

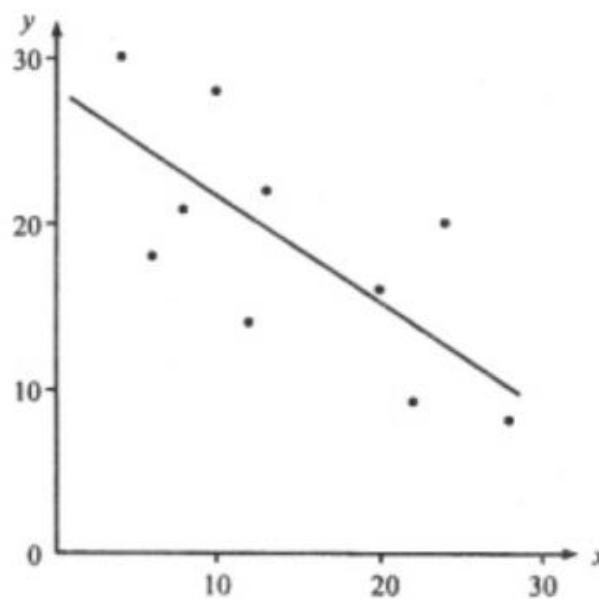
Contoh 1

Tentukan persamaan garis yang mewakili data berikut.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	4	6	8	10	14	16	20	22	24	28

Penyelesaian

Penggambaran titik-titik data pada sistem koordinat x - y diberikan dalam Gambar 4.3, yang dapat diwakili oleh garis lurus. Penyelesaian dilakukan dengan menggunakan Tabel 4.2.



Gambar 4.3. Sebaran titik-titik data pada sistem koordinat

Dari hitungan dalam Tabel 4.2., nilai rerata dari x dan y adalah :

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{152}{10} = 15,2$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{186}{10} = 18,6$$

Persamaan garis yang mewakili titik-titik data adalah :

$$y = a + bx$$

Tabel 4.2. Hitungan regresi linier

No	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1	4	30	120	16
2	6	18	108	36
3	8	22	176	64
4	10	28	280	100
5	14	14	196	196
6	16	22	352	256
7	20	16	320	400
8	22	8	176	484
9	24	20	480	576
10	28	8	224	784
Σ	152	186	2432	2912

dengan :

$$b = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$= \frac{10 \times 2432 - 152 \times 186}{10 \times 2912 - (152)^2} = -\frac{3952}{6016} = -0,6569$$

$$a = \bar{y} - b \bar{x} = 18,6 + 0,6569 \times 15,2 = 28,5849$$

Jadi persamaan garis adalah :

$$y = 28,5849 - 0,6569x$$

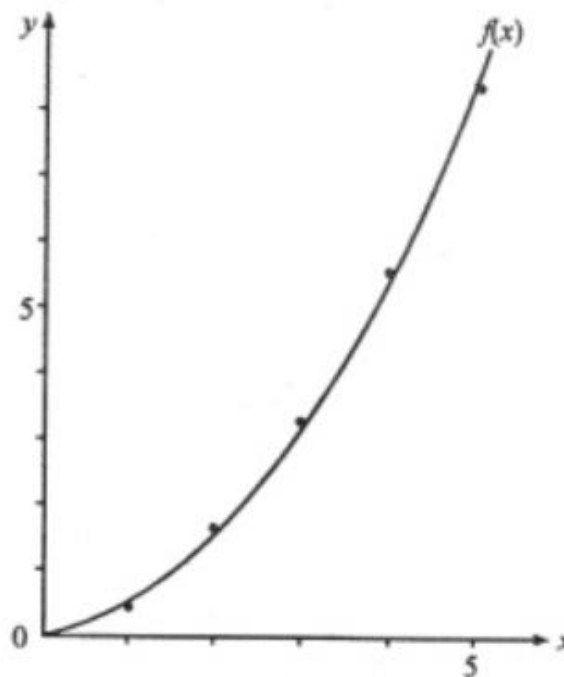
Contoh 2

Tentukan persamaan kurva lengkung yang mewakili data berikut ini.

x	1	2	3	4	5
y	0.5	1.7	3.4	5.7	8.4

Penyelesaian

Gambar 4.7. menunjukkan sebaran titik data pada sistem koordinat x-y. Dicoba untuk mencari kurva dengan menggunakan dua bentuk transformasi, yaitu transformasi log dan ln.



Gambar 4.7. Sebaran data dan kurva lengkung

a. Transformasi log

Misalkan persamaan kurva yang dicari adalah :

$$y = ax^b$$

Transformasi dengan menggunakan fungsi log, sehingga :

$$\log y = \log ax^b \rightarrow \log y = \log a + b \log x$$

Dilakukan transformasi berikut :

$$\begin{aligned} p &= \log y & B &= b \\ A &= \log a & q &= \log x \end{aligned}$$

Sehingga persamaan di atas dapat ditulis dalam bentuk :

$$p = A + B q$$

Hitungan dilakukan dengan menggunakan Tabel 4.3. Dari hitungan dalam Tabel 4.3. didapat beberapa parameter berikut ini.

$$\bar{q} = \frac{\sum \log x_i}{n} = \frac{2,0791}{5} = 0,4158$$

$$\bar{p} = \frac{\sum \log y_i}{n} = \frac{2,1411}{5} = 0,42822$$

Tabel 4.3. Hitungan regresi linier dengan transformasi log

No.	x_i	y_i	$q_i = \log x_i$	$p_i = \log y_i$	$q_i p_i$	q_i^2
1	1	0,5	0	-0,3010	0	0
2	2	1,7	0,3010	0,2304	0,0693	0,0906
3	3	3,4	0,4771	0,5315	0,2536	0,2276
4	4	5,7	0,6020	0,7559	0,4550	0,3624
5	5	8,4	0,6990	0,9243	0,6461	0,4886
Σ	15	19,7	2,0791	2,1411	1,4240	1,1692

Koefisien A dan B dihitung dengan Persamaan (4.11) dan (4.12).

$$\begin{aligned} B &= \frac{n \sum q_i p_i - \sum q_i \sum p_i}{n \sum q_i^2 - (\sum q_i)^2} \\ &= \frac{5 (1,4240) - (2,0791) (2,1411)}{5 \times 1,1692 - 2,0791 \times 2,0791} = \frac{2,6684}{1,5233} = 1,7572 \end{aligned}$$

Setelah nilai B didapat kemudian dicari nilai A :

$$A = \bar{p} - B \bar{q} = 0,42822 - 1,7572 \times 0,4158 = -0,3024$$

Dengan demikian persamaan transformasi adalah :

$$p = -0,3024 + 1,7572 q$$

Mengingat :

$$A = \log a \rightarrow -0,3024 = \log a \rightarrow a = 0,4984$$

$$B = b \rightarrow b = 1,7572$$

maka persamaan yang dicari adalah :

$$y = 0,4984 x^{1,7572}$$

b. Transformasi ln

Misalkan persamaan kurva mempunyai bentuk :

$$y = a e^{bx}$$

Transformasi dengan menggunakan fungsi ln, sehingga persamaan di atas menjadi :

$$\ln y = \ln a e^{bx} = \ln a + \ln e^{bx}$$

$$\ln y = \ln a + bx$$

Dilakukan transformasi berikut :

$$p = \ln y$$

$$q = x$$

$$A = \ln a$$

$$B = b$$

Sehingga persamaan di atas dapat ditulis dalam bentuk :

$$p = A + B q$$

Hitungan dilakukan dengan menggunakan Tabel 4.4.

Dari hitungan Tabel 4.4. didapat beberapa parameter berikut ini.

$$\bar{q} = \frac{\sum q_i}{n} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\bar{p} = \frac{\sum p_i}{n} = \frac{4,93}{5} = 0,986$$

Tabel 4.4. Hitungan regresi linier dengan transformasi ln

No	$x_i = q_i$	y_i	$q_i^2 = x_i^2$	$p_i = \ln y_i$	$q_i p_i$
1	1	0,5	1	-0,6931	-0,6931
2	2	1,7	4	0,5306	1,0612
3	3	3,4	9	1,2238	3,6714
4	4	5,7	16	1,7405	6,962
5	5	8,4	25	2,1282	10,641
Σ	15	19,7	55	4,93	21,6425

Koefisien A dan B dihitung dengan Persamaan (4.11) dan (4.12).

$$B = \frac{n \sum q_i p_i - \sum q_i \sum p_i}{n \sum q_i^2 - (\sum q_i)^2}$$

$$= \frac{5 \times 21,6425 - 15 \times 4,93}{5 \times 55 - (15)^2} = \frac{34,2625}{50} = 0,68525$$

Setelah nilai B didapat kemudian dicari nilai A , yaitu :

$$A = \bar{p} - B \bar{q} = 0,986 - 0,68525 \times 3,0 = -1,06975$$

Dengan demikian persamaan transformasi adalah :

$$p = -1,06975 + 0,68525 q$$

Mengingat :

$$A = \ln a \rightarrow -1,06575 = \ln a \rightarrow a = 0,3431$$

$$B = b \rightarrow b = 0,68525$$

maka persamaan yang dicari adalah :

$$y = 0,3431 e^{0,68525 x}$$

Untuk memilih salah satu dari kedua hasil terbaik, dihitung nilai koefisien korelasi. Koefisien korelasi dihitung dengan menggunakan Persamaan (4.13) :

$$r = \sqrt{\frac{D_t^2 - D^2}{D_t^2}}$$

dengan

$$D_t^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$

$$D^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1 x)^2$$

Hitungan dilakukan dengan menggunakan Tabel 4.5.

Tabel 4.5. Hitungan koefisien korelasi

No	x_i	y_i	Transformasi log			Transformasi ln		
			$g(x_i)$	D^2	D_t^2	$g(x_i)$	D^2	D_t^2
1	1	0,5	0,4984	0,000003	11,8336	0,6835	0,03367	11,8336
2	2	1,7	1,6848	0,000231	5,0176	1,3563	0,11813	5,0176
3	3	3,4	3,4354	0,00125	0,2916	2,6912	0,50240	0,2916
4	4	5,7	5,6953	0,000022	3,0976	5,3401	0,12953	3,0976
5	5	8,4	8,4296	0,000876	19,8916	10,5963	4,82373	19,8916
			Σ	0,00238	40,132	Σ	5,60746	40,132

Dengan menggunakan hitungan yang diberikan dalam Tabel 4.5., dihitung nilai koefisien korelasi berikut ini.

Nilai r untuk transformasi log :

$$r = \sqrt{\frac{D_t^2 - D^2}{D_t^2}} = \frac{40,132 - 0,00238}{40,132} = 0,99997$$

Nilai r untuk transformasi ln :

$$r = \sqrt{\frac{D_t^2 - D^2}{D_t^2}} = \frac{40,132 - 5,60746}{40,132} = 0,92751$$

Dari kedua nilai tersebut, koefisien korelasi r untuk transformasi log adalah lebih besar dari transformasi ln, sehingga dapat disimpulkan bahwa persamaan yang didapat dari transformasi log adalah lebih baik.