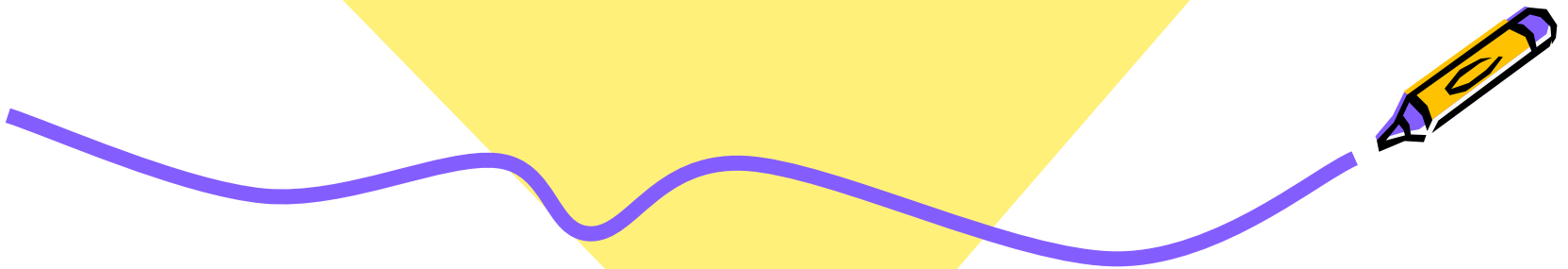




Medan Listrik dan Hukum Gauss



Medan Listrik

Jika kita mempunyai muatan titik q_1, q_2, \dots, q_n terletak pada jarak r_1, r_2, \dots, r_n dari Q , maka gaya total pada muatan Q adalah

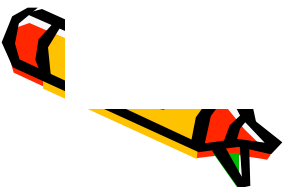
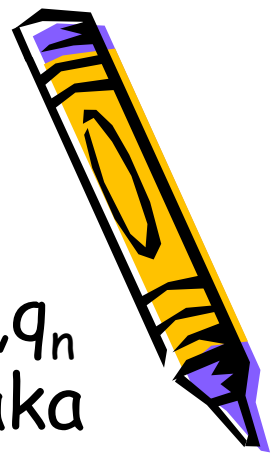
$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 Q}{r_1^2} \hat{\mathbf{r}}_1 + \frac{q_2 Q}{r_2^2} \hat{\mathbf{r}}_2 + \dots \right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 \hat{\mathbf{r}}_1}{r_1^2} + \frac{q_2 \hat{\mathbf{r}}_2}{r_2^2} + \frac{q_3 \hat{\mathbf{r}}_3}{r_3^2} + \dots \right),\end{aligned}$$

or

$$\boxed{\mathbf{F} = QE,}$$

where

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i.$$



Contoh Soal

Carilah \mathbf{E} pada (0,3,4) m dalam koordinat Cartesian yang diakibatkan oleh muatan titik $Q = 0.5 \mu\text{C}$ dititik pusat koordinat.!

Penyelesaian :

Dalam kasus ini,

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = (0-0) \mathbf{i} + (3-0) \mathbf{j} + (4-0) \mathbf{k} = 3 \mathbf{j} + 4 \mathbf{k}$$

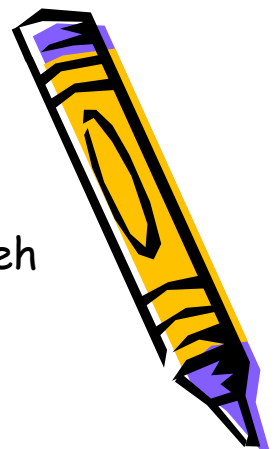
$$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\mathbf{r} = \frac{3 \mathbf{j} + 4 \mathbf{k}}{5} = 0,6 \mathbf{j} + 0,8 \mathbf{k}$$

intensitas medan listrik adalah

$$\mathbf{E} = \frac{0,5 \times 10^{-6}}{4\pi(10^{-9} / 36\pi)5^2} (0,6 \mathbf{j} + 0,8 \mathbf{k})$$

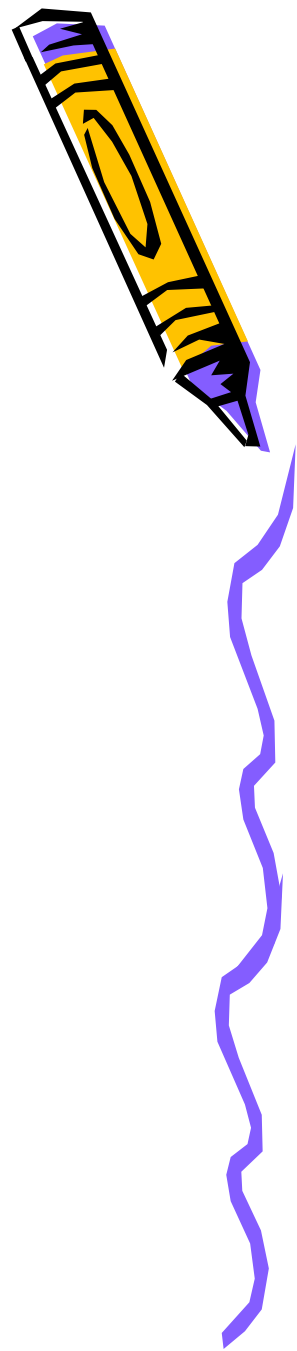
Jadi $|\mathbf{E}| = 180 \text{ V/m}$ dalam arah $0,6 \mathbf{j} + 0,8 \mathbf{k}$



Latihan Soal

Kerjakan secara mandiri

Problem 2.2 halaman 61 (Griffiths)

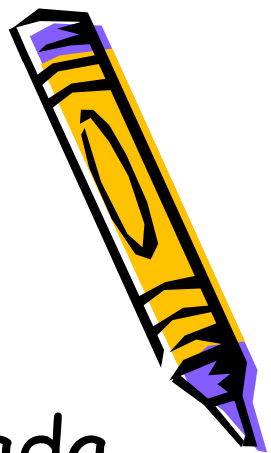


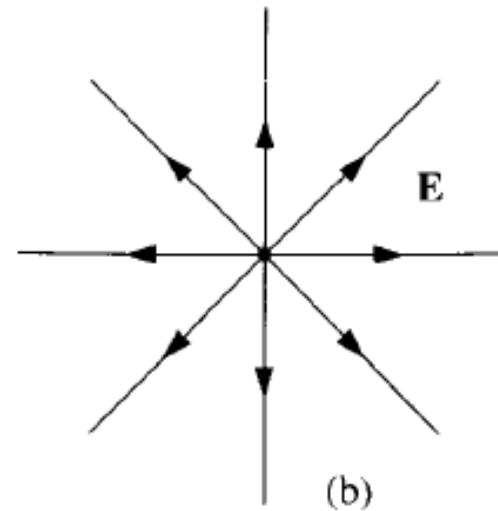
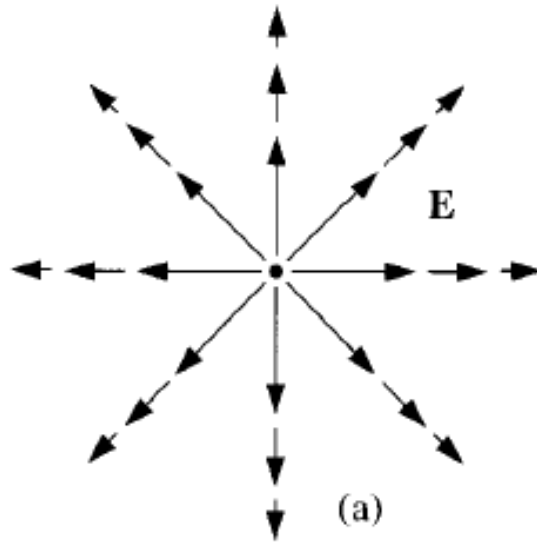
Garis Medan

Medan oleh muatan tunggal q yg berada dlm ruang hampa dinyatakan sebagai berikut:

$$\mathbf{E}_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

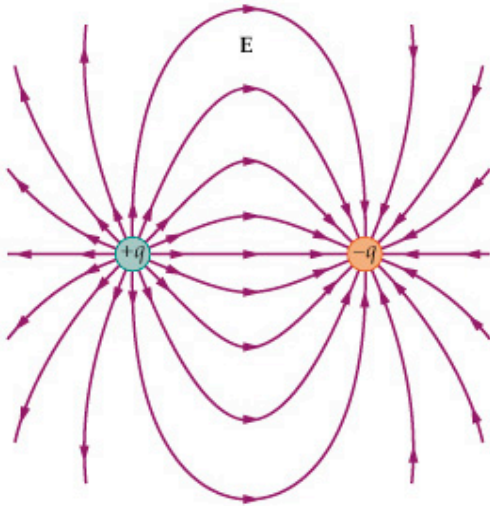
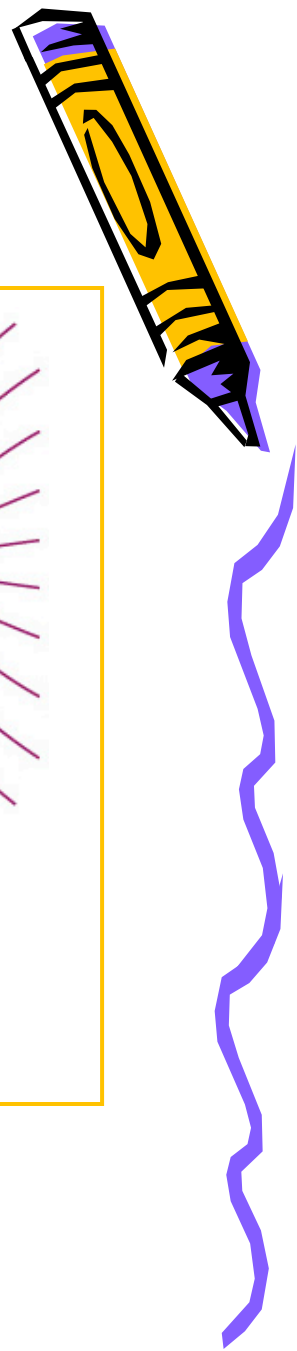
Hal ini menunjukkan bhw kuat medan listrik berbanding terbalik dengan kuadrat jarak titik tsb ke sumber muatan, atau $E \sim 1/r^2$.





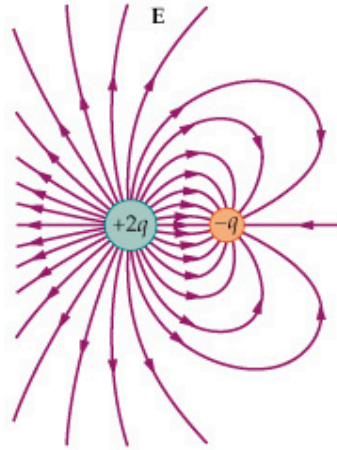
Vektor medannya ditunjukkan pd gbr (a) di atas, kuat medan dinyatakan oleh **panjang garis** dan arah vektor dinyatakan oleh **anak panah**. Untuk memudahkan dlm menggambarkan medan, dibuatlah **garis-garis medan** spt gbr (b). Dimana kuat medan dinyatakan oleh **kerapatan garis**, atau $n/(4\pi r^2)$, yg ternyata tetap sesuai dgn hukum Coulomb bhw kuat medan berbanding terbalik dgn kuadrat jarak, atau $E \sim 1/r^2$.

Gambar garis medan listrik untuk beberapa muatan yang berbeda



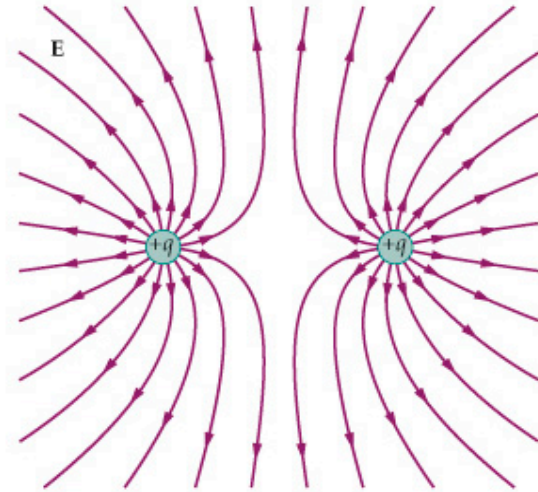
(a)

(a) tarik menarik



(b)

(b) tarik menarik



(c)

(c) tolak menolak



Hukum gauss

Jika muatan titik q terletak di pusat koordinat, maka fluks \mathbf{E} yg melalui bola berjari-jari \mathbf{r} yg tttk pusatnya berimpit dgn pusat koordinat adalah:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \iint \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r^2} \hat{r} \right) \cdot (r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, \hat{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} q$$

Jika di pusat koordinat terdpt lebih dari satu muatan tttk sumber, misal q_1, q_2, \dots , maka berlaku prinsip superposisi, shg:

$$\mathbf{E} = \sum_i^n \mathbf{E}_i$$

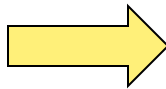


Fluks E yang melalui permukaan yg melingkupinya dinyatakan sebagai berikut:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \left(\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\epsilon_0} q_i$$

Atau

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_c$$



Hukum Gauss dlm bentuk integral

Q_c adalah total muatan yg tercakup oleh permukaan Gauss



Hukum gauss dlm bentuk integral dpt diturunkan mjd berbentuk differensial, yaitu dg bantuan teorema divergensi sehingga :

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int (\nabla \cdot \mathbf{E}) d\tau$$

Sedangkan

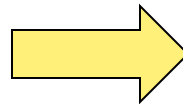
$$Q_c = \int \rho d\tau$$

Sehingga hukum Gauss dpt ditulis :

$$\int (\nabla \cdot \mathbf{E}) d\tau = \int \left(\frac{1}{\epsilon_0} \rho \right) d\tau$$

Kedua ruas pers di atas merup integral volume, sehingga kedua integran sama yaitu:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$



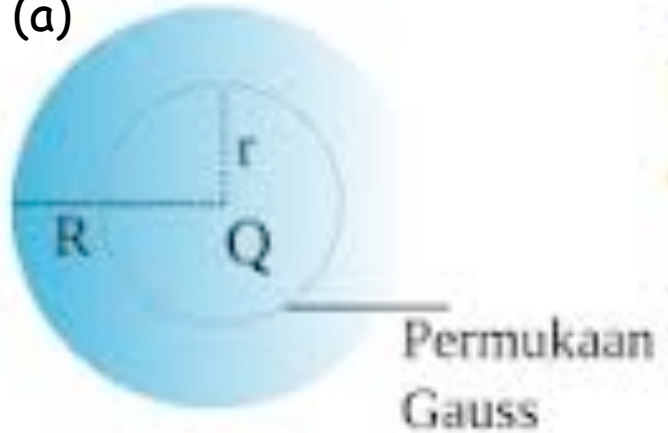
Hukum Gauss dlm bentuk differensial



Contoh Soal

Sebuah kulit bola yang berjari-jari R bermuatan listrik Q dgn distribusi serba sama σ . Tentukan medan listrik (a) di dalam bola, dan (b) di luar bola, serta (c) gambarkan grafik hubungan kuat medan listrik (E) terhadap jarak yg diukur dari pusat bola (r).

(a)



Langkah pertama utk menyelesaikan adl dgn menggambar permukaan Gauss r ($r < R$) yg berpusat di titik pusat bola

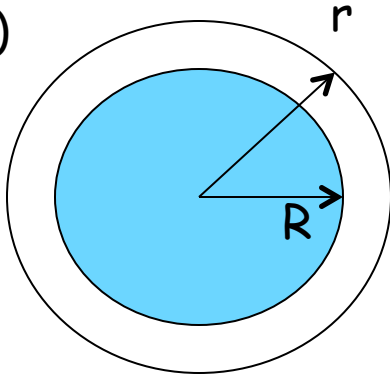
Hukum Gauss

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_c$$

Karena di dlm bola tdk ada muatan, maka muatan yg dicakupi permukaan Gauss, $Q_c = 0$, sehingga $E = 0$



(b)



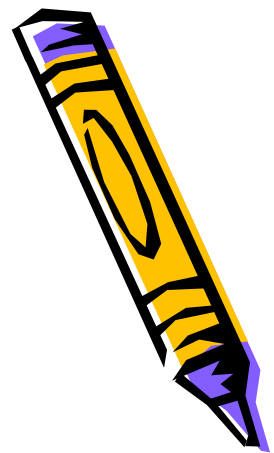
Utk menentukan medan listrik di luar bola perlu digambar permukaan Gauss yg berbentuk bola berjari-jari r ($r > R$) yg berpusat di titik pusat bola

Hukum Gauss

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_c$$

Karena permukaan Gauss melingkupi semua bola berjari-jari R maka muatan yg dicakup permukaan Gauss (Q_c) sama dg muatan total bola itu (Q), atau

$$Q_c = \int \sigma da = \sigma \int da = \sigma (4\pi R^2) = Q$$



Arah **E** di setiap titik pd permukaan Gauss searah dg **da** (**E** || **da**) ,
shg ruas kiri hukum Gauss menjadi :

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \oint E da \cos 0^\circ = \oint E da$$

Karena di setiap titik pd permukaan Gauss kuat medannya sama
maka **E** tdk bergantung pd **da**, shg dpt dikeluarkan dari integral,
yaitu:

$$E \oint da \quad \text{dengan} \quad \oint da = \text{luas permukaan Gauss} = 4\pi r^2$$

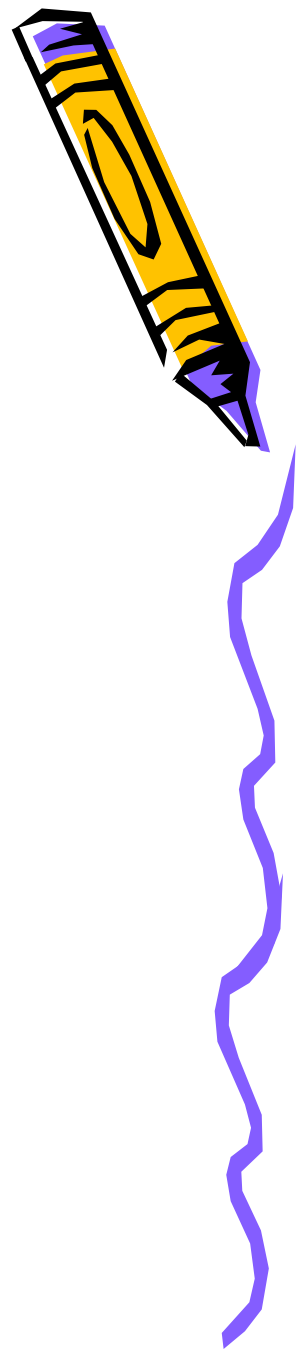
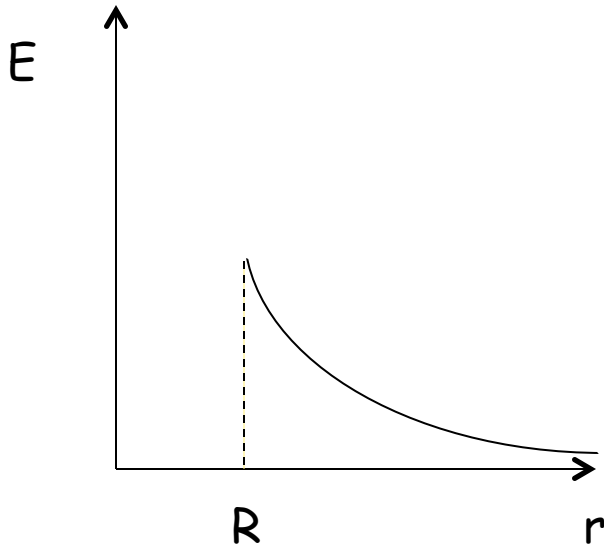
Hukum Gauss menjadi :

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \text{atau} \quad E(4\pi r^2) = \frac{\sigma(4\pi R^2)}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, \quad \text{atau} \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}, \quad \text{atau} \quad E = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

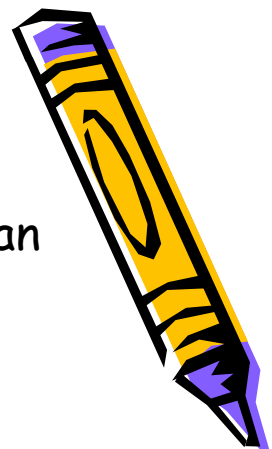


- (c) Grafik E terhadap r , di dalam maupun di luar bola
Kuat medan di dlm bola $E = 0$, dan di luar bola $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$
atau $E \sim 1/r^2$

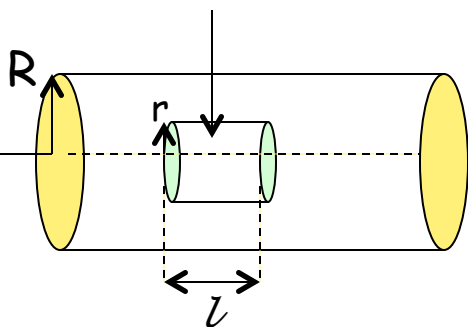


Contoh Soal

Sebuah silinder yg sangat panjang berjari-jari R dan diberi muatan $\rho = kr$, dimana k adalah konstanta dan r adalah jarak arah radial dari sumbu silinder. Tentukan medan listrik di dalam dan di luar silinder. Dan gambarkan grafik hubungan kuat medan terhadap jarak arah radial (r).



Permukaan Gauss



Penyelesaian:

Tentukan medan listrik di dlm silinder dg permukaan Gauss berbentuk permukaan kulit silinder berjari-jari r ($r < R$).

Hukum Gauss:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_C$$



E di setiap titik pd permukaan Gauss arahnya radial (searah jari-jari silinder) menembus tegak lurus permukaan Gauss ($E \parallel da$) dan kuat medannya sama, shg ruas kiri hukum Gauss adalah: $E \oint da$

Karena yg ditembus medan hanya permukaan selubung silinder yg luasnya $2\pi r l$ (alas dan tutup silinder tdk ditembus medan), maka :

$$\oint da = 2\pi r l$$

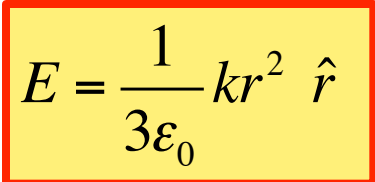
Muatan yg dicakup oleh permukaan Gauss adalah:

$$Q_C = \int \rho \, d\tau = \int_{r'=0}^r \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^l (kr') (r' dr' d\phi dz) = \frac{2}{3} \pi k l r^3$$

Variabel integrasi menggunakan r' utk membedakan dgn jari2 permukaan Gauss.

Hukum Gauss menjadi :

$$E(2\pi r l) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{2}{3} \pi k l r^3$$


$$E = \frac{1}{3\epsilon_0} k r^2 \hat{r}$$

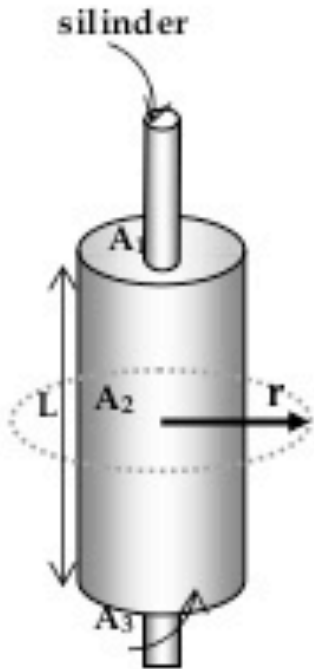


Medan Listrik Di Luar Silinder

Buat permukaan Gauss berbentuk permukaan kulit silinder berjari2 r dimana $r > R$

Hukum Gauss:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_C$$



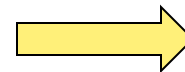
Ruas kiri Hukum Gauss $E \oint da$ dengan, $\oint da = 2\pi r l$

Muatan listrik yg dicakup oleh permukaan Gauss adl:

$$Q_C = \int \rho d\tau = \int_{r'=0}^R \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^l (kr')(r' dr' d\phi dz) = \frac{2}{3} \pi k l R^3$$

Batas integrasi sampai R krn di luar silinder ($r > R$) tdk ada muatan. Hukum Gauss menjadi:

$$E(2\pi r l) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{2}{3} \pi k l R^3$$



$$E = \frac{1}{3\epsilon_0} \frac{kR^3}{r} \hat{r}$$



Grafik E terhadap r

Kuat medan di dlm silinder $E \sim r^2$, dan di luar silinder $E \sim 1/r$, sehingga grafiknya adalah:

