensial dan fungsi cosinus.
- Faktor eksponensial menentukan seberapa cepat sistem teredam: semakin besar nisbah redaman, semakin cepat sistem teredam ke titik nol.

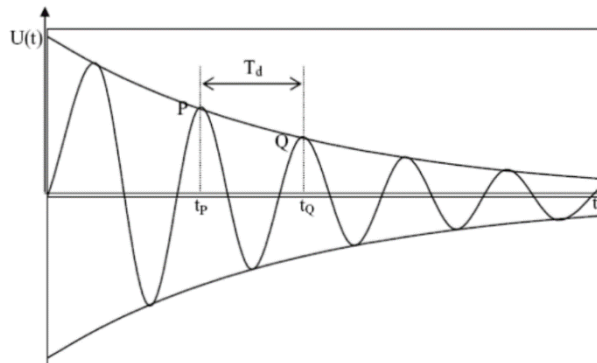
- Fungsi kosinus melambangkan osilasi sistem, namun frekuensi osilasi berbeda daripada kasus tidak teredam.
- Frekuensi dalam hal ini disebut "frekuensi alamiah teredam",  $f_d$ , dan terhubung dengan frekuensi alamiah tak-teredam dengan persamaan berikut.

$$f_d = \sqrt{1 - \zeta^2} f_n \quad (3.34)$$

- Frekuensi alamiah teredam lebih kecil daripada frekuensi alamiah tak-teredam, namun untuk banyak kasus praktis nisbah redaman relatif kecil, dan karenanya perbedaan tersebut dapat diabaikan. Karena itu deskripsi teredam dan takteredam kerap kali tidak disebutkan ketika menyatakan frekuensi alamiah.

### 3.4. Pengurangan Logaritmik

Secara mudah untuk menentukan jumlah yang ada dalam sistem adalah dengan mengukur laju peluruhan osilasi bebas. Makin besar redamannya, makin besar pula laju peluruhannya.



Gambar 3.7. Grafik pengurangan logaritmik

Pengurangan logaritmik didefinisikan sebagai logaritma natural dari rasio dua amplitudo berurutan. Jadi rumusan pengurangan logaritmik adalah

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2}$$

$$x = x e^{(-\zeta \omega_n \pm i \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n) t}$$

$$x = A e^{(-\zeta \omega_n + i \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n) t} + B e^{(-\zeta \omega_n - i \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n) t}$$

$$x = x e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t + \theta)$$

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2}$$

$$\delta = \ln \frac{x e^{-\zeta \omega_n t_1} \sin(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t_1 + \theta)}{x e^{-\zeta \omega_n (t_1 + t_d)} \sin(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n (t_1 + t_d) + \theta)}$$



$$\delta = \ln \frac{e^{-\zeta \omega_n t_1}}{e^{-\zeta \omega_n (t_1 + t_d)}}$$

$$\delta = \ln e^{\zeta \omega_n t_d}$$

$$\delta = \zeta \omega_n t_d$$

$$\delta \cong 2\pi\zeta$$

**Contoh soal**

1. Konstruksi pegas dan redaman dibebani benda berat 10 kg. factor kontanta pegas = 90 N/m dan factor konstanta redaman = 100 Ndt/m. Jika diberi simpangan awal (dengan Tarik) = 15 cm = 0,15 m dan kecepatan balik  $v = 10$  m/dt, tentukan persamaannya

**Penyelesaian:**

$$m = 10 \text{ kg}$$

$$k = 90 \text{ N/m}$$

$$c = 100 \text{ Ndt/m}$$

$$m\omega^2 + c\omega + k = 0$$

$$10\omega^2 + 100\omega + 90 = 0$$

$$\omega_1 \text{ dan } \omega_2 = -\frac{100}{2(10)} \pm \frac{1}{2(10)} \sqrt{100^2 - 4(10)(90)}$$

$$\omega_1 \text{ dan } \omega_2 = -5 \pm \frac{1}{20} \sqrt{10.000 - 3.600}$$

$$= -5 \pm \frac{1}{20} \sqrt{10.000 - 3.6000}$$

$$= -5 \pm \frac{1}{20} \sqrt{6400} = -5 \pm \frac{80}{20}$$

$$= -5 \pm 4$$

$$\omega_1 = -5 + 4 = -1, \quad \omega_1 = -1$$

$$\omega_2 = -5 - 4 = -9, \quad \omega_2 = -9$$

$$x(t) = A_1 e^{\omega_1 t} + A_2 e^{\omega_2 t}$$

Hasil penyelesaian persamaan umum tersebut:

$$x(t) = A_1 e^{-1t} + A_2 e^{-9t}$$

Syarat batas untuk menentukan persamaan khususnya

$A_1$  = simpangan awal, menunjukkan amplitudo  $x = 15 \text{ cm}$  pada  $t = 0$

$$x = 15 \text{ cm}$$

$$x = 0,15 \text{ m}$$

$$0,15 = A_1 e^{-1(0)} + A_2 e^{-9(0)}$$

$$0,15 = A_1(1) + A_2(1)$$

$$A_1 + A_2 = 0,15$$

Syarat batas kedua kecepatan awal  $v = 10 \text{ m/dt}$ , fungsi kecepatan merupakan  $v = \frac{dx}{dt}$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d(A_1 e^{-1t} + A_2 e^{-9t})}{dt} = -A_1 e^{-1t} - 9A_2 e^{-9t}$$

$$-A_1 e^{-1t} - 9A_2 e^{-9t} = 10$$

Kecepatan awal  $v = 10 \text{ m/dt}$ , beban dilepas menunjukkan limit  $t$  mendekati nol  $\rightarrow t \cong 0$

$$-A_1 e^{-1(0)} - 9A_2 e^{-9(0)} = 10$$

$$-A_1(1) - 9A_2(1) = 10$$

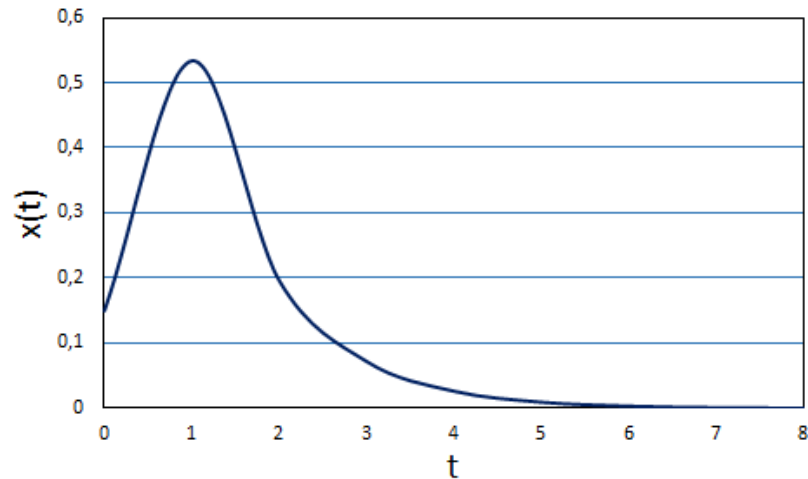
$$-A_1 - 9A_2 = 10 \quad \text{persamaan lain di atas} \quad A_1 + A_2 = 0,15$$

$$A_1 + A_2 = 0,15 \rightarrow A_1 = 0,15 - A_2$$

$$-(0,15 - A_2) - 9A_2 = 10 \rightarrow -0,15 - 8A_2 = 10 \rightarrow A_2 = -1,3 \text{ m}$$

$$A_1 + (-1,3) = 0,15 \rightarrow A_1 = 1,45 \text{ m}$$

Penyelesaian akhir adalah:  $x(t) = 1,45 e^{-1t} - 1,3 e^{-9t}$



2. Dengan konstruksi yang sama dengan Soal 1, dengan nilai konstruksi redaman di ganti  $c = 8 \text{ N dt/m}$ ,  $k = 90 \text{ N/m}$

**Penyelesaian:**

$$m \omega^2 + c \omega + k = 0$$

$$10 \omega^2 + 8 \omega + 90 = 0$$

$$\omega_1, \omega_2 = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2m} \sqrt{c^2 - 4mk}$$

$$\omega_1, \omega_2 = -\frac{8}{2(10)} \pm \frac{1}{2(10)} \sqrt{64 - 3.600}$$

$$\omega_1, \omega_2 = -\frac{8}{2(10)} \pm \frac{1}{2(10)} \sqrt{-3536}$$

$$\omega_1, \omega_2 = -0,4 \pm \frac{59,46}{20} \sqrt{-1}$$

$$\omega_1, \omega_2 = -0,4 \pm 2,973 \sqrt{-1}$$

Pembulatan desimal  $\rightarrow \omega_1, \omega_2 = -0,4 \pm 3 \sqrt{-1}$

$$\omega_1, \omega_2 = -0,4 \pm 3i$$

Penyelesaian untuk hasil akar-akar bilangan komplek.

$$x(t) = A e^{-\frac{c}{2m}t} \left( \cos \left( \frac{1}{2m} \sqrt{-(c^2 + 4mk)} \right) t \right)$$

$$x(t) = A e^{-0,4t} (\cos 3 t)$$

Simpangan  $x = 0,15$  m pada saat  $\rightarrow t = 0$

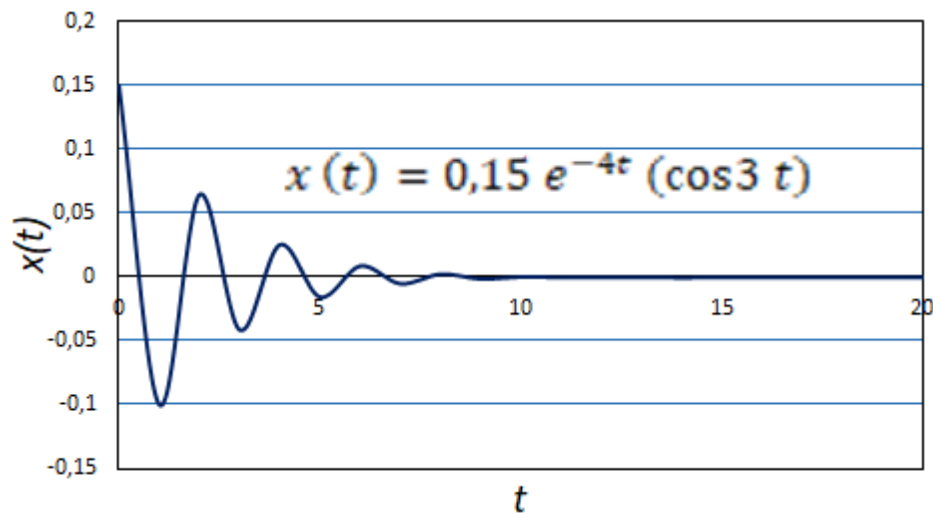
$$x(0) = A e^{-0,4(0)} (\cos 3(0))$$

$$0,15 = A(1) \rightarrow A = 0,15 \text{ m}$$

Penyelesaian akhir berupa Persamaan tersebut adalah:

$$x(t) = 0,15 e^{-0,4t} (\cos 3t)$$

Dengan bentuk persamaan grafik merupakan getaran teredam (*Under-Damped*)



## BAB IV

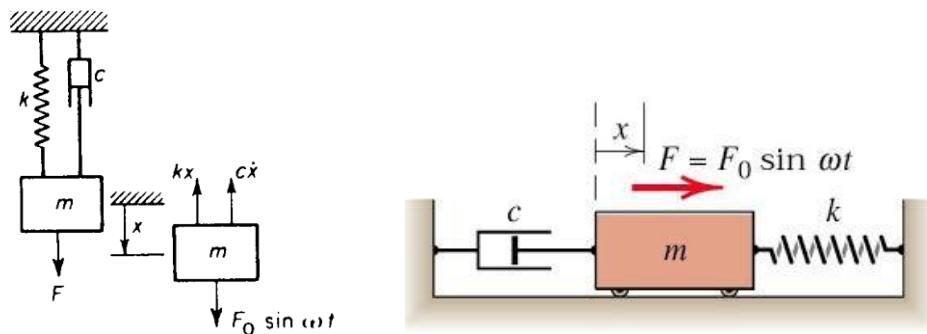
### GETARAN PAKSA

---

#### 4.1. Getaran Paksa Harmonik

Eksitasi harmonik sering dijumpai dalam sistem teknik. Eksitasi harmonik umumnya diproduksi oleh ketidakseimbangan dalam mesin berputar. Meskipun eksitasi harmonik murni lebih kecil kemungkinannya terjadi daripada eksitasi periodik atau jenis eksitasi lainnya, memahami perilaku suatu sistem yang mengalami eksitasi harmonik sangat penting untuk memahami bagaimana sistem merespons eksitasi yang lebih umum. Eksitasi harmonik mungkin dalam bentuk gaya atau perpindahan beberapa titik dalam sistem.

Pertama-tama kita akan mempertimbangkan sistem derajat kebebasan (*degree of freedom/DOF*) tunggal dengan redaman *viscous*, tereksitasi oleh gaya harmonik  $F_0 \sin \omega t$ , seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.1.



Gambar 4.1. Sistem yang diredam secara paksa dengan eksitasi harmonik

Persamaan diferensial geraknya ditemukan dari diagram benda bebas, dalam bentuk

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t \quad (4.1)$$

atau

$$F_g(t) + F_r(t) + F_p(t) = F(t)$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \sin \omega t \quad (4.2)$$

Getaran paksa adalah getaran yang terjadi karena adanya gaya luar yang bekerja pada suatu sistem sehingga sistem tersebut bergetar. Bila gaya luar, biasanya  $f(t) = f_0 \sin \omega_n t$

atau  $f(t) = f_c \cos \omega_n t$  bekerja pada sistem getaran paksa. Sistem cenderung bergetar pada frekuensi sendiri di samping mengikuti gaya eksitasi. Dengan adanya gesekan bagian gerakan yang ditahan oleh gaya sinusoidal secara perlahan hilang. Dengan demikian, sistem akan bergetar pada frekuensi pribadi sistem. Bagian getaran yang berlanjut terus disebut getaran keadaan steady atau respon sistem keadaan steady dibutuhkan dalam analisa getaran karena efek sinambungannya.

$$X_p = \frac{F_c \sin(\omega_n t - \theta)}{((k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2)^{1/2}} \quad (4.3)$$

Sedang sudut fasanya adalah:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \quad (4.4)$$

Dimana:

$X_p$  = Amplitudo getaran

$F_c$  = Besar gaya eksitasi

$m$  = Massa sistem

$c$  = Koefisien peredam

$\omega$  = Frekuensi gaya eksitas

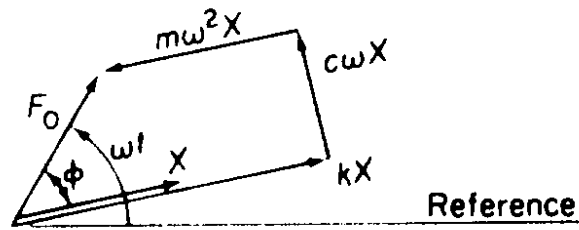
Solusi untuk persamaan ini terdiri dari dua bagian, fungsi pelengkap, yang merupakan solusi dari persamaan homogen, dan integral tertentu. Fungsi pelengkap. dalam hal ini, adalah getaran bebas teredam.

Solusi khusus untuk persamaan sebelumnya adalah osilasi kondisi-mapan dari frekuensi yang sama dengan eksitasi. Kita dapat menganggap solusi tertentu berbentuk:

$$x = X \sin(\omega t - \phi) \quad (4.5)$$

dimana  $X$  adalah amplitudo osilasi dan  $\phi$  adalah fase perpindahan sehubungan dengan gaya. Amplitudo dan fase dalam persamaan sebelumnya ditemukan dengan mengganti persamaan (4.3) ke dalam persamaan diferensial (4.2). Mengingat bahwa dalam gerak harmonik, fase kecepatan dan akselerasi berada di depan perpindahan masing-masing

sebesar  $90^\circ$  dan  $180^\circ$ , syarat-syarat persamaan diferensial juga dapat ditampilkan secara grafis seperti pada Gambar 4.2.



Gambar 4.2. Hubungan vektor untuk getaran paksa teredam

Sangat mudah dilihat dari diagram pada Gambar 4.2,

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \quad (4.5)$$

dan

$$\phi = \tan^{-1} \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \quad (4.6)$$

Kami sekarang menyatakan Persamaan (4.5) dan (4,6) dalam istilah non-dimensi yang memungkinkan presentasi grafis singkat dari hasil ini. Membagi pembilang dan penyebut Persamaan. (4.5) dan (4,6), maka diperoleh:

$$X = \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{\left(1 - \frac{m\omega^2}{k}\right)^2 + \left(\frac{c\omega}{k}\right)^2}} \quad (4.7)$$

dan

$$\tan \phi = \frac{\frac{c\omega}{k}}{1 - \frac{m\omega^2}{k}} \quad (4.8)$$

Persamaan ini dapat diekspresikan lebih lanjut sebagai berikut:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ frekuensi naturan/alami gerak osilasi tanpa redaman}$$

$$c_c = 2m \omega_n = \text{critical damping}$$

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \text{damping factor}$$

$$\frac{c \omega}{k} = \frac{c}{c_c} \frac{c_c \omega}{k} = 2 \zeta \frac{\omega}{\omega_n}$$

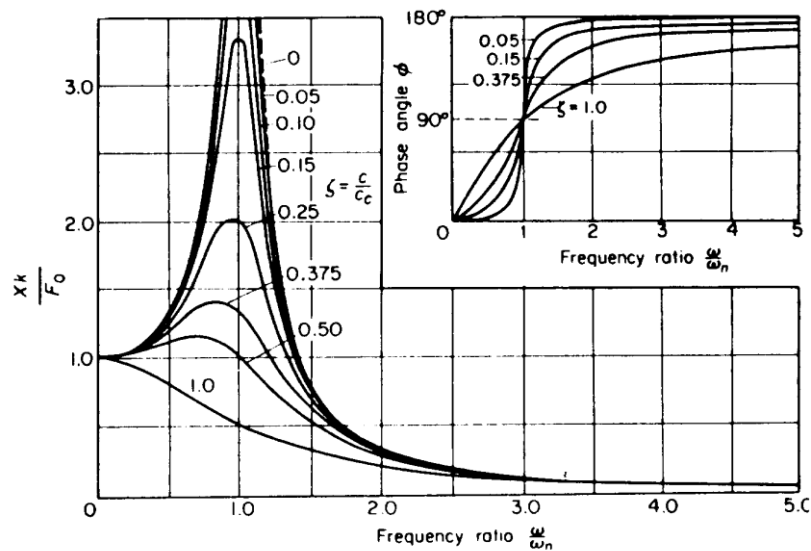
Ekspresi non-dimensi untuk amplitudo dan fase kemudian menjadi

$$\frac{Xk}{F_o} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2 \zeta \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}} \quad (4.9)$$

dan

$$\tan \phi = \frac{2 \zeta \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (4.10)$$

Persamaan ini menunjukkan bahwa amplitudo non dimensi,  $Xk/F_o$  dan fase  $\phi$  hanya sebagai fungsi dari rasio frekuensi  $\omega/\omega_n$  dan faktor redaman  $\zeta$ , serta dapat diplot seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.3.

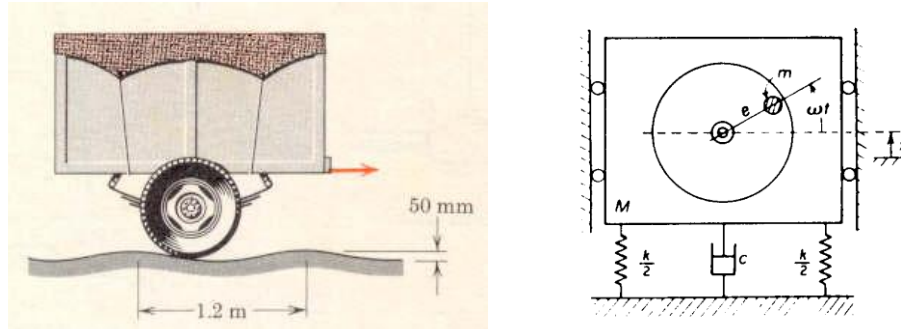


Gambar 4.3 bentuk ekspresi dari Pers. (4.9) dan Pers. (4.10)



#### 4.2. Putaran Ketidakseimbangan

Ketidakseimbangan dalam mesin berputar adalah sumber umum dari eksitasi getaran. Sistem massa pegas dibatasi untuk bergerak ke arah vertikal pada mesin berputar yang tidak seimbang, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.4.



Gambar 4.4. Kekuatan eksitasi harmonik akibat berputar ketidakseimbangan

Ketidakseimbangan diwakili oleh massa eksentrik dengan eksentrisitas  $e$  yang berputar dengan kecepatan sudut  $\omega$ . Dengan membiarkan  $x$  menjadi perpindahan massa yang tidak berputar ( $M - m$ ) dari posisi kesetimbangan statis, perpindahan  $m$  adalah:

$$x + e \sin \omega t \quad (4.11)$$

Persamaan gerak akibat kekuatan gangguan harmonik karena mesin berputar ketidakseimbangan adalah:

$$(M - m) \frac{d^2 x}{dt^2} + m \frac{d(x + e \sin \omega t)}{dt} = -kx - cx \quad (4.12)$$

dan dapat dituliskan ulang menjadi:

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = me \omega^2 \sin \omega t \quad (4.13)$$

Dimana  $F_0$  digantikan oleh  $me\omega^2$ , dan karenanya solusi kondisi-mapan dari bagian sebelumnya dapat digantikan oleh:

$$X = \frac{me \omega^2}{\sqrt{(k - m \omega^2)^2 + (c \omega)^2}} \quad (4.14)$$

Dan

$$\tan \phi = \frac{c \omega}{k - M \omega^2} \quad (4.15)$$

Jika direduksi lebih lanjut menjadi bentuk non dimensional:

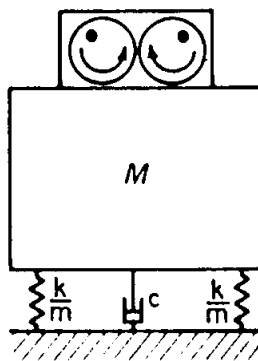
$$\frac{M}{m} \frac{X}{e} = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}} \quad (4.16)$$

dan

$$\tan \phi = \frac{2\zeta \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (4.17)$$

**Contoh soal:**

1. Sebuah exciter berat eksentrik berputar digunakan untuk menghasilkan osilasi paksa dari massa yang didukung pegas seperti yang ditunjukkan pada Gambar 5. Dengan memvariasikan kecepatan rotasi, amplitudo resonansi 0,60 cm. Ketika kecepatan rotasi meningkat jauh di luar frekuensi resonansi, amplitudo tampak mendekati nilai tetap 0,08 cm. Tentukan faktor redaman sistem.



**Penyelesaian:**

Amplitudo resonan adalah:

$$X = \frac{me}{2\zeta} = 0.60 \text{ cm}$$

Ketika  $\omega$  jauh lebih besar daripada,  $\omega_n$  persamaan yang sama menjadi

$$X = \frac{me}{M} = 0.08 \text{ cm}$$

Dengan menyelesaikan dua persamaan secara bersamaan, faktor redaman sistem adalah

$$\zeta = \frac{0.08}{2 \times 0.60} = \underline{\underline{0.0666}}$$

1. Sebuah sistem bergetar terdiri dari berat  $W = 44.5 \text{ N}$  dan pegas kekakuan  $k = 3504 \text{ N/m}$ , dipengaruhi redaman liat (viscous damped) sehingga dua amplitudo puncak secara berurutan adalah 1.00 sampai 0.85. Hitunglah:

- Frekuensi natural dari sistem tak teredam
- Pengurangan logaritmik (logarithmic decrement)
- rasio redaman (damping ratio)
- koefisien redaman
- frekuensi natural teredam

**Penyelesaian:**

(a). Frekuensi natural dari sistem tak teredam dalam radian per detik adalah :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{W/g}} = \sqrt{\frac{3504}{(44.5/9.81)}} = 27.79 \text{ rad/s}$$

Atau dalam putaran per detik

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{27.79}{2\pi} = 4.42 \text{ sps}$$

(b). Pengurangan logaritmik (logarithmic decrement)

$$\delta = \ln \frac{y_1}{y_2} = \ln \frac{1.00}{0.85} = 0.163$$

(c). rasio redaman (damping ratio)

$$\xi \approx \frac{\delta}{2\pi} = \frac{0.163}{2\pi} = 0.026$$

(d). koefisien redaman

$$c = \xi c_{cr} = 0.026 \left( 2 \times \sqrt{3504 \times (44.5/9.81)} \right) = 6.55 \text{ N s/m}$$

(e). frekuensi natural teredam

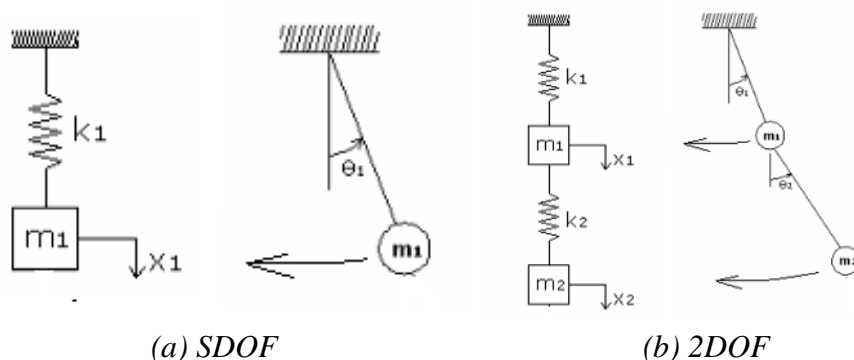
$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2} = 27.79 \sqrt{1 - (0.026)^2} = 27.78 \text{ rad / s}$$

## BAB V.

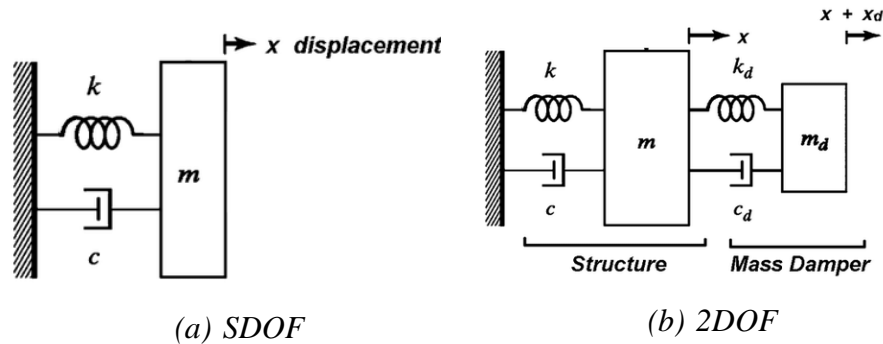
## GETARAN MEKANIS DUA DERAJAT KEBEBASAN

Sejauh ini, teori getaran sistem derajat kebebasan tunggal (*single degree of freedom/SDOF*) yang teredam dan tidak teredam telah dijelaskan secara detail pada Bab sebelumnya. Baik gerak bebas dan gerak paksa dari sistem tersebut telah dibahas dan diperoleh persamaan diferensial yang mengatur dan memberikan solusinya. Konsep dan definisi yang mendasar dalam memahami getaran sistem kebebasan tunggal telah diperkenalkan. Bab ini bertujuan untuk mengeneralisasi perkembangan analitis yang disajikan dalam bab-bab sebelumnya pada kasus di mana sistem memiliki lebih dari satu derajat kebebasan. Dalam Bab ini dipelajari getaran bebas dan paksa dari kedua sistem kebebasan yang teredam dan tidak teredam.

Suatu sistem dikatakan sebagai sistem kebebasan dua derajat (*two degrees of freedom/2DOF*) jika hanya memiliki dua koordinat independen/tidak tergantung yang diperlukan untuk mendefinisikan konfigurasi sistem secara utuh. Hal ini berbeda dengan SDOF dimana sistem hanya memerlukan satu koordinat independen. Perbedaan antara SDOF dengan 2DOF tampak seperti pada Gambar 5.1 dan Gambar 5.2. Namun, penting untuk ditegaskan bahwa rangkaian derajat kebebasan sistem tidak unik. Dua koordinat dapat dianggap sebagai derajat kebebasan selama itu independen.



Gambar 5.1. Sistem getaran tidak teredam/undamped dengan (a) SDOF dan (b) 2DOF



Gambar 5.2. Sistem getaran teredam/damped dengan (a) SDOF dan (b) 2DOF

Sistem dua derajat kebebasan adalah sistem yang membutuhkan dua koordinat untuk menggambarkan sepenuhnya persamaan geraknya. Koordinat ini disebut koordinat umum ketika beberapa variabel independen satu sama lain. Dengan demikian sistem dengan dua derajat kebebasan akan memiliki dua persamaan gerak dan karenanya memiliki dua frekuensi. Sistem kebebasan dua derajat berbeda dari sistem kebebasan tunggal, karena sistem ini memiliki dua frekuensi alami dan untuk masing-masing frekuensi alami ini terdapat keadaan alami getaran dengan konfigurasi perpindahan yang dikenal sebagai Normal Mode. Istilah matematika terkait dengan jumlah ini dikenal sebagai nilai Eigen dan vektor Eigen. Ini didirikan dari dua persamaan gerak sistem secara simultan dan memiliki sifat dinamis tertentu yang terkait.

Suatu sistem yang memiliki dua derajat kebebasan adalah penting sejauh mereka memperkenalkan fenomena kopling di mana gerak salah satu dari dua koordinat independen juga tergantung pada gerakan koordinat lainnya melalui pegas kopling dan damper. Getaran bebas dua derajat sistem kebebasan pada titik mana pun adalah kombinasi dari dua harmonik dari dua frekuensi alami ini. Dalam kondisi tertentu, selama getaran bebas setiap titik dalam suatu sistem dapat melakukan getaran harmonik pada salah satu dari dua frekuensi alami dan amplitudo terkait dalam cara tertentu dan konfigurasi dikenal sebagai normal mode atau mode principal dari getaran. Dengan demikian sistem dengan dua derajat kebebasan memiliki dua mode getaran normal yang sesuai dengan dua frekuensi alami.

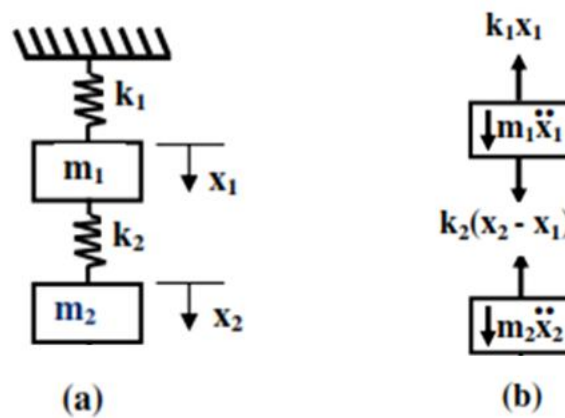
#### Getaran mekanis sistem tidak teredam dengan dua derajat kebebasan (2DOF):

Pertimbangkan sistem yang tidak teredam dengan dua derajat kebebasan seperti yang ditunjukkan pada Gambar 5.3a, dimana massa dibatasi untuk bergerak ke arah sumbu

pegas dan menjalankan getaran bebas. Perpindahan diukur dari posisi pegas yang tidak diregangkan. Masing  $x_1$  dan  $x_2$  merupakan perpanjangan dari  $m_1$  dan  $m_2$ , pada waktu tertentu yang diukur dari posisi kesetimbangan dengan  $x_2 > x_1$ . Kemudian gaya pegas yang bekerja pada massa adalah seperti yang ditunjukkan secara free body diagram pada Gambar 5.3b.

### Getaran tak teredam dengan 2DOF (Kasus 1)

Gambar 5.3 menunjukkan sistem getaran bebas tanpa redaman dengan dua derajat kebebasan sistem terdiri dari 2 pegas, 2 massa dan 1 tumpuan



Gambar 5.3. Sistem tidak teredam satu tumpuan dengan dua derajat kebebasan

Didasarkan pada persamaan Newton II tentang gerak:

$$\sum F = mg = m \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (5.1)$$

Untuk massa 1 bentuk persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} m_1 \left[ \frac{d^2 x}{dt^2} \right]_1 &= -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) \\ m_1 \left[ \frac{d^2 x}{dt^2} \right]_1 &= -k_1 x_1 + k_2 x_2 - k_2 x_1 \\ m_1 \left[ \frac{d^2 x}{dt^2} \right]_1 + k_1 x_1 + k_2 x_1 &= k_2 x_2 \\ m_1 \left[ \frac{d^2 x}{dt^2} \right]_1 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Untuk massa 2 bentuk persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}m_2 \left[ \frac{d^2 x}{dt^2} \right]_2 &= -k_2 (x_2 - x_1) \\m_2 \left[ \frac{d^2 x}{dt^2} \right]_2 &= -k_2 x_2 + k_2 x_1 \\m_2 \left[ \frac{d^2 x}{dt^2} \right]_2 + k_2 x_2 - k_2 x_1 &= 0\end{aligned}\tag{5.3}$$

Diasumsikan bahwa gerak periodik dengan gerakan harmonik pada variasi amplitudo dan frekuensi tertentu, komponen tersebut dapat dinyatakan dengan:

$$x_1 = A \sin \omega t \text{ dan } x_2 = B \sin \omega t\tag{5.4}$$

Dari Pers. (5.4) Turunan tingkat 2 diperoleh:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\omega^2 A \sin \omega t \text{ dan } \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\omega^2 B \sin \omega t\tag{5.5}$$

Dengan substitusi Pers. (5.2) dan (5.3) pada Pers (5.4) diperoleh:

$$\text{Persamaan (5.2):} \quad m_1 \left[ \frac{d^2 x}{dt^2} \right]_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0$$

Menjadi:

$$-m_1 \omega^2 A \sin \omega t + (k_1 + k_2)A \sin \omega t - k_2 B \sin \omega t = 0$$

$$A \sin \omega t (k_1 + k_2 - m_1 \omega^2) - B \sin \omega t (k_2) = 0\tag{5.6}$$

$$\text{Persamaan (2):} \quad m_2 \left[ \frac{d^2 x}{dt^2} \right]_2 + k_2 x_2 - k_2 x_1 = 0$$

Menjadi:

$$-m_2 \omega^2 B \sin \omega t + k_2 B \sin \omega t - k_2 A \sin \omega t = 0$$

$$B \sin \omega t (k_2 - m_2 \omega^2) - A \sin \omega t (k_2) = 0\tag{5.7}$$

Sehingga persamaan gerak massa 1 dan 2 menjadi:

$$A \sin \omega t (k_1 + k_2 - m_1 \omega^2) - B \sin \omega t (k_2) = 0\tag{5.8}$$

$$B \sin \omega t (k_2 - m_2 \omega^2) - A \sin \omega t (k_2) = 0 \quad (5.9)$$

dengan  $A$  dan  $B$  adalah amplitudo dari dua gerak harmonik, rasio harus selalu konstan dan tergantung terhadap waktu dengan demikian persamaan dapat ditulis, dengan tanpa menyertakan fungsi :  $\sin \omega t$

$$A(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2) - B k_2 = 0 \quad (5.10)$$

$$-A k_2 + B(k_2 - m_2 \omega^2) = 0 \quad (5.11)$$

Dari kedua persamaan tersebut disusun sebuah matrik untuk penyelesaiannya, diperoleh:

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m_1 \omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2 \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Matrik tersebut menunjukkan persamaan aljabar linier dengan solusi  $A=B=0$  sebagai definisi kesetimbangan sistem. Untuk mendapatkan nilai  $A$  dan  $B$  determinan dari persamaan tersebut = 0

$$\det. \begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m_1 \omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2 \omega^2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m_1 \omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2 \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - (-k_2)(-k_2) = 0$$

$$\rightarrow k_1 k_2 - k_1 m_2 \omega^2 + (k_2)^2 - k_2 m_2 \omega^2 + -k_2 m_1 \omega^2 + m_1 m_2 \omega^4 - (k_2)^2 = 0$$

$$\rightarrow k_1 k_2 - k_1 m_2 \omega^2 - k_2 m_2 \omega^2 + -k_2 m_1 \omega^2 - m_1 m_2 \omega^4 = 0$$

$$\rightarrow k_1 k_2 + (-k_1 m_2 - k_2 m_2 - k_2 m_1) \omega^2 + m_1 m_2 \omega^4 = 0$$



$$\rightarrow k_1 k_2 + ((-k_1 - k_2)m_2 - k_2 m_1)\omega^2 + m_1 m_2 \omega^4 = 0$$

$$\rightarrow m_1 m_2 \omega^4 + ((-k_1 - k_2)m_2 - k_2 m_1)\omega^2 + k_1 k_2 = 0 \quad \text{dibagi dengan } m_1 m_2$$

$$\rightarrow \omega^4 - \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right)\omega^2 + \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} = 0$$

<p>Catatan: Penyelesaian persamaan kuadrat: <math>ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}</math></p>
--

$$\rightarrow \omega^4 - \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right)\omega^2 + \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} = 0$$

$\rightarrow \omega_1^2 \text{ dan } \omega_2^2 = \frac{\left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right)^2 - 4(1)\left(\frac{k_1 k_2}{m_1 m_2}\right)}}{2}$
--

Sehingga solusi secara umum persamaan getaran adalah gerak harmonik berupa gelombang:

$$\text{Untuk massa 1} \rightarrow x_1 = A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t$$

$$\text{Untuk massa 2} \rightarrow x_2 = B_1 \sin \omega_1 t + B_2 \sin \omega_2 t$$

A dan B merupakan konstanta dengan rasio A dan B

$$A(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2) - B k_2 = 0 \rightarrow A(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2) = B k_2 \quad (1)$$

$$-A k_2 + B(k_2 - m_2 \omega^2) = 0 \rightarrow A k_2 = B(k_2 - m_2 \omega^2) \quad (2)$$

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{k_2}{k_1 + k_2 - m_1 \omega_1^2} = \frac{1}{\lambda_1} \rightarrow A_1 \lambda_1 = B_1 \text{ dan } \frac{A_2}{B_2} = \frac{k_2 - m_2 \omega_2^2}{k_2} = \frac{1}{\lambda_2} \rightarrow A_2 \lambda_2 = B_2$$

Solusi umum untuk persamaan gerak massa 1 dan massa 2 (2DOF) adalah:

Untuk massa 1 →

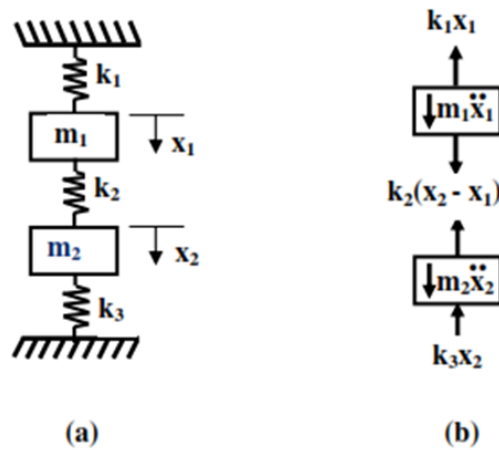
$$x_1 = A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t$$

Untuk massa 2 →

$$x_2 = A_1 \lambda_1 \sin \omega_1 t + A_2 \lambda_2 \sin \omega_2 t$$

### Getaran tak teredam dengan 2DOF (Kasus 2)

Gambar 5.4 menunjukkan sistem getaran bebas tanpa redaman dengan dua derajat kebebasan dengan 3 pegas, 2 massa dan 2 tumpuan



Gambar 5.4. Sistem tidak teredam dua tumpuan dengan dua derajat kebebasan

Didasarkan pada persamaan Newton ke dua tentang gerak:

$$\sum F = ma = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Untuk massa 1 bentuk persamaan sebagai berikut:

$$m_1 \left[ \frac{d^2 x}{dt^2} \right]_1 = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1)$$

$$m_1 \left[ \frac{d^2 x}{dt^2} \right]_1 = -k_1 x_1 + k_2 x_2 - k_2 x_1$$

$$m_1 \left[ \frac{d^2 x}{dt^2} \right]_1 + k_1 x_1 + k_2 x_1 = k_2 x_2$$

$$m_1 \left[ \frac{d^2 x}{dt^2} \right]_1 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = 0 \quad (5.13)$$

Untuk massa 2 bentuk persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}m_2 \left[ \frac{d^2 x}{dt^2} \right]_2 &= -k_3 x_2 - k_2 (x_2 - x_1) \\m_2 \left[ \frac{d^2 x}{dt^2} \right]_2 &= -k_3 x_2 - k_2 x_2 + k_2 x_1 \\m_2 \left[ \frac{d^2 x}{dt^2} \right]_2 + k_3 x_2 + k_2 x_2 &= k_2 x_1 \\m_2 \left[ \frac{d^2 x}{dt^2} \right]_2 + (k_3 + k_2) x_2 - k_2 x_1 &= 0\end{aligned}\tag{5.14}$$

Diasumsikan bahwa gerak periodik dengan gerakan harmonik pada variasi amplitudo dan frekuensi tertentu, komponen tersebut dapat dinyatakan dengan:

$$x_1 = A \sin \omega t \text{ dan } x_2 = B \sin \omega t\tag{5.15}$$

Dari persamaan (5.15) Turunan tingkat 2 diperoleh:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\omega^2 A \sin \omega t \text{ dan } \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\omega^2 B \sin \omega t$$

Dimana  $A$  dan  $B$  adalah amplitudo getaran dari masing-masing kedua massa dalam kondisi steady state. Substitusi persamaan (5.15) ke persamaan (5.13) diperoleh:

$$m_1 \left[ \frac{d^2 x}{dt^2} \right]_1 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = 0\tag{5.16}$$

$$-m_1 \omega^2 A \sin \omega t + (k_1 + k_2) A \sin \omega t - k_2 B \sin \omega t = 0$$

$$A(-m_1 \omega^2 \sin \omega t + (k_1 + k_2) \sin \omega t) - B k_2 \sin \omega t = 0\tag{5.16a}$$

Substitusi persamaan (5.15) ke persamaan (5.14) diperoleh:

$$m_2 \left( \left[ \frac{d^2 x}{dt^2} \right]_2 + k_3 + k_2 \right) x_2 - k_2 x_1 = 0\tag{5.17}$$

$$-m_2 \omega^2 B \sin \omega t + (k_3 + k_2) B \sin \omega t - k_2 A \sin \omega t = 0$$

$$A(-k_2 \sin \omega t) + B(-m_2 \omega^2 \sin \omega t + (k_3 + k_2) \sin \omega t) = 0\tag{5.17a}$$

Dengan  $A$  dan  $B$  adalah amplitudo dari dua gerak harmonik, rasio harus selalu konstan dan tergantung terhadap waktu dengan demikian persamaan dapat ditulis, dengan tanpa menyertakan fungsi :  $\sin \omega t$  persamaan (5.16a) dan (5.17a) menjadi:

$$A(+k_1 + k_2 - m_1\omega^2) - Bk_2 = 0$$

$$A(-k_2) + B(+k_3 + k_2 - m_2\omega^2) = 0$$

Dari kedua persamaan tersebut disusun sebuah matrik untuk penyelesaiannya, diperoleh:

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_3 + k_2 - m_2\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matrik tersebut menunjukkan persamaan aljabar linier dengan solusi  $A=B=0$  sebagai definisi kesetimbangan sistem. Untuk mendapatkan nilai  $A$  dan  $B$  determinan dari persamaan tersebut = 0

$$\det. \begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_3 + k_2 - m_2\omega^2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_3 + k_2 - m_2\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\rightarrow (k_1 + k_2 - m_1\omega^2)(k_3 + k_2 - m_2\omega^2) - (-k_2)(-k_2) = 0$$

$$\rightarrow k_1k_3 + k_1k_2 - k_1m_2\omega^2 + k_2k_3 + k_2^2 - k_2m_2\omega^2 - k_3m_1\omega^2 - k_2m_1\omega^2 + m_1m_2\omega^4 - k_2^2 = 0$$

$$\rightarrow m_1m_2\omega^4 + (-k_1m_2 - k_2m_2 - k_3m_1 - k_2m_1)\omega^2 + (k_1k_3 + k_1k_2 + k_2k_3) = 0$$

$$\rightarrow m_1m_2\omega^4 - (k_1m_2 + k_2m_2 + k_3m_1 + k_2m_1)\omega^2 + (k_1k_3 + k_1k_2 + k_2k_3) = 0$$

$$\rightarrow m_1m_2\omega^4 - ((k_1 + k_2)m_2 + (k_3 + k_2)m_1)\omega^2 + (k_1k_3 + k_1k_2 + k_2k_3) = 0$$

$$\omega^4 - \left[ \frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2 + k_3}{m_2} \right] \omega^2 + (k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3) = 0$$

$$\rightarrow \omega_1^2 \text{ dan } \omega_2^2 = \frac{\left( \frac{(k_1 + k_2)}{m_1} + \frac{(k_2 + k_3)}{m_2} \right) \pm \sqrt{\left( \frac{(k_1 + k_2)}{m_1} + \frac{(k_2 + k_3)}{m_2} \right)^2 - 4(1) \left( \frac{(k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3)}{m_1m_2} \right)}}{2}$$

Dari analisis persamaan dikriminasi menunjukkan bahwa penyelesaian berupa bilangan kompleks, dimana:

$$\left(\frac{(k_1+k_2)}{m_1} + \frac{(k_2+k_3)}{m_2}\right)^2 - 4(1)\left(\frac{(k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3)}{m_1m_2}\right) < 0$$

Sehingga solusi secara umum persamaan getaran adalah gerak harmonik berupa gelombang:

$$\text{Untuk massa 1} \rightarrow x_1 = A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t$$

$$\text{Untuk massa 2} \rightarrow x_2 = B_1 \sin \omega_1 t + B_2 \sin \omega_2 t$$

A dan B merupakan konstanta dengan rasio A dan B ditentukan dari persamaan (1a) dan (2a)

$$A_1(+k_1 + k_2 - m_1\omega^2) - B_1k_2 = 0 \rightarrow A_1(+k_1 + k_2 - m_1\omega^2) = B_1k_2$$

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{k_2}{k_1+k_2-m_1\omega_1^2} = \frac{k_3+k_2-m_2\omega_1^2}{k_2} = \frac{1}{\lambda_1}$$

$$A_2(k_2) + B_2(+k_3 + k_2 - m_2\omega^2) = 0 \rightarrow A_2(k_2) = B_2(+k_3 + k_2 - m_2\omega^2)$$

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{k_2}{k_1+k_2-m_1\omega_2^2} = \frac{k_3+k_2-m_2\omega_2^2}{k_2} = \frac{1}{\lambda_2}$$

Solusi umum untuk persamaan gerak massa 1 dan massa 2 (2DOF) adalah:

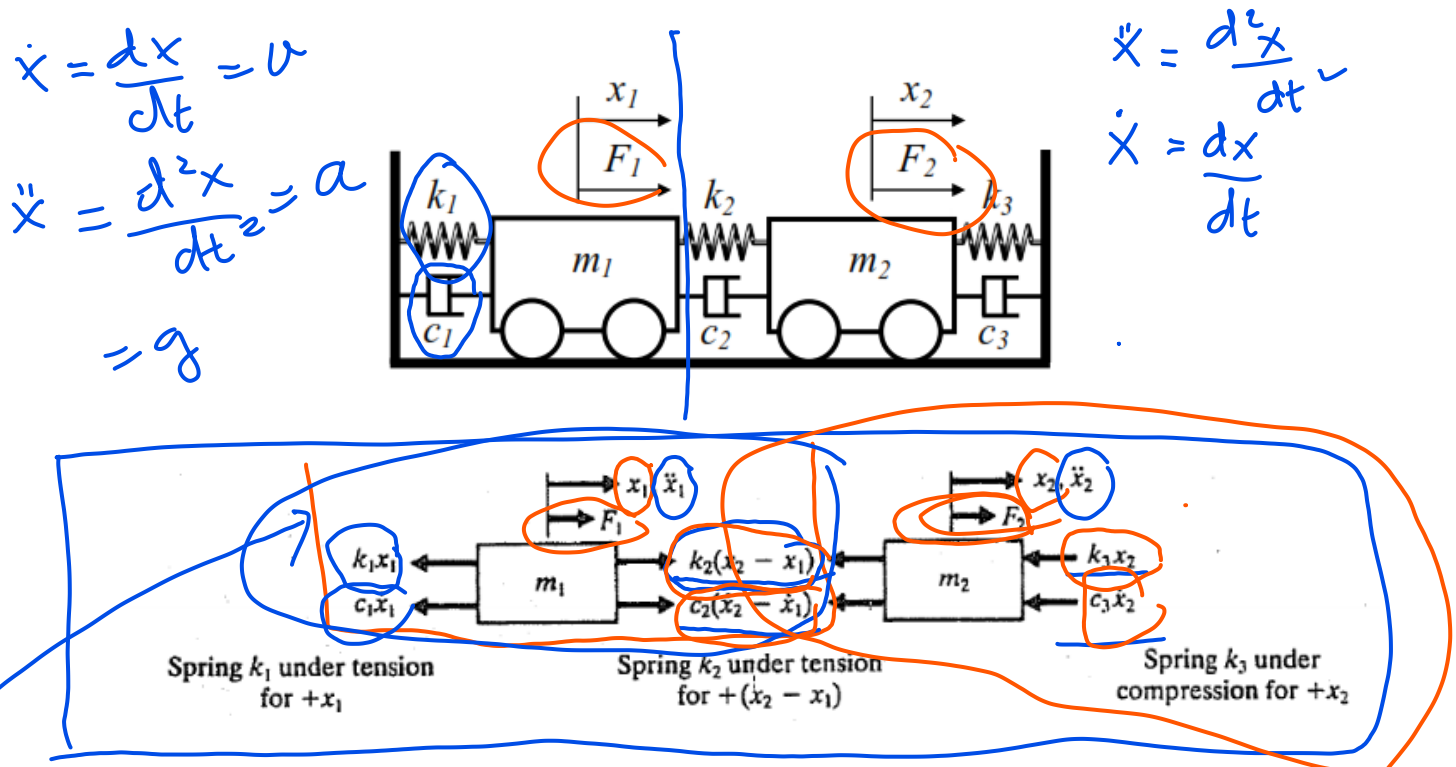
$$\text{Untuk massa 1} \rightarrow x_1 = A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t$$

$$\text{Untuk massa 2} \rightarrow x_2 = A_1\lambda_1 \sin \omega_1 t + A_2\lambda_2 \sin \omega_2 t$$

## BAB VI

### GETARAN TEREDAM PADA DUA DERAJAT KEBEBASAN

Jumlah derajat kebebasan (DOF) dari suatu sistem adalah jumlah koordinat independen yang diperlukan untuk mendefinisikan gerakan. Jumlah DOF sama dengan jumlah massa yang dikalikan dengan jumlah independen setiap massa dapat bergerak. Pertimbangkan sistem 2 DOF getaran teredam yang ditunjukkan pada Gambar 6.1.



Gambar 6.1. Sistem teredam satu tumpuan dengan dua derajat kebebasan

didasarkan pada persamaan Newton II tentang gerak  $\sum F = mg = m \frac{d^2x}{dt^2}$  maka

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - c_1 \dot{x}_1 + k_2 (x_2 - x_1) + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + F_1$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_3 x_2 - c_3 \dot{x}_2 - k_2 (x_2 - x_1) - c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + F_2$$

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 - c_2 \dot{x}_2 - k_2 x_2 = F_1$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2 + (k_2 + k_3) x_2 - c_2 \dot{x}_1 - k_2 x_1 = F_2$$

$$a = \frac{\sum F}{m}$$

$$\sum F = m \cdot a \quad (6.1)$$

$$\sum F = m \cdot g \quad (6.2)$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (6.3)$$

Jika

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad \{f\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (6.4)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad [C] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

Selanjutnya

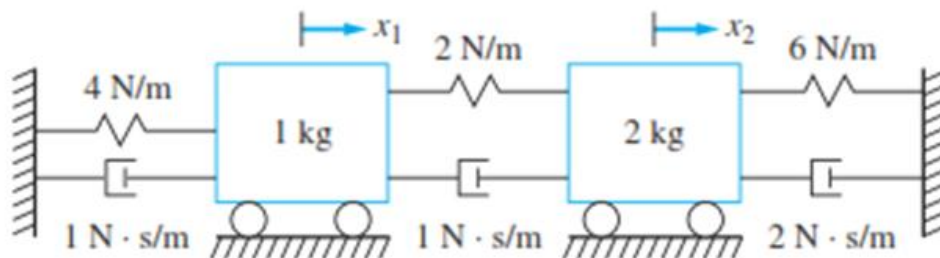
$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{F\} \quad (6.6)$$

### Contoh Soal

Tentukan respon dari suatu sistem seperti pada Gambar 6.2 sebagai fungsi  $x_1(t)$  dan  $x_2(t)$ , dengan kondisi pada  $x_2(t) = 2 \frac{m}{c}$  dan semua kondisi sama dengan nol, pergerakan diberikan pada massa ke dua dengan kecepatan awal 2 m/s

$$k_1 = 4 \text{ N/m}, k_2 = 2 \text{ N/m}, k_3 = 6 \text{ N/m},$$

$$c_1 = 1 \text{ N.s/m}, c_2 = 1 \text{ N.s/m}, c_3 = 2 \text{ N.s/m},$$



Gambar 6.2.

## Penyelesaian

→ Differensial dari persamaan gerak sistem tersebut

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{a})$$

→ Asumsikan penyelesaian dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \chi \end{bmatrix} e^{\lambda t} \quad (\text{b})$$

→ Nilai  $\lambda$  yang merupakan penyelesaian non-trivial pers. (b) adalah akar akar dari

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + 2\lambda + 6 & -\lambda - 2 \\ -\lambda - 2 & 2\lambda^2 + 3\lambda + 8 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{c})$$

Evaluasi determinan didapatkan

$$(\lambda^2 + 2\lambda + 6)(2\lambda^2 + 3\lambda + 8) - (\lambda + 2)^2 = 0 \quad (\text{d})$$

→ Akar persamaan dari persamaan order 4 adalah

$$\lambda = -0,5122 \pm 1,7436i - 1,2378 \pm 2,2648i$$

→ Sistem bergetar dengan frekuensi

$$\omega_1 = 1,7436 \text{ dan } \omega_2 = 2,2468$$

→ Model bilangan kompleknya ditentukan dari bentuk berikut

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 + 2\lambda + 6 & -\lambda - 2 \\ -\lambda - 2 & 2\lambda^2 + 3\lambda + 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \chi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{e})$$

→ Kedua persamaan yang direpresentasikan oleh pers (e) untuk nilai  $\lambda$  yang telah didapatkan sebelumnya adalah *dependent*, sehingga hanya persamaan pertama yang digunakan

$$(\lambda^2 + 2\lambda + 6) - (\lambda + 2)\chi = 0 \quad (\text{f})$$

atau



$$\chi = \frac{\lambda^2 + 2\lambda + 6}{\lambda + 2} \quad (g)$$

→ Untuk  $\lambda = -0,5122 - 1,7436i$ , persamaan (g) menjadi

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{(-0,5122 - 1,7436i)^2 + 2(-0,5122 - 1,7436i) + 6}{2 - 0,5122 - 1,7436i} \\ &= (1,817 + 0,248i) \end{aligned} \quad (h)$$

Untuk  $\lambda = -0,5122 + 1,7436i$ , maka  $\chi = (1,817 - 0,248i$

Untuk  $\lambda = -1,2378 \pm 2,2648i$ , maka  $\chi = (-0,435 \pm 0,115i$

→ Response yang terjadi dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= e^{-0,5122t} \left( C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1,817 - 0,248i \end{bmatrix} e^{i1,7436t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1,817 + 0,248i \end{bmatrix} e^{-i1,7436t} \right) \\ &+ e^{-1,2378t} \left( C_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -0,435 - 0,115i \end{bmatrix} e^{i2,2468t} + C_4 \begin{bmatrix} 1 \\ -0,435 + 0,115i \end{bmatrix} e^{-i2,2468t} \right) \end{aligned} \quad (i)$$

atau

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= e^{-0,5122t} \left\{ A_1 \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1,817 \end{bmatrix} \cos 1,744t - \begin{bmatrix} 0 \\ 0,248 \end{bmatrix} \sin 1,744t \right) \right. \\ &+ A_2 \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1,817 \end{bmatrix} \sin 1,744t + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,248 \end{bmatrix} \cos 1,744t \right) \Big\} \\ &+ e^{-1,2378t} \left\{ A_3 \left( \begin{bmatrix} 1 \\ -0,435 \end{bmatrix} \cos 2,247t - \begin{bmatrix} 0 \\ -0,115 \end{bmatrix} \sin 2,247t \right) \right. \\ &+ A_4 \left( \begin{bmatrix} 1 \\ -0,435 \end{bmatrix} \sin 2,247t + \begin{bmatrix} 0 \\ -0,115 \end{bmatrix} \cos 2,247t \right) \Big\} \end{aligned} \quad (j)$$

→ Dengan memasukkan kondisi awal, maka didapatkan

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1.817 & 0.248 & -0.435 & -0.115 \\ -0.5122 & 1.744 & -1.238 & 2.247 \\ -1.390 & 3.295 & 0.871 & -0.258 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} \quad (k)$$

→ Penyelesaian persamaa (k) adalah  $A_1 = 4,49$ ,  $A_2 = -1,95$ ,  $A_3 = -2,12$ , dan  $A_4 = 3,29$ .

Selanjutnya dengan mensubstitusikan hasil ini ke persamaan (i), maka didapatkan

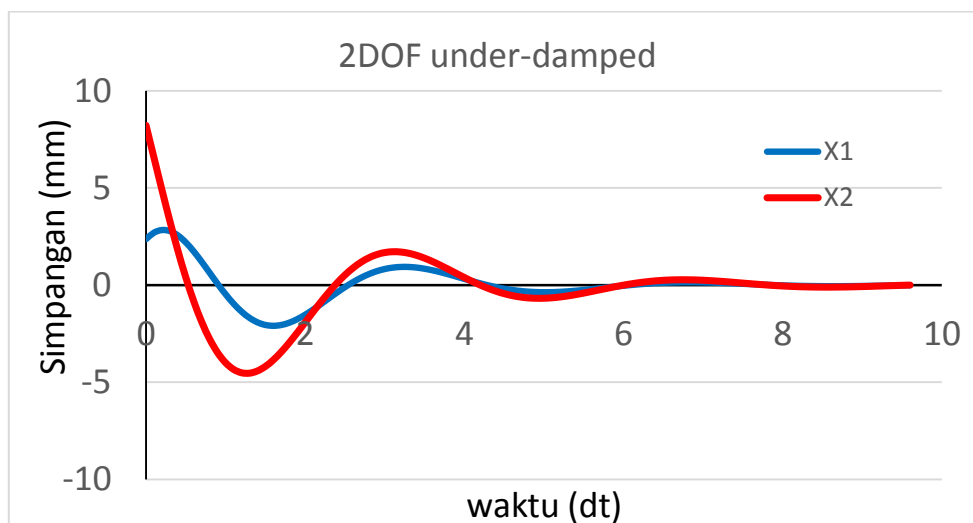
$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{-0.512t} \left( \begin{bmatrix} 4.49 \\ 7.68 \end{bmatrix} \cos 1.74t + \begin{bmatrix} -1.95 \\ -4.66 \end{bmatrix} \sin 1.74t \right) + e^{-1.237t} \left( \begin{bmatrix} -2.13 \\ 0.54 \end{bmatrix} \cos 2.25t + \begin{bmatrix} 3.29 \\ -1.67 \end{bmatrix} \sin 2.25t \right) \quad (l)$$

→ Penyelesaian akhir berupa persamaan getaran adalah:

$$x_1(t) = e^{-0.512t} (4,49 \cos 1,74t - 1.95 \sin 1,74t) + e^{-1,237t} (-2,13 \cos 2,25t + 3,29 \sin 2,25t)$$

$$x_2(t) = e^{-0.512t} (7,68 \cos 1,74t - 4,66 \sin 1,74t) + e^{-1,237t} (0,54 \cos 2,25t - 1,67 \sin 2,25t)$$

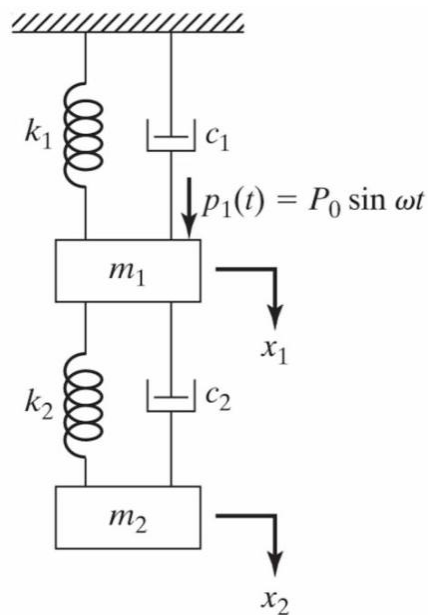
→ Grafik getaran merupakan getaran teredam seperti pada Gambar 6.3



Gambar 6.3. Response  $x_1$  dan  $x_2$

**Latihan Soal**

1. Gambar 6.4 adalah sistem 2-DOF teredam. Fungsi gaya harmonik hanya diberikan ke massa 1.  $K_1 = 1000 \text{ N/m}$ ,  $C_1 = 10 \text{ Ns/m}$ ,  $K_2 = 2000 \text{ N/m}$ ,  $C_2 = 10 \text{ Ns/m}$ ,  $m_1 = 10 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 10 \text{ kg}$ ,  $P_0 = 100$  dan  $\omega = 10 \text{ rad/s}$ , maka
  - a. Tuliskan persamaan geraknya dalam bentuk matrix
  - b. Carilah nilai eigenvalues dan eigenvectors dari sistem dengan menggunakan MATLAB “`ieg`” command
  - c. Plot response  $x_1$  dan  $x_2$  sistem



Gambar 6.4. Sistem 2 DOF

## BAB VII

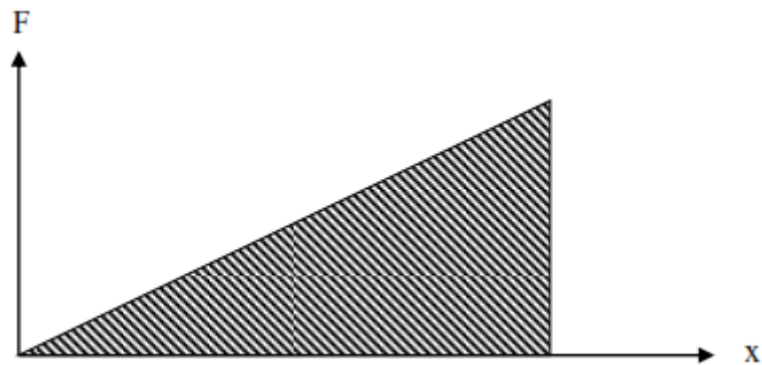
### KONSTANTA KEKAKUAN BENDA RIGID

---

#### 7.1. Elastisitas

**Elastisitas** adalah kemampuan suatu material untuk kembali ke bentuk semula, baik ukuran maupun posisi, jika material tersebut ditekan, ditarik, atau diberi gaya deformasi lainnya. Bila suatu pegas linier dikenai gaya sebesar  $F$  di mana pegas mempunyai kekakuan  $k$  maka pegas akan terdefleksi. Misalkan defleksi pegas sebesar  $x$ , maka akan berlaku hubungan linier seperti pada persamaan (7.1).

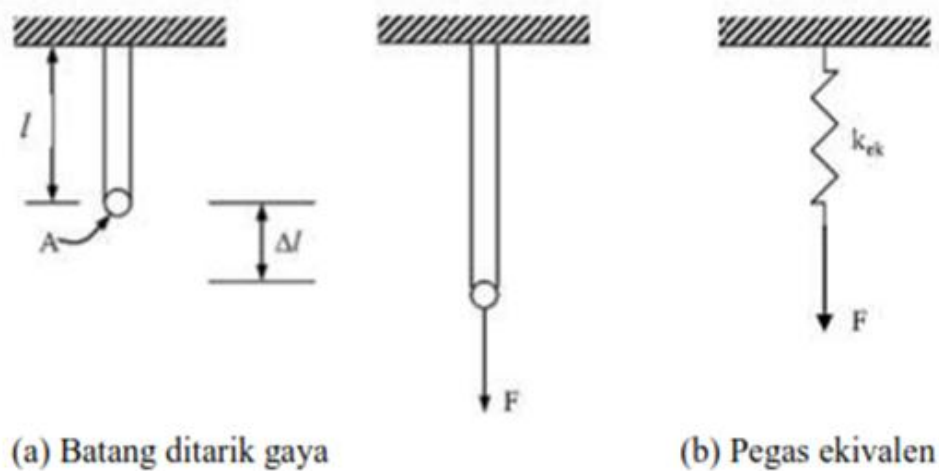
$$F = k \cdot \Delta x \quad (7.1)$$



Gambar 7.1. Hubungan gaya dan defleksi

Jika kita plot grafik hubungan  $F$  dengan  $x$  akan terbentuk garis miring yang linier, luasan di bawah garis miring pada  $x$  yang tertentu merupakan energi potensial pegas ( $U$ ), seperti terlihat pada Gambar 7.1.

$$U = \frac{1}{2} kx^2 \quad (7.2)$$



Gambar 7.2. Batang ditarik gaya ( $F$ ) sebagai pegas ekivalen

**Tegangan ( $\sigma$ )** dapat didefinisikan sebagai perbedaan tekanan. Terdapat berbagai macam tekanan, yaitu tekanan hidrostatik untuk kasus di dalam air atau tekanan litostatik untuk kasus lapisan di dalam Bumi. Jika **tekanan** merupakan gaya yang dikenakan pada suatu material setiap luasannya maka definisi ini dapat dituliskan dalam bentuk persamaan:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (7.3)$$

Di mana:  $F$  adalah gaya (N),  $A$  adalah luas permukaan ( $m^2$ ). Oleh sebab itu tegangan juga memiliki satuan gaya per satuan luas. Satuan SI dari tegangan adalah:

$$1 \text{ pascal (Pa)} = 1 \text{ N m}^{-2}$$

Jika 1 newton (N) =  $1 \text{ kg m s}^{-2} = 10^5 \text{ dyne}$ , maka tegangan dapat dinyatakan dalam satuan lain, yaitu bar.

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$$

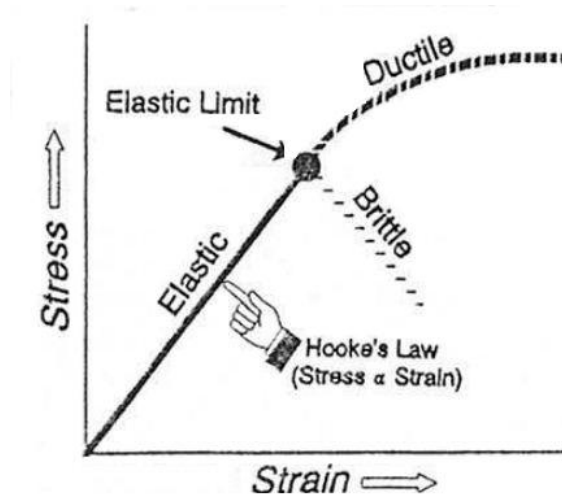
Secara umum terdapat tiga macam tegangan, yaitu tegangan kompresional (menekan), tegangan tensional (meregang), dan tegangan *shear* (mengeser).

Sementara itu **regangan ( $\epsilon$ )** atau ( $\epsilon$ ) merupakan perbandingan antara perubahan volume suatu benda yang terjadi setelah diberi tegangan terhadap volume awal benda itu sebelum diberi tegangan. Secara lebih sederhana, regangan berarti perubahan volume atau

panjang yang terjadi jika benda diberi tegangan. Tentunya, regangan tidak memiliki satuan karena regangan hanya merupakan rasio. Hubungan keduanya secara umum dapat dinyatakan dalam persamaan berikut:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{L_0} \quad (7.4)$$

merupakan tensor elastis yang menyatakan sifat suatu medium. Tensor ini tidak bergantung pada besarnya tegangan maupun regangan. Baik tegangan maupun regangan ini juga mampu menggambarkan sifat keelastisan suatu material. Perlu dicatat bahwa tidak selamanya suatu benda bersifat elastis. **Hukum Hooke** menjelaskan bahwa benda disebut elastis jika besar regangan yang terjadi berbanding lurus dengan besar tegangan yang diberikan. Batas dari keelastisan suatu benda ini dikenal sebagai *elastic limit*. Jika benda masih diberikan tegangan hingga melebihi *elastic limit*, maka benda tidak mampu lagi kembali ke bentuk semula. Benda akan menjadi *ductile* (benda mampu mengalir dan mudah dipintal) atau menjadi *brittle* (rapuh dan mudah patah, seperti pensil yang patah).



Gambar 7.3. Hubungan tegangan dan regangan.

Benda disebut elastis jika mematuhi hukum Hooke: tegangan berbanding lurus dengan regangan

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{L_0}, \quad \sigma = \frac{F}{A}, \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (7.5)$$

$$E = \frac{\frac{F}{A}}{\frac{\Delta l}{L_0}} \rightarrow E = \frac{F \cdot L_0}{A \cdot \Delta l} \quad (7.6)$$

$$\Delta l = \Delta x, \quad E = \frac{L_0}{A} \cdot \frac{F}{\Delta x} \quad (7.7)$$

$$\frac{F}{\Delta x} = k \quad (7.8)$$

$$k = \frac{E \cdot A}{L_0} \quad (7.9)$$

Dimana:

$k$  = konstanta pegas batang rigid (N/m)

$E$  = modulus elastisitas (N/m<sup>2</sup>)

$L_0$  = panjang batang awal (m)

$A$  = luas penampang batang (m<sup>2</sup>)

### Contoh Soal

1. Batang AB pada crane terlihat pada Gambar 7.4(a) adalah batang homogen yang panjangnya 10 m dan luas penampangnya 2500 mm<sup>2</sup>. Kabel CDEBF terbuat dari baja dan mempunyai luas penampang 100 mm<sup>2</sup>. Jika efek kabel CEDE diabaikan, maka hitunglah konstanta kekakuan ekuivalen dalam arah vertikal

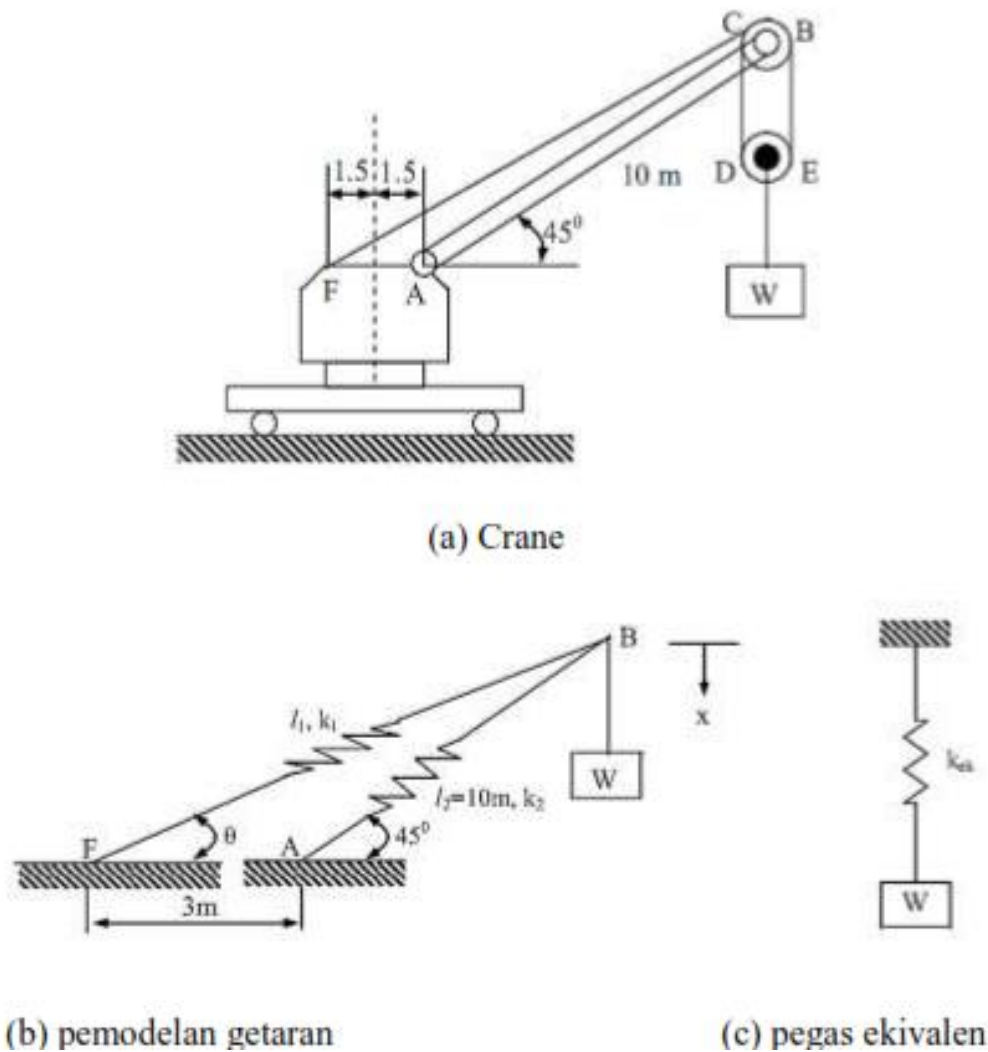
### Penyelesaian

Selama landasan crane kaku, kabel dan batang akan tetap berada pada posisi F dan A. Dengan mengabaikan efek kabel CDEB, maka berat  $W$  bekerja di titik B seperti terlihat pada Gambar 7.4(b). Simpangan vertikal  $x$  menyebabkan batang dengan kekakuan pegas  $k_2$  akan terdeformasi sejauh  $x_2 = x \cos 45^\circ$  dan kabel dengan kekakuan  $k_1$  akan terdeformasi sejauh  $x_1 = x \cos (90^\circ - \theta)$ . Panjang kabel FB,  $l_1$  pada Gambar 7.4(b) adalah

$$l_1^2 = 3^2 + 10^2 - 2(3)(10)\cos 135^\circ = 151.426, \text{ sehingga } l_1 = 12.3055 \text{ m}$$

Sudut  $\theta$  diberikan dari

$$l_1^2 + 3^2 - 2(l_1)(3)\cos \theta = 10^2, \text{ sehingga } \cos \theta = 0.8184, \text{ dan } \theta = 35.0736^\circ$$



Gambar 7.4. Crane

→ Energi potential total (U) yang disebabkan oleh k1 dan k2 adalah

$$U = \frac{1}{2} k_1 (x \cos 45^\circ)^2 + \frac{1}{2} k_2 [x \cos (90 - \theta)]^2 \quad \text{di mana}$$

$$k_1 = \frac{A_1 E_1}{l_1} = \frac{(100 \times 10^{-6})(207 \times 10^9)}{12,3055} = 1,6822 \times 10^6 \text{ N/m}$$

$$k_2 = \frac{A_2 E_2}{l_2} = \frac{(2500 \times 10^{-6})(207 \times 10^9)}{10} = 5,175 \times 10^7 \text{ N/m}$$



→ Bila pegas ekivalen arah vertikal terdeformasi sejauh  $x$ , Energi Potensial pegas ekivalen ( $U_{ek}$ ) diberikan

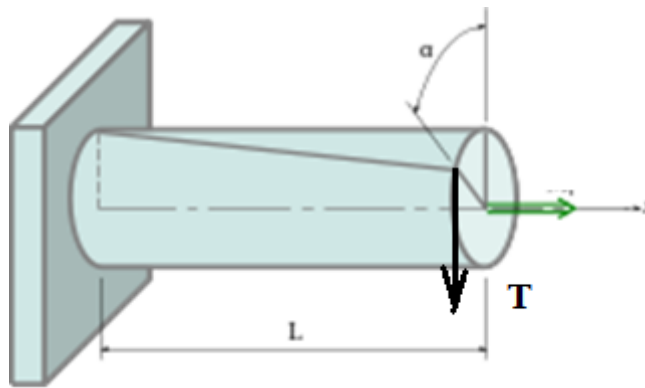
$$U_{ek} = \frac{1}{2} k_{ek} x^2$$

→ Dengan mengambil  $U = U_{ek}$ , maka diperoleh konstanta pegas ekivalen sistem

$$K_{ek} = 26,4304 \times 10^6 \text{ N/m}$$

## 7.2. Kekakuan Batang Torsi

Gambar 7.5 adalah sebuah batang rigid dengan memiliki panjang  $L$  serta pada ujungnya terjadi torsi  $T$ .



Gambar 7.5. Batang rigid

Jika  $\theta$  adalah sudut punter (rad),  $G$  adalah Modulus kekakuan (modulus geser) dari material,  $J$  adalah Inersia polar, batang rigid tersebut rigid mungkin juga memiliki konstanta pegas pintiran  $k$  yang diberikan oleh Pers. (7.10)

$$GJ = \frac{TL}{\theta} \quad \frac{GJ}{L} = \frac{T}{\theta}$$

$$k = \frac{T}{\theta} \quad (7.10)$$

### 7.3. Hubungan dengan elastisitas

Modulus elastisitas suatu material tidak sama dengan kekakuan suatu komponen yang terbuat dari material tersebut. Modulus elastis adalah properti dari bahan penyusunnya; kekakuan adalah sifat dari suatu struktur atau komponen struktur, dan karenanya tergantung pada berbagai dimensi fisik yang menggambarkan komponen itu. Artinya, modulus adalah properti intensif dari bahan; kekakuan, di sisi lain, adalah sifat luas dari benda padat yang tergantung pada bahan *dan* bentuk serta kondisi batasnya. Misalnya, untuk elemen dalam ketegangan atau kompresi, kekakuan aksial adalah

$$k = E \cdot \frac{A}{L} \quad (7.11)$$

Demikian pula, kekakuan torsional dari bagian lurus

$$k = G \cdot \frac{J}{L} \quad (7.12)$$

### 7.4. Pegas spiral

Pegas koil heliks digunakan dalam aplikasi seperti mesin industri dan sistem suspensi kendaraan. Pertimbangkan pegas yang diproduksi dari batang melintang melingkar dengan diameter  $D$ . Modulus geser batang adalah  $G$ . Batang dibentuk menjadi koil dengan putaran  $N$  putaran jari-jari  $r$ . Diasumsikan bahwa jari-jari kumparan jauh lebih besar dari jari-jari batang dan bahwa normal untuk bidang satu kumparan hampir bertepatan dengan sumbu pegas. Pertimbangkan pegas koil pegas ketika mengalami beban aksial  $F$ . Bayangkan memotong batang dengan pisau di lokasi yang sewenang-wenang dalam kumparan, mengiris pegas menjadi dua bagian. Pemotongan memperlihatkan gaya geser internal  $F$  dan torsi penahan internal  $Fr$ , seperti digambarkan dalam



Gambar 7.6. Pegas spiral

Pegas dikenakan gaya  $F$  sepanjang sumbunya. Bagian potongan pegas mengungkapkan penampang memiliki geser gaya  $F$  dan torsi  $Fr$  di mana  $r$  adalah radius kumparan. Gambar

7.6 Dengan asumsi perilaku elastis, tegangan geser akibat torsi penahan bervariasi secara linier dengan jarak dari pusat batang ke maksimum.

$$\tau_{\max} = \frac{FrD}{2J} = \frac{16 Fr}{\pi D^3} \quad (7.13)$$

$J = \pi D^4/32$  dimana momen kutub inersia batang. Tegangan geser akibat gaya geser bervariasi secara nonlinier dengan jarak dari sumbu netral. Untuk tegangan geser maksimum karena gaya geser internal jauh lebih kecil daripada tegangan geser maksimum karena torsi penahan, dan efeknya diabaikan. Prinsip mekanisa material dapat digunakan untuk menunjukkan bahwa perubahan total panjang pegas akibat gaya  $F$  yang diterapkan

$$x = \frac{64 Fr^3 N}{GD^4} \quad (7.14)$$

Membandingkan Persamaan (7.13) dengan Persamaan (7.14) maka pegas helik/sspiral dapat dimodelkan sebagai pegas linear dengan kekakuan

$$k = \frac{GD^4}{64Nr^3} \quad (7.15)$$

### Contoh soal

Pegas yang tertutup rapat terbuat dari batang berdiameter 0,2% C berdiameter 20 mm ( $G = 80 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ). Diameter kumparan adalah 20 cm. Musim semi memiliki 30 kumparan. Hitunglah!

- Kekuatan terbesar yang dapat diterapkan sehingga kekuatan elastis dalam geser  $220 \times 10^6 \text{ N/m}^2$  tidak terlampaui!
- Total perubahan panjang pegas ketika gaya maksimal diterapkan!

### Penyelesaian:

Dengan asumsi tegangan geser karena gaya geser dapat diabaikan, tegangan geser maksimum pada pegas ketika gaya  $F$  diterapkan adalah

$$\tau = \frac{FrD}{2J} = F \frac{(0.1 \text{ m})(0.02 \text{ m})}{\frac{2\pi}{32}(0.02 \text{ m})^4} = 6.37 \times 10^4 F$$

Jadi kekuatan maksimum yang diijinkan adalah

$$F_{\max} = \frac{220 \times 10^6 \text{ N/m}^2}{6.37 \times 10^4} = 3.45 \times 10^3 \text{ N}$$

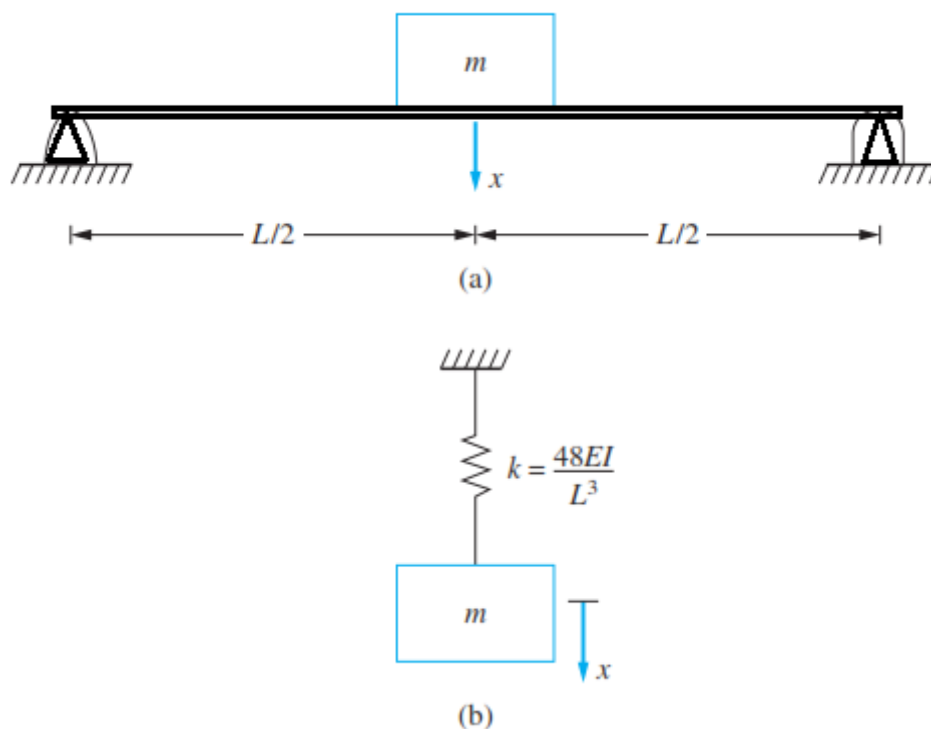
Kekakuan pegas ini dihitung dengan menggunakan konstanta pegas spiral

$$k = \frac{(80 \times 10^9 \text{ N/m}^2)(0.02\text{m})^4}{(64)(30)(0.1\text{m}^3)} = 6.67 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Total perubahan panjang pegas karena penerapan gaya maksimum yang diijinkan adalah

$$\Delta x = \frac{F}{k} = 0.518 \text{ m}$$

### 7.5. Kontanta pegas pada batang dengan dua tumpuan



Gambar 7.7. Kunstuksi balok dengan dua tumpuan

Gerakan partikel yang melekat pada elemen elastis dapat dimodelkan sebagai partikel yang melekat pada pegas linier, asalkan massa elemen lebih kecil dibandingkan dengan massa partikel dan hubungan linear antara gaya dan perpindahan ada untuk elemen tersebut. Pada Gambar 7.7, sebuah partikel bermassa m melekat pada *midspan* dari balok panjang L yang

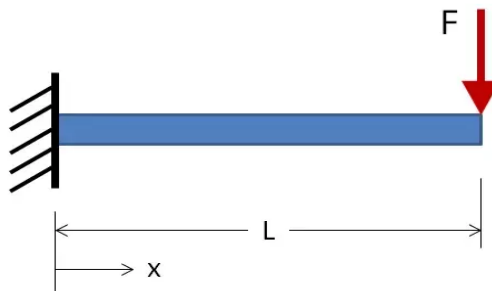
didukung, modulus elastis  $E$ , dan momen penampang inersia  $I$ . Perpindahan melintang dari *midspan* balok akibat statis yang diterapkan beban  $F$  adalah

$$x = \frac{L^3}{48EI} F \quad (7.16)$$

Jadi ada hubungan linear antara perpindahan melintang dan beban statis. Oleh karena itu jika massa balok kecil, getaran partikel dapat dimodelkan sebagai gerakan vertikal partikel yang melekat pada pegas kekakuan.

$$k = \frac{48EI}{L^3} \quad (7.17)$$

### 7.6. Batang Kentilever



Kekakuan balok kantilever adalah

$$k = \frac{3EI}{L^3} \quad (7.18)$$

#### Contoh Soal

Mesin 200 kg dipasang pada ujung balok penopang dengan panjang  $L = 2,5$  m, modulus elastis  $E = 200 \times 10^9$  N/m<sup>2</sup>, dan momen penampang inersia  $1,8 \times 10^{-6}$  m<sup>4</sup>. Dengan asumsi massa balok kecil dibandingkan dengan massa mesin, hitunglah kekakuan balok?

#### Penyelesaian:

$$k = \frac{3EI}{L^3} = \frac{3(200 \times 10^9 \text{ N/m}^2)(1,8 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{(2,5 \text{ m})^3} = 6,91 \times 10^4 \text{ N/m}$$

## BAB VIII

### ELEMEN REDAMAN (*DAMPING ELEMENT*)

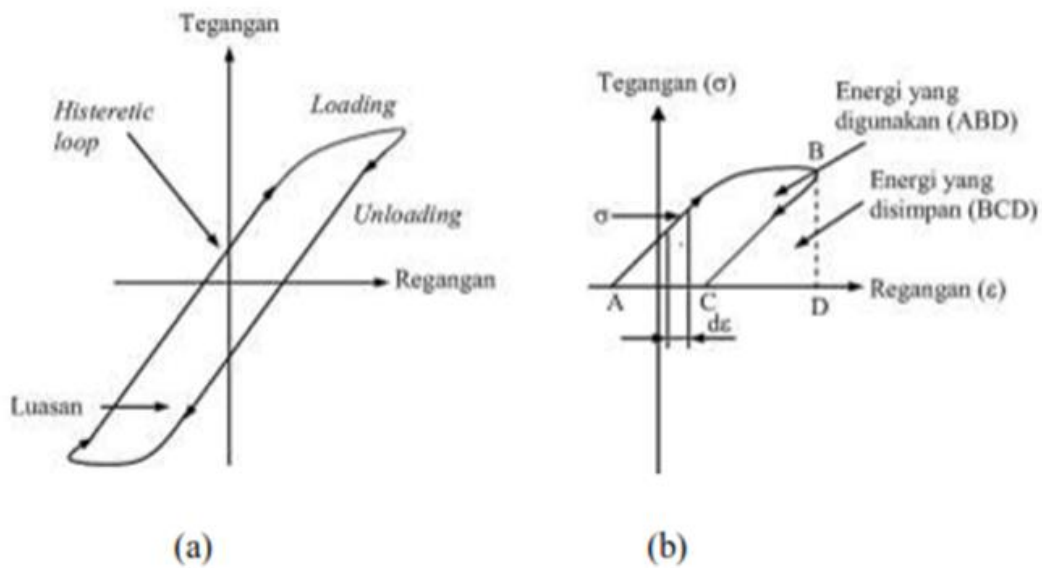
---

Dalam beberapa sistem, energi getaran berangsur-angsur diubah menjadi panas atau *sound*. Karena adanya reduksi energi, maka respon getaran seperti simpangan berangsur-angsur akan menurun. Sistem mekanis di mana energi getaran berangsur-angsur diserap menjadi panas dan *sound* dikenal sebagai redaman. Walaupun penyerapan energi ini relatif kecil namun mempertimbangkan redaman tetap penting untuk ketepatan perhitungan respon getaran sistem. Peredam berfungsi sebagai gaya bila ada kecepatan relatif di antara dua ujung peredam. Peredam bisa dimodelkan sebagai salah satu atau lebih dari tipe-tipe berikut

***Viscous Damping.*** *Viscous damping* adalah yang paling umum digunakan sebagai redaman mekanis dalam analisis getaran. Bila sistem mekanis digetarkan di medium fluida, seperti udara, gas, air dan oli akan terjadi tahanan bodi oleh fluida sebab energi sistem diserap. Dalam hal ini besarnya penyerapan tergantung pada beberapa faktor, seperti ukuran dan bentuk bodi getaran, viskositas fluida, dan kecepatan bodi yang bergetar. Gaya redaman sebanding dengan kecepatan bodi yang bergetar. Contoh tipe *viscous damping* adalah selaput fluida di antara permukaan yang bergesekan, aliran fluida di sekeliling piston dalam silinder, aliran fluida yang melewati orifis dan selaput fluida di sekitar *jurnal bearing*.

***Coulomb* atau Redaman Gesekan.** Di sini besarnya gaya redaman adalah konstan tetapi arahnya berlawanan dengan bodi yang bergetar. Redaman ini disebabkan oleh gesekan antara bidang gesekan yang kering atau mempunyai pelumas diantaranya.

**Material atau *Solid* atau *Hysteretic* Redaman.** Ketika material terdeformasi, energi diserap oleh material. Hal ini disebabkan gesekan antara *internal planes*, yang slip atau bergeser karena deformasi. Bila bodi mempunyai material redaman, diagram tegangan regangan ditunjukkan oleh *hysteretic loop* seperti pada Gambar 1.18(a). Luas loop ini merupakan energi yang hilang setiap volume bodi per siklus.



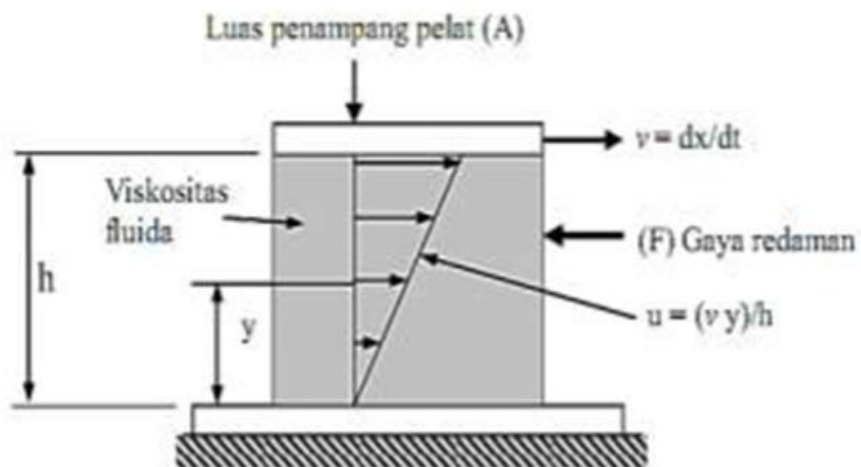
Gambar 8.1. Hysteretic loop pada material elastis

Gaya pada damper adalah

$$F = \tau A = \frac{\mu A v}{h} = c v \quad (8.1)$$

Dimana A adalah luas penampang permukaan yang bergerak, v adalah kecepatan, dan c adalah konstanta redaman yang dihitung dengan persamaa

$$c = \frac{\mu A}{h} \quad (8.2)$$



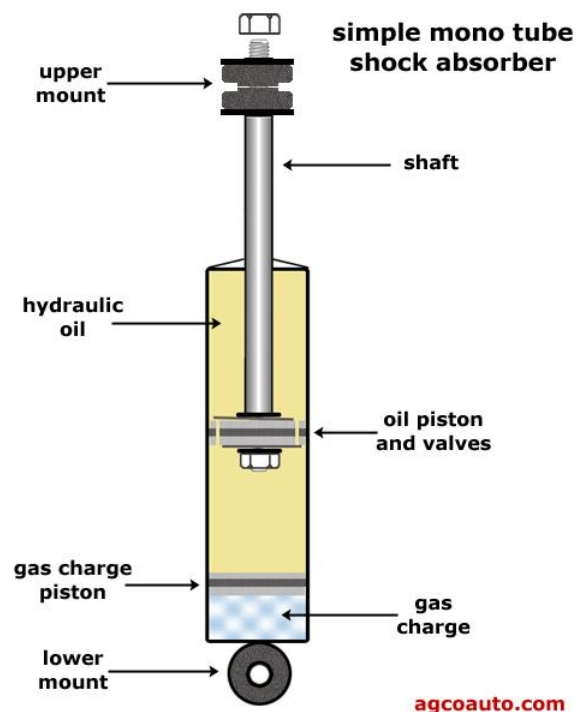
Gambar 8.2. Dua buah plat paralel yang dibatasi oleh fluida

### Kombinasi Peredam

Bila beberapa peredam dipasang secara bersama-sama, maka bisa diganti oleh sebuah peredam ekuivalen dengan prosedur sama seperti beberapa pegas yang dipasang secara bersama-sama

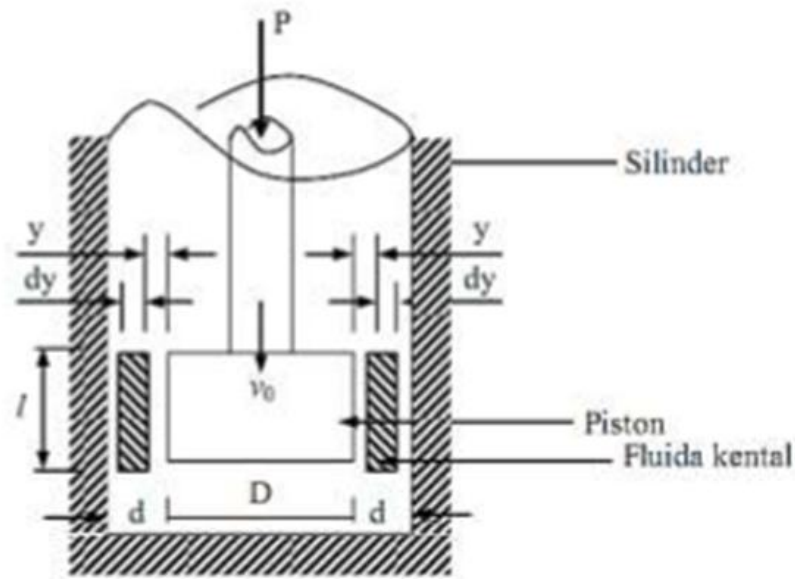
### Contoh Soal.

1. Tentukan konstanta redaman pada *dashpot* yang terlihat pada Gambar 8.4 di bawah. Diketahui diameter silinder  $D = 2d$ , diameter piston =  $D$ , kecepatan piston =  $v$ , panjang aksial piston =  $l$  dan viskositas fluida =  $\mu$ .



Gambar 8.3. Penampang absorber pada peredam sock breaker.





Gambar 4. Piston silinder pada absorber (redaman)

**Penyelesaian:**

Seperti pada Gambar 8.4, *dashpot* terdiri dari piston dengan diameter  $D$ , panjang  $l$ , bergerak dengan kecepatan  $v$  pada silinder dan diberi pelumas dengan viskositas  $\mu$ . Ruang antara piston dan silinder adalah  $d$ . Pada jarak  $y$  dari permukaan yang bergerak mempunyai kecepatan dan tegangan geser masing-masing  $v$  dan  $t$ , dan pada jarak  $(y + dy)$  mempunyai kecepatan  $(v - dv)$  dan tegangan geser  $(t + dt)$ . Harga negatif untuk kecepatan menunjukkan bahwa kecepatan akan berkurang dengan bertambahnya  $y$ .

Gaya karena kekentalan fluida dapat ditulis sebagai berikut

$$F = \pi D l d\tau = \pi D l \frac{d\tau}{dy} dy$$

Tegangan geser diberikan oleh

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}$$

Maka

$$F = -\pi D l dy \mu \frac{d^2v}{dy^2}$$

Tekanan piston pada ujung bawah piston diberikan

$$P = \frac{P}{\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)} = \frac{4P}{\pi D^2}$$

Gaya tekanan di sekitar piston adalah

$$P(\pi D dy) = \frac{4P}{D} dy$$

dimana  $(\pi D dy)$  menunjukkan luas annular antara  $y$  dan  $(y + dy)$ . Jika diasumsikan kecepatan rata-rata seragam pada arah gerakan pada fluida, maka gaya pada persamaan (E.3) dan (E.5) harus sama, diperoleh

$$\frac{4P}{D} dy = -\pi D l dy \pi \frac{d^2 v}{dy^2}$$

$$\frac{d^2 v}{dy^2} = -\frac{4P}{\pi D^2 l \mu}$$

Dengan mengintegrasikan dua kali dan memberikan kondisi batas  $v = -v$  pada  $y = 0$  dan  $v = 0$  pada  $y = d$ , kita peroleh

$$v = \frac{2P}{\pi D^2 l \mu} (yd - y^2) - v_0 \left(1 - \frac{y}{d}\right)$$

Debit rata-rata yang melewati ruang antara piston dan silinder dapat diperoleh dengan mengintegrasikan debit fluida yang dipindahkan karena gerakan piston diantara  $y = 0$  dan  $y = d$ .

$$Q = \int_0^d v \pi D dy = \left[ \frac{2Pd^2}{6\pi D^2 l \mu} - \frac{1}{2} v_0 d \right]$$

Volume aliran fluida yang melewati ruang antara per detik harus sama dengan volume per detik yang dipindahkan oleh piston. Sehingga kecepatan piston harus sama debit rata-rata fluida dibagi dengan luas piston.

$$v_0 = \frac{Q}{\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)}$$

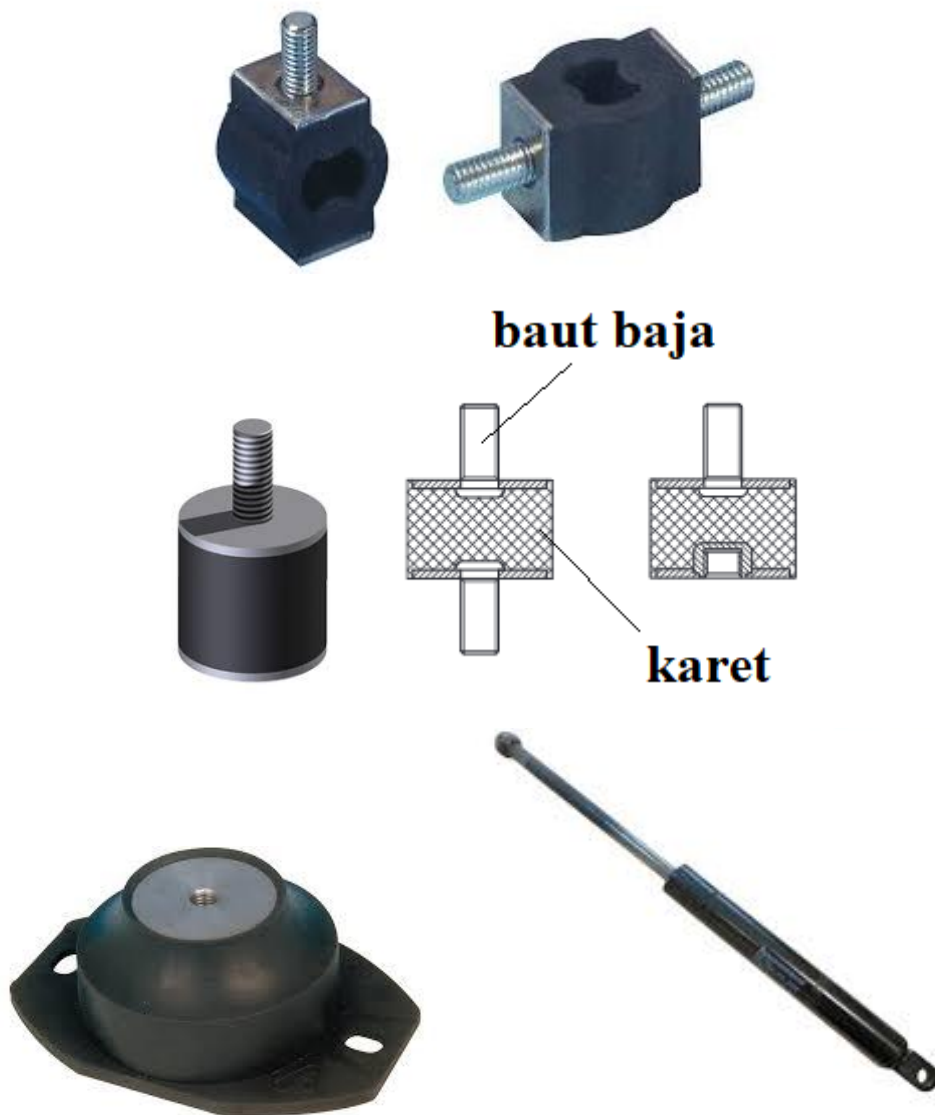
Dengan memasukkan  $Q$  pada persamaan tekanan, maka

$$P = \left[ \frac{3\pi D^3 l \left(1 + \frac{2d}{D}\right)}{4d^3} \right] \mu v_0$$

Persamaan tersebut bisa diganti  $P = c v$  dimana  $c$  adalah konstanta redaman yang besarnya

$$c = \mu \left[ \frac{3\pi D^3 l \left(1 + \frac{2d}{D}\right)}{4d^3} \right]$$

Beberapa contoh element redaman yang terbuat dari karet.



Gambar 8.5. Beberapa contoh element redaman yang terbuat dari karet.

## BAB IX

### ANALISIS PUTARAN POROS DAN GETARAN AKSIAL

---

Kecepatan berputar kritis juga disebut sebagai kecepatan kritis poros. Putaran kritis didefinisikan sebagai kecepatan dimana poros berputar dengan kecenderungan bergetar keras ke arah melintang jika poros berputar dalam arah horizontal. Dengan kata lain, kecepatan kritis adalah kecepatan dimana terjadi resonansi. Agar mesin-mesin rotodinamik beroperasi dengan aman dan andal, perlu dikontrol getaran di semua kondisi pengoperasian. Getaran yang berlebihan dapat menyebabkan kerusakan komponen kompene dari mesin.

Analisis getaran dapat membantu meminimalkan resonansi yang terjadi, Analisis terhadap getaran dapat membantu menghilangkan risiko kegagalan pada bantalan yang mahal, patah pada poros, atau kerusakan struktural akibat getaran berlebih. Analisa frekuensi alami dan analisa getaran paksa dari getaran aksial dan getaran putaran lateral dapat dilakukan untuk memverifikasi kesesuaian dengan aturan klasifikasi atau standar lainnya, pemilihan komponen untuk fungsionalitas yang dioptimalkan baik untuk bangunan baru dan retrofit, studi kelayakan dan konsep desain shafting dan opsi propulsi pada fase desain awal. Maupun optimalisasi operasional dan investigasi kerusakan

Dalam pembahasan tentang osilasi/getaran teredam, ditunjukkan bahwa getaran bebas hilang seiring waktu karena energi tersebut terperangkap dalam sistem bergetar atau hilang ditangkap oleh redaman. Persamaan getaran untuk perpindahan/amplitudo dalam osilasi teredam adalah seperti Pers. (9.1)

$$x(t) = Ce^{-\delta\omega_n t} \cdot \cos(\omega t) \quad (9.1)$$

dimana

$\delta$  = adalah rasio redaman

$\omega_n$  = frekuensi sudut alami.

Jika

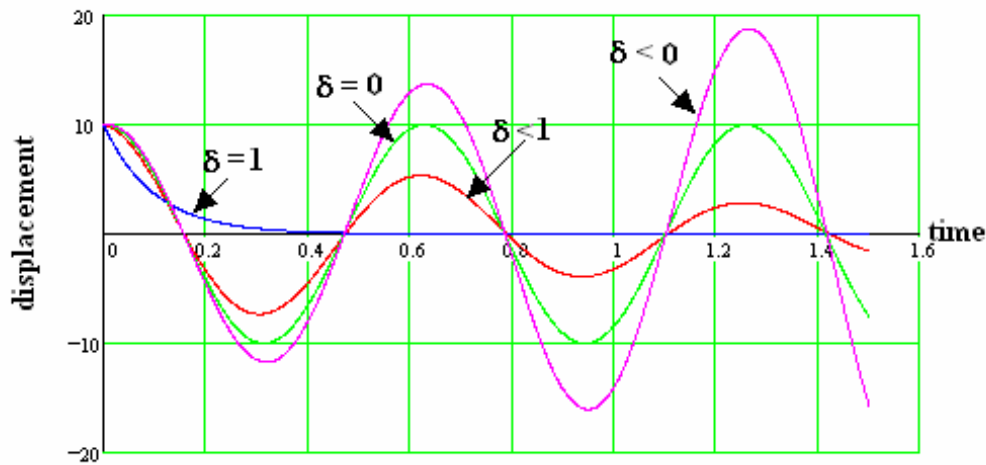
$\delta > 1$  kita memiliki sistem over damped.

$\delta = 1$  kita memiliki osilasi teredam kritis.

$\delta < 1$  kita memiliki osilasi teredam yang hilang bersama waktu.

$\delta = 0$  kami memiliki sistem tanpa redaman dan osilasi stabil terjadi

Mungkin dapat disimpulkan dari pola ini bahwa jika  $\delta < 0$  kita mendapatkan osilasi yang bertambah seiring waktu seperti pada Gambar 9.1



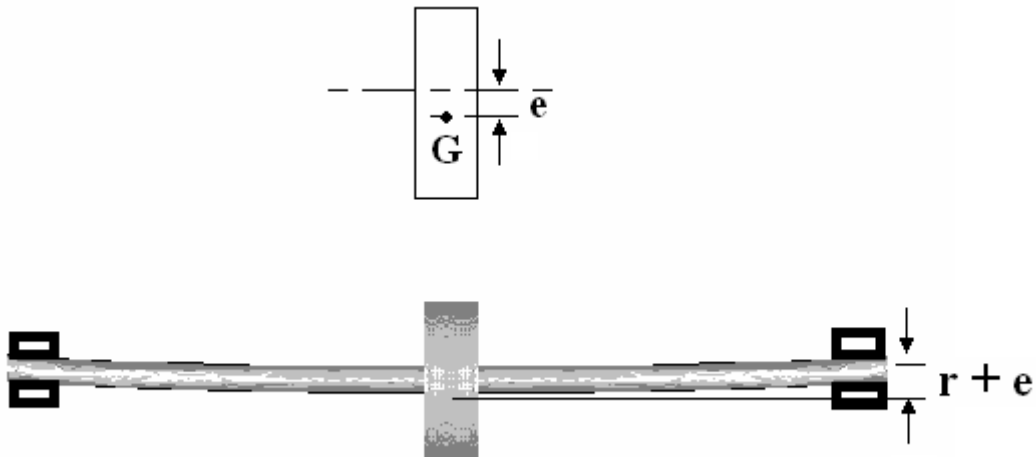
Gamabr 9.1. Grafik displacement untuk setiap kondisi  $\delta$

Agar rasio redaman  $\delta$  menjadi kurang dari nol, yaitu menjadi negatif, kita harus memiliki kebalikan dari redaman, sesuatu yang memasukkan energi ke dalam sistem, bukan mengeluarkan energi. Ketika energi ditambahkan ke sistem, amplitudo terus bertambah. Energi ditambahkan oleh sumber luar dan osilasi semacam itu disebut osilasi paksa (*force oscillation*). Sebuah contoh dari osilasi semacam itu adalah seorang anak di ayunan. Jika tidak ada yang mendorong ayunan, gesekan akan membuat ayunan berhenti. Jika seseorang memberi ayunan sedikit dorongan saat dia memulai setiap ayunan, energi ditambahkan ke sistem dan ayunan itu semakin tinggi dan semakin tinggi. Fenomena ini juga dikenal sebagai eksitasi.

Dalam rekayasa, banyak struktur yang cenderung bergetar ketika berada pada atau dekat frekuensi alami. Contohnya adalah apa yang terjadi pada mobil ketika roda tidak seimbang atau ketika berkendara di sepanjang permukaan bergelombang. Jika gangguan mendekati frekuensi alami dari sistem suspensi, kendaraan mungkin terpental tidak terkendali. Kendaraan dilengkapi dengan peredam untuk mencegah hal ini.

Ketika sebuah poros berputar, ada kemungkinan berada atau masuk ke osilasi melintang. Jika poros tidak seimbang, gaya sentrifugal yang dihasilkan akan menyebabkan poros bergetar. Ketika poros berputar pada kecepatan yang sama dengan frekuensi alami osilasi transversal, getaran ini menjadi besar dan muncul sebagai putaran poros. Ini juga terjadi pada kelipatan dari kecepatan resonansi. Ini bisa sangat merusak mesin-mesin

rotodinamik yang berat seperti turbin generator. Sistem harus seimbang untuk mengurangi efek ini dan dirancang untuk memiliki frekuensi alami yang berbeda dengan kecepatan rotasi. Saat memulai atau menghentikan mesin seperti itu, kecepatan kritis harus dihindari untuk mencegah kerusakan pada bantalan dan sudu turbin.



Gambar 9.2. Poros berputar dimana pusat massa tidak berada di sumbu poros

Ketika poros berputar, gaya sentrifugal akan menyebabkannya bending. Jika defleksi poros adalah  $r$ , jarak ke pusat gravitasi menjadi  $r + e$ . Ketika poros berputar pada kecepatan  $\omega$  rad/s dan kekakuan transversal adalah  $k$ , amaka

→ Karenanya, gaya defleksi adalah  $F = k_t r$

→ Gaya sentrifugal adalah  $M\omega^2 (r + e)$

maka

$$k_t r = M\omega^2 (r + e) \text{ from which } r = \frac{M\omega^2 (r + e)}{k_t} = \frac{M\omega^2 r}{k_t} + \frac{M\omega^2 e}{k_t}$$

$$r = \frac{M\omega^2 e}{k_t \left(1 - \frac{M\omega^2}{k_t}\right)} \text{ It has already been shown that } \frac{k_t}{M} = \omega_n^2 \quad r = \frac{\omega^2 e}{\omega_n^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)} = \frac{e}{\left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)^2 - 1}$$

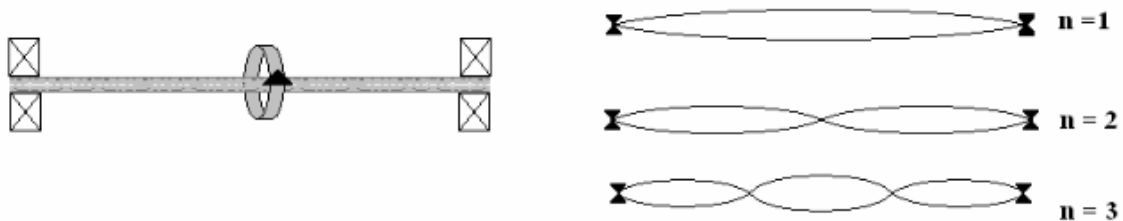
(9.2)

Dari sini kita melihat bahwa ketika  $\omega \rightarrow 0$  yang tak terhingga. Ini berarti bahwa tidak peduli seberapa kecil jarak ketidakseimbangan  $e$ , poros akan berputar pada frekuensi alami. Balancing memang membantu tetapi tidak pernah sempurna sehingga harus dihindari. Frekuensi dimana putaran terjadi dihitung dengan metode yang sama seperti untuk getaran melintang balok.

Poros dengan ujung bebas berputar normal ke sumbu (mis. Bantalan pelurusan sendiri)

$$f = \frac{\pi}{2} n^2 \sqrt{\frac{gEI}{wL^4}} \quad (9.3)$$

dimana  $n$  adalah mode dan harus berupa bilangan bulat 1, 2, 3 .....



### Poros dengan bantalan tetap atau chuck

Kecepatan kritis terendah adalah

$$f = 3.562 \sqrt{\frac{gEI}{wL^4}}$$

dan kecepatan kritis yang lebih tinggi diberikan oleh

$$f = \frac{\pi}{2} \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 \sqrt{\frac{gEI}{wL^4}}$$

dimana  $n = 2, 3, \dots$  (kecepatan terendah terjadi bila  $n = 1$ )



### Cantilever

Kecepatan kritis terendah

$$f = 0.565 \sqrt{\frac{gEI}{wL^4}}$$

$$f = \frac{\pi}{2} \left( n - \frac{1}{2} \right)^2 \sqrt{\frac{gEI}{wL^4}}$$

Dimana  $n = 2, 3, \dots$  (kecepatan terendah terjadi bila  $n = 1$ )



### Contoh soal

1. Sebuah poros berdiameter 30 mm dengan panjang 4 m dianggap simple beam. Density material 7,930 kg/m<sup>3</sup>,  $E = 205$  GPa. Hitunglah ketiga frekwensi pertamanya

### Penyelesaian:

→ Berat poros (*weight*) setiap meternya

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \times 0.03^2}{4} = 706.9 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \quad \text{Volume} = A \times l = 706.9 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\text{Weight} = \rho \times A \times g = 7830 \times 706.9 \times 10^{-6} \times 9.81 = 54.3 \text{ N/m}$$

→ Momen Inersia poros

$$I = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi \times 0.03^4}{64} = 39.76 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

→ Selanjutnya hitung frekwensi pertama (terendah)

$$f_n = 1.572 \sqrt{\frac{gEI}{wL^4}} = 1.572 \sqrt{\frac{9.81 \times 205 \times 10^9 \times 39.76 \times 10^{-9}}{54.3 \times 4^4}} = 3.77 \text{ rev/s}$$

→ Frekwensi kedua dan ketiga

$$f_2 = 3.77 \times 2^2 = 15.1 \text{ rev/s}$$

$$f_3 = 3.77 \times 3^2 = 33.9 \text{ rev/s}$$

2. Pada sebuah poros ringan terpasang sebuah pulley ditengah tengah dan pisat berat terletak pada sumbu poros. Poros ditopong oleh *self aligning bearing* di kedua ujungnya. Poros mengalami defeksi 0,5 mm akibat berat statis poros. Hitunglah kecepatan kritis terendah poros

### Penyelesaian:

→ Frekwensi poros



$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{x_s}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{9.81}{0.0005}} = 22.3 \text{ Hz}$$

→ Kecepatan kritis =  $60 \times 22,3 = 1338 \text{ rev/min}$

3. Poros pada soal no.2 memiliki beban merata 40 N/m dan kedua bantalan berjarak 1,2 m. Kekakuan flektural poros (EI) adalah 4500 N/m<sup>2</sup>. Berapakah kecepatan kritis poros?

**Penyelesaian:**

→ Frekwensi poros akibat beban merata

$$f = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{gEI}{wL^4}} = 1.572 \sqrt{\frac{9.81 \times 4500}{40 \times 1.2^4}} = 36.3 \quad N = 60f = 2176 \text{ rev/min}$$

→ Kecepatan kritis

$$\frac{1}{N^2} = \frac{1}{N_1^2} + \frac{1}{N_2^2} = \frac{1}{1338^2} + \frac{1}{2176^2}$$

$$N = 1140 \text{ rev/min (rpm)}$$

4. Kawat baja berdiameter 2 mm dipasang pada dua buah chuck yang berjarak 1 m. Kawat memiliki berat 0,241 N/m. Kekakuan flektural 0,157 N/m<sup>2</sup>. Hitunglah putaran kritis ke-1 dan ke-2

**Penyelesaian:**

→ Frekwensi terendah (ke-1) akibat berat terdistribusinya adalah

$$f = 3.562 \sqrt{\frac{gEI}{wL^4}} = 3.562 \sqrt{\frac{9.81 \times 0.157}{0.241 \times 1^4}} = 9$$

→ Putaran kritis ke-1

$$N = 60f = 540 \text{ rev/min}$$

→ Frekwensi ke-2

$$f = \frac{\pi}{2} \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 \sqrt{\frac{gEI}{wL^4}} = \frac{\pi}{2} \left( 2 + \frac{1}{2} \right)^2 \sqrt{\frac{9.81 \times 0.157}{0.241 \times 1^4}} = 24.8$$

→ Putaran kritis ke-2

$$N = 60 \times 24.8 = 1489 \text{ rev/min}$$

**Latihan Soal**

1. Sebuah poros berdiameter 30 mm terbuat dari Baja dengan density 7830 kg/m<sup>3</sup>. Poros terpasang pada dua buah selg aligning bearing berjarak 2.2 m. Modulus elastisitas baja 200 GN/m<sup>2</sup>. Hitunglah
  - a. Berat poros per meter (54,3 N/m)
  - b. Kecepatan kritis terendah poros (738 rev/min)
  - c. Kecepatan kritis poros jika terjadi defleksi 1,5 mm akibat pulley di tengah tengah poros (760 rev/min)
2. Batang berdiameter 5 mm ditahan kedua ujungnya dengan chuck yang berjarak 0.8 m. Berat batang 1,508 N/m dan kekakuan flektural  $EI = 6,136 \text{ N/m}^2$ . Hitunglah kecepatan kritis ke 1 dan ke 2 (2110 rev/min dan 5815 rev/min)
3. Sebuah poros yang dianggap sebagai *simply supported* memiliki diameter 50 mm dan panjang 8 m. Density 7.830 kg/m<sup>3</sup>,  $E = 205 \text{ GPa}$ . Hitunglah frekwensi kritis ke 1, 2, dan 3 (1,571 ; 6,279 ; 13,13 Hz)
4. Batang aluminium salah satu ujungnya pada chuck dan ujung lainnya bebas. Diameter dan panjang batang adalah 12 mm dan 400 mm. Density aluminium 2710 kg/m<sup>3</sup> dan modulus elastisitas 71 GPa. Hitunglah kecepatan kritis ke 1 dan ke 2 (3253 rev/min dan 20350 rev/min)

**Daftar Pustaka**

1. Grant R. Fowles; George L. Cassiday (2005). *Analytical Mechanics* (7<sup>th</sup> Ed.). Thomson Brooks/Cole
2. ["Simple Harmonic Motion – Concepts"](https://www.webassign.net/question_assets/ncsucal)  
[https://www.webassign.net/question\\_assets/ncsucal](https://www.webassign.net/question_assets/ncsucal)
3. Thornton, Stephen T.; Marion, Jerry B. (2003). *Classical Dynamics of Particles and Systems* (5<sup>th</sup> Ed.). Brooks Cole
4. Walker, Jearl (2011). *Principles of Physics* (9<sup>th</sup> Ed.). Hoboken, N.J.: Wiley. ISBN 0-470- 56158-0. John R Taylor (2005). *Classical Mechanics*. University Science Books.
5. S. Graham Kelly (2011), *Mechanical Vibrations: Theory and Applications* 1<sup>st</sup> Edition, Publisher : Cengage Learning.
6. Michel Lalanne, Patrick Berthier, Johan Der Hagopian (2008), *Mechanical Vibrations for Engineers*, John Wiley and Sons
7. Didik Nurhadiyanto (2015), *Getaran Struktur*, Penerbit K-Media Perum Pondok Indah Banguntapan, Blok B-15 Potorono, Banguntapan, Bantul. Yogyakarta
8. Erwin Kreyszig (2011), *Advanced Engineering Mathematics*, 10<sup>st</sup> Edition Publisher Wiley