BAB 13
Geometri Koordinat

13.1. Asal usul geometri koordinat. Sampai pada point ini siswa telah menerima pelatihan di Aljabar dan Geometri, tapi mungkin memiliki sedikit kesempatan untuk mempelajari hubungan keduanya.

Pada tahun 1637 filsuf dan ahli Matematika dari Perancis Rene’ Descartes (1596-1650) menetapkan suatu petunjuk dibidang Matematika ketika buku *La Geometri* Beliau terbitkan. Di buku ini Beliau menunjukkan hubungan antara aljabar dan geometri. Dengan penentu hubungan ini Beliau mampu mempelajari sifat geometri dengan menguji berbagai macam persamaan yang mewakili angka tersebut. Geometri digunakan untuk mempelajari persamaan. Ilmu yang mempelajari sifat geometris oleh angka dengan mempelajari persamaan mereka disebut *koordinat* atau *geometri analitik.*

13.2. Penentuan satu sumbu. Di bagian 1 kita membahas satu ke satu korepondensi yang ada antara bilangan real dan titik pada suatu garis. Himpunan titik pada garis adalah *grafik* dari himpunan bilangan yang sesuai dengan titik – titik. Garis bilangan tersebut disebut dengan *sumbu.* Diagram pada gambar 13.1

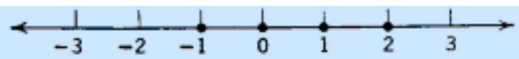


Fig. 13.1. $\{-1, 0, 1, 2\}$.

Ini menunjukkan grafik dari { -1,0,1,2 }. Gambar 13.2 menunjukkan grafik dari { xlx > -1 }. Perhatikan bahwa titik terbuka menunjukkan grafik

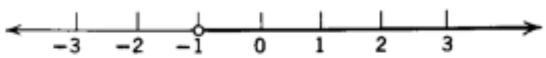


Fig. 13.2. $\{x|x > -1\}$.

menjadi setengah garis yang tidak termasuk angka -1 sebagai anggota himpunan yang dimilikinya.

Di gambar 13.3, kita melihat grafik dari semua himpunan bilangan real dari -1 sampai 2. Para ahli ilmu Matematika pasti telah mengembangkan cara singkat untuk menjelaskan himpunan seperti pada yang ditunjukkan pada gambar 13.3. Ini di tulis $\{x| -1 \leq x \leq 2\}$ dan dibaca “*x* semua bilangan real dimana *x* *x* ≥ -1 dan *x* ≤ 2.”

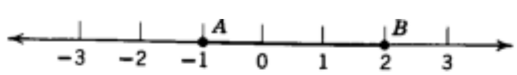


Fig. 13.3. $\{x|-1 \leq x \leq 2\}$.

Persimpangan antara semua bilangan real *x* dimana *x* kurang dari 2 dan semua bilangan real *x* dimana *x* lebih dari atau sama dengan -1 dapat ditulis $\{x|x < 2\} \cap \{x|x \geq -1\}$. Grafiknya ditunjukkan pada gambar 13.4.

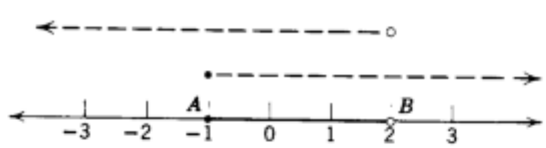
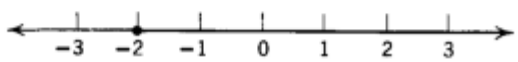


Fig. 13.4. $\{x|x < 2\} \cap \{x|x \geq 1\}$.

Latihan

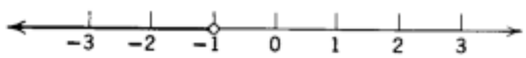
Latihan 1-6 gunakanlah notasi himpunan untuk menjelaskan himpunan yang digambarkan.

1.



Ex. 1.

2.

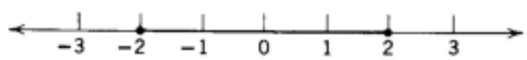


Ex. 2.

3.

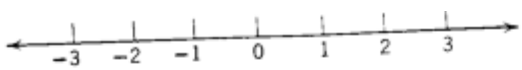
Ex. 3.

4.



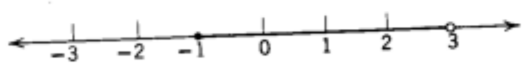
Ex. 4.

5.



Ex. 5.

6.



Ex. 6.

Latihan 7-12, gambarlah grafik untuk tiap himpunan.

7. $\{x | x < -2\}$.
8. $\{x | x \geqslant 2\}$.
9. $\{x | 5 < x < 10\}$.
10. $\{x | -4 < x < 2\}$.
11. $\{x | -2 \leqslant x \leqslant 3\}$.
12. $\{x | -1 \leqslant x < 7\}$.

Latihan 13-20, gambarlah grafik $A \cap B$ dan $A \cup B$.

13. $A = \{x | x > 1\}$ $B = \{x | x \geqslant 2\}$.
14. $A = \{x | x > 2\}$ $B = \{x | x \leqslant 4\}$.
15. $A = \{x | x < 1\}$ $B = \{x | x > -2\}$.
16. $A = \{x | x < -1\}$ $B = \{x | x > 1\}$.
17. $A = \{x | x < 1\}$ $B = \{x | x < -1\}$.
18. $A = \{x | x - 1 = 3\}$ $B = \{x | x + 1 = 5\}$.
19. $A = \{x | x - 2 = 1\}$ $B = \{x | x < 3\}$.
20. $A = \{x | x < 1\}$ $B = \{x | x > -1\}$.

13.3. Sistem koordinat kartesius. Kita sekarang akan mengembangkan metode yang mewakili titik pada suatu bidang dengan memasangkan angka. Anggaplah dua garis tegak lurus *x* dan *y* yang berpotongan di titik nol (lihat gambar 13.5). Misalkan *U* dan *V* menjadi garis pada *x* dan garis pada *y* ,masing – masing , sehingga $OU = OV = 1$.

Diberikan setiap titik pada bidang garis *x* dan *y* , misalkan *L* menjadi suku tegak lurus dari *P* ke garis *x* dan misalkan *M* menjadi suku tegak lurus dari *P* ke garis *x*. Koordinat *L* pada garis *x* disebut *x koordinat* atau *absis* titik *P*. Koordinat *M* pada garis *y* disebut *y koordinat* atau *ordinat P*. Titik perpotongan antara garis *x* dan garis *y* disebut pusat *koordinat P*. Titik yang sesuai dengan pasangan berurutan yang diperoleh dari bilangan real disebut dengan sistem koordinat kartesius. Garis *x* disebut sumbu *x* dan garis *y* disebut sumbu *y*. Titik perpotongan *O* dari sumbu – sumbu disebut pangkal dan bidang yang ditentukan oleh sumbu disebut bidang *XY*.

Koordinat suatu titik adalah pasangan berurutan dari bilangan real dimana koordinat *x* adalah angka pertama dan koordinat *y* adalah angka kedua yang dipasangkan. Koordinat titik *P* gambar 13.5 adalah (3,2) , *L* (3,0) dan *M* (0,2).

Ini sudah jelas bahwa (3,2) dan (2,3) adalah pasangan berurutan yang berbeda. Ini benar bahwa $(a,b) = (c,d)$ dan hanya jika $a = c$ dan $b = d$.

Koordinat suatu titik bergantung pada pemilihan kesatuan titik. Jika panjang

COORDINATE GEOMETRY

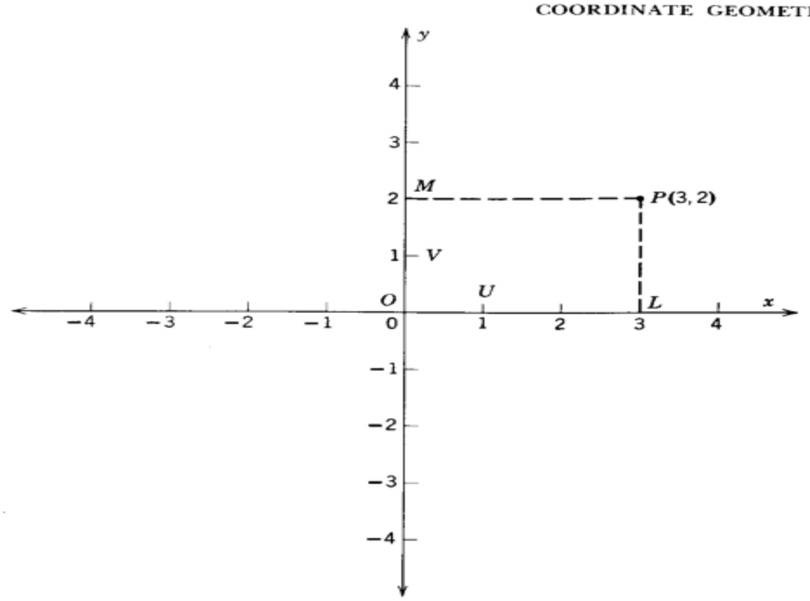


Fig. 13.5.

satuan daerah yang diberikan sistem koordinat, kamu dapat menggandakan koordinat titik tersebut. Jika kamu menggandakan panjang dari daerah satuan, koordinat pada tiap titik akan dibagi dua.

Dalil 25. *Ada satu pasang bilangan real yang ditugaskan untuk setiap titik pada system koordinat. Sebaliknya, jika (a,b) adalah pasangan berurutan dari bilangan real, ada satu titik P dan system yang mempunyai a dan b sebagai koordinatnya.*

13.4. Kuadran. Sumbu koordinat kartesius membagi bidang menjadi 4 bagian disebut dengan kuadran. Kuadran – kuadran ini di beri nomor I,II,III,IV seperti yang ditunjukkan pada gambar 13.6. *Kuadran I* adalah himpunan titik yang mana koordinat x dan y keduanya adalah positif. *Kuadran II* adalah himpunan titik yang mana koordinat x negatif sedangkan y positif. *Kuadran III* adalah himpunan titik yang mana koordinat x dan y keduanya negatif. *Kuadran IV* adalah himpunan titik yang mana koordinat x positif dan koordinat y negatif.

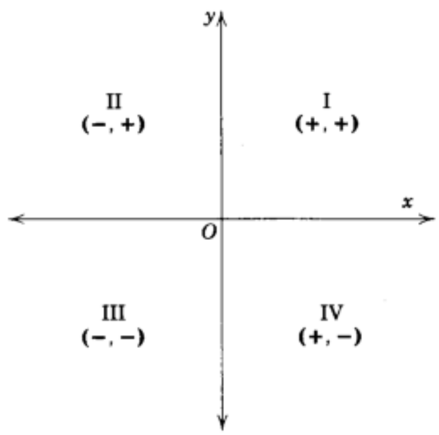
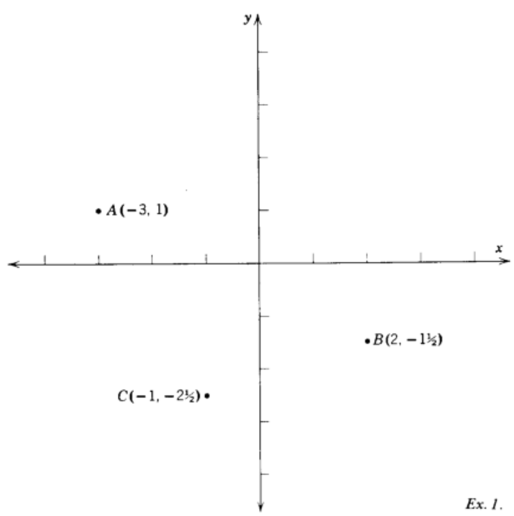


Fig. 13.6.

Proses menentukan letak suatu titik ketika koordinatnya diberikan disebut *perencanaan* atau *grafik*. Perencanaan adalah fasilitas dengan penggunaan koordinat atau kertas grafik yang mana garis sejajar membagi kertas menjadi kotak – kotak kecil.

Contoh 1 : Titik $A(-3, 1), B(2, -1\frac{1}{2}), C(-1, -2\frac{1}{2})$.

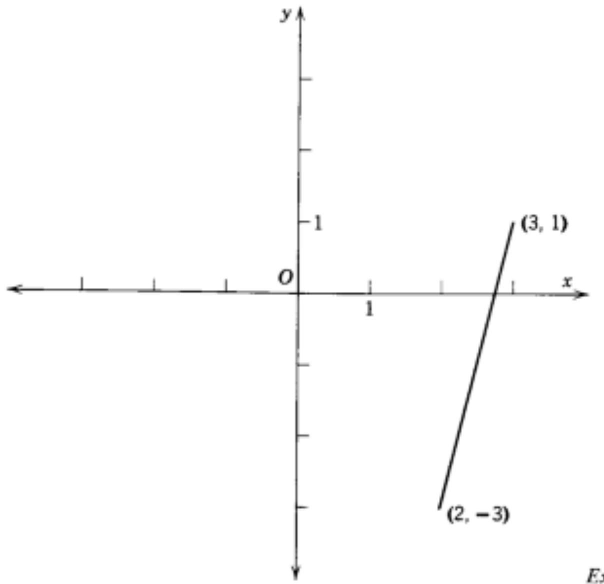
Penyelesaian:



Ex. 1.

Contoh 2 . Gambarlah sebuah garis daerah dengan titik akhir (2,-3) dan (3,1).

Penyelesaian:



Ex. 2.

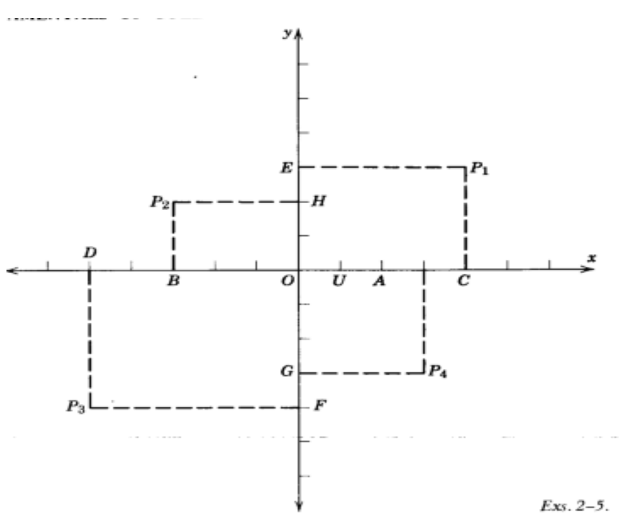
Latihan

1. Gambarlah titik A (2,0), B (0,-1), C (-2,-2), D (3, $1\frac{1}{2}$), E (- $\frac{1}{2}$,$1\frac{1}{2}$), F (3, π).
2. Pada gambar yang mengikuti, $OU = 1$. Namailah koordinat dari titik yang ditunjukkan.

	A	B	C	D	E	P_1	P_2	P_3	P_4
Koordinat x									
Koordinat y									

3. Gunakanlah gambar dari contoh soal nomor 2, tetapi OU = $\frac{1}{2}$, Lengkapilah table berikut.

	A	B	C	D	E	P_1	P_2	P_3	P_4
Koordinat x									
Koordinat y									



Exs. 2–5.

4. Gunakanlah gambar dari contoh soal nomor 2, tetapi $OU = 5$, lengkapilah table berikut.

	A	B	C	D	E	P_1	P_2	P_3	P_4
Koordinat x									
Koordinat y									

5. Gunakanlah gambar untuk contoh soal nomor 2, jika $OU = 1$, temukan *(a)* OA; *(b)* UC; *(c)* BU; *(d)* OD; *(e)* AB; *(f)* CD; *(g)* CP_1; *(h)* EP_1; *(i)* HP_2; *(j)* BP_2; *(k)* FP_3; *(l)* GP_4.
6. Jika $A = (0,0)$, $B = (3,0)$, $C = (4,5)$, $D = (1,2)$, gambarlah himpunan semua titik milik polygon $ABCD$.
7. Gambarlah sebuah titik $R(1,2)$, $S(-1,1)$, $T(-1,3)$. Menunjukkan titik yang terletak dibagian $\Delta\, RST$.
8. Gambarlah himpunan titik yang mana koordinat x adalah 2.
9. Gambarlah himpunan titik yang mana koordinat y adalah -3.
10. Gambarlah himpunan titik (x,y) dimana x dan y adalah bilangan bulat yang memenuhi syarat berikut.
    a. $x = 3$, $-2 \le y \le 4$. (dibaca "y lebih besar atau sama dengan -2 dan y juga lebih kecil atau sama dengan 4.")
    b. $y = -2$, $-1 < x < 3$.
    c. $-3 < x \le 0$, $-2 \le y < 3$.
    d. $x = 3$, $y = 1$.
11. Gambarlah himpunan titik (x,y) yang memenuhi syarat – syarat berikut.
    a. $x \ge 1, y \ge 2$.
    b. $x \leqslant 2, y \leqslant 4$.
    c. $x \geqslant 3, -3 \leqslant y \leqslant -1$.
12. Jika $A = (2,5)$ dan $B = (2,9)$, temukanlah AB.
13. Jika $R = (-3,6)$ dan $S = (2,6)$, temukanlah RS.
14. Jika $C = (8,-7)$ dan $D = (-2,-7)$, temukanlah CD.
15. Jika $A = (x_1,y_1)$ dan $B = (x_1,y_2)$, temukanlah AB.
16. Jika $K = (x_1,y_1)$ dan $L = (x_2,y_1)$, temukanlah KL.
17. Jika $E = (0,1)$ dan $F = (0,7)$, temukanlah koordinat titik tengah dari $\overline{EF}$.
18. Jika $G = (4,6)$ dan $H = (4,-2)$, temukanlah koordinat titik tengah dari $\overline{GH}$.
19. Jika $H = (x_1,y_1)$ dan $K = (x_2,y_1)$, temukanlah koordinat titik tengah dari $\overline{HK}$.
20. Jika $S = (x_1,y_1)$ dan $T = (x_1,y_2)$, temukanlah koordinat titik tengah dari $\overline{ST}$.

13.5. Rumus Jarak. Andaikan P dan Q adalah dua titik dengan koordinat (x_p,y_p) dan (x_q,y_q). Jika $\overleftrightarrow{PQ}$ tidak tegak lurus baik kepada sumbu x maupun sumbu y, kemudian tegak lurus terhadap P dan Q dan sumbu koordinat akan berpotongan pada R dan S (gambar 13.7). Ini dapat dibuktikan bahwa $\Delta\, PRQ$ adalah segitiga yang benar. (Mengapa?) $\overline{PQ}$ adalah sisi miring dari $\Delta\, PRQ$.

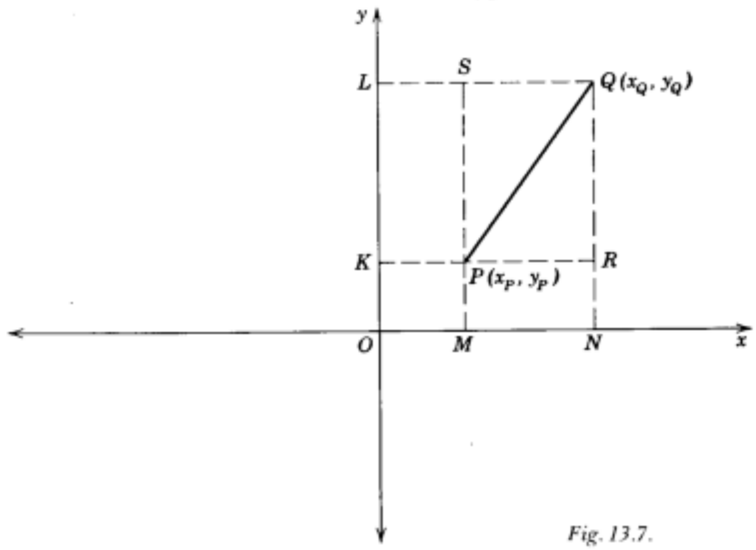


Fig. 13.7.

Menurut teorema Pitogorus,

$$(PQ)^2 = (PR)^2 + (RQ)^2$$

or

$$PQ = \sqrt{(PR)^2 + (RQ)^2}$$

Tetapi, $PR = MN = x_Q - y_P$ dan $RQ = KL = y_Q - y_P$. Gunakanlah pengganti sifat persamaan, kita mendapatkan

$$PQ = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$$

Karena $(x_Q - x_p)^2 = (x_P - x_Q)^2$ dan $(y_Q - y_P)^2 = (y_P - y_Q)^2$, kita dapat menetaptan berikut ini.

Dalil 13.1 (Rumus Jarak). Untuk dua titik P dan Q

$$PQ = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 (y_P - y_Q)^2}.$$

Siswa harus menyakinkan dirinya bahwa akan berhasil jika daerah tegak lurus terhadap salah satu sumbu.

Contoh : Temukan jarak antara P_1 (-3,-4) dan P_2 (2,-7).

Penyelesaian : Gunakanlah dalil 13.1, kita mendapatkan

$$\begin{aligned} P_1P_2 &= \sqrt{[2-(-3)]^2 + [-7-(-4)]^2} \\ &= \sqrt{25+9} \\ &= \sqrt{34} \end{aligned}$$

13.6. Titik tengah dari suatu daerah. Cukup sering kita berharap untuk menemukan koordinat suatu titik yang membagi dua daerah antara dua titik. Digambar 13.8, misalkan *M* (x_M, y_M) menjadi titik tengah dari pertautan garis daerah *A* (x_A, y_A) dan *B* (x_B, y_B). Jika menyambungkan tiap titik *A, M*, dan *B* kita menggambar garis sejajar terhadap sumbu koordinat itu kongruen, dua segitiga yang kongruen akan terbentuk. (Dapatkah Anda membuktikan segitiga tersebut kongruen?). Kita tahu bahwa $AP = MQ$. Tetapi, $AP = x_M - x_A$, dan $MQ = x_B - x_M$. Oleh karena itu,

$$x_M - x_A = x_B - x_M$$

Tambahkan $x_M + x_A$, untuk kedua istilah sebelumnya

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

COORDINATE GEOMETRY 369

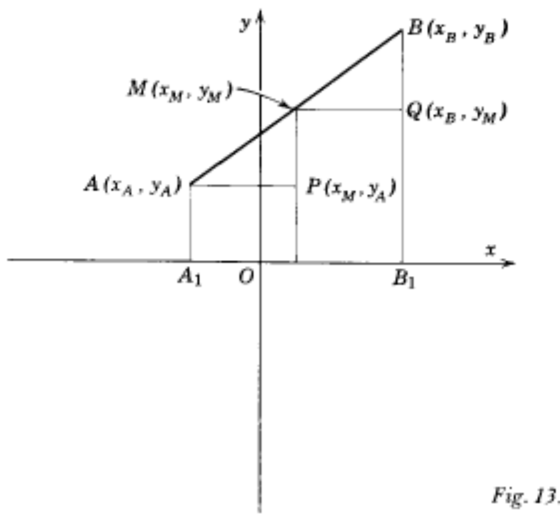


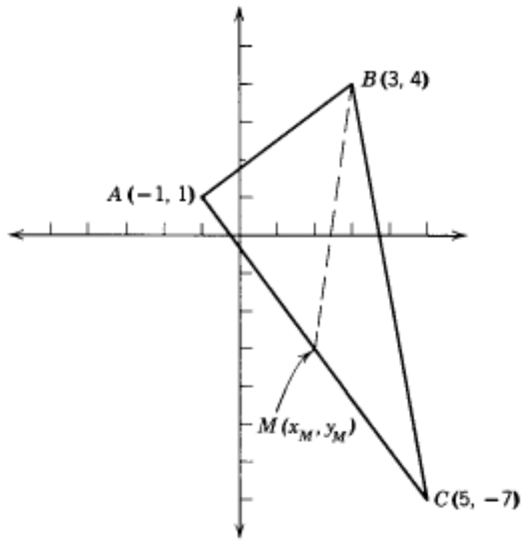
Fig. 13.8.

Demikian pula, dengan menetapkan $PM=QB$, kita mendapatkan

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Teorema 13.2 (rumus titik tengah). *M adalah titik tengah ke* $\overline{AB}$ *jika dan hanya jika* $x_M = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$ *and* $y_M = \frac{1}{2}(y_A + y_B)$.

Contoh. cari panjang median dari titik *B* ke $\Delta\, ABC$ dengan simpul berikut: *A(-1, 1),B(3, 4),C(5, -7).*



Penyelesaian:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-1+5}{2} = 2$$

$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{1-7}{1} = -3$$

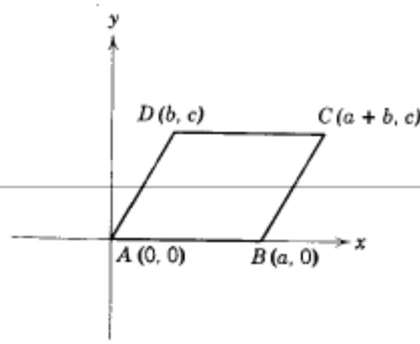
$$\begin{aligned} BM &= \sqrt{(x_M - x_B)^2 + (y_M - y_B)^2} \\ &= \sqrt{(2-3)^2 + (-3-4)^2} \\ &= \sqrt{50} \text{ or } 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

Latihan

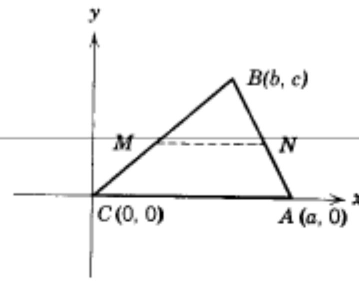
1. Diberikan titik $O(0, 0)$, $A(3, 4)$, $B(-5, 12)$, $C(15, -8)$, $D(11, -3)$, $E(-9,-4)$, tentukan panjang dari pernyataan berikut:

   (a) $\overline{OA}$; (b) $\overline{OB}$; (c) $\overline{OC}$; (d) $\overline{AD}$; (e) $\overline{AB}$; (f) $\overline{AC}$; (g) $\overline{BE}$.
2. Titik potong $A(-1, 3)$, $B(-4,7)$, $C(0,4)$. Buktikan ΔABC sama kaki.
3. Tentukan keliling dari ΔABC dari contoh 2
4. Buktikan bahwa titik $A(-2,-2)$, $B(4, -2)$, dan $C(4, 6)$ titik sudut dari segitiga siku-siku (asumsikan kebalikan dari teorema pythagoras)
5. Tentukan daerah dari ΔABC dari contoh 4
6. Buktikan bahwa $A(-4, -3)$, $B(1, 4)$ dan $C(6, 11)$ adalah koliniar
7. Buktikan bahwa $R(-3, 1)$,$S(5,6)$,dan $T(7, -15)$ adalah titik sudut dari segitiga siku-siku.
8. Buktikan bahwa $A(-2,0)$, $B(6,0)$, $C(6, 6)$, $D(-2, 6)$ titik sudut dari persegi panjang.
9. Buktikan bahwa diagonal *AC* dan *BD* dari persegi panjang contoh 8 adalah kongruen
10. Buktikan bahwa $A(-4, -1)$, $B(1, 0)$, $C(7, -3)$, dan $D(2, -4)$ adalah titik sudut dari jajaran genjang.
11. Tentukan kordinat dari titik tengah dari pernyataan dengan diberikan titik akhir
    a) (8, -5) dan (-2, 9)
    b) (7, 6) dan (3, 2)
    c) (-2, 3) dan (-9,-6)
    d) (a, b) dan (c, d)
    e) (a+b, a-b) dan (-a,b),a$\neq$ 0
12. Grafik dari segitiga yang titik sudut adalah $A(5, 2)$, $B(-3, -4)$, dan $C(8, -6)$
    Tentukan panjang dari 3 median dari segitiga
13. Buktikan bahwa titik $A(-8, -6)$, $B(4, 10)$ dan $C(4, -6)$ titik sudut dari segitiga siku-siku.
14. Tentukan kordinat dari titik tengah M dari sisi miring ΔABC dari contoh 3. Tunjukan bahwa $MA = MB = MC$
15. Diberikan titik $R(-6, 0)$, $S(6, 0)$, $T(0, 8)$; titik tengah dari $\overline{RT}$; *N* titik tengah dari $\overline{ST}$. Tunjukan bahwa $\Delta\ RST$ sama kaki dan bahwa $RN = SM$
16. Diberikan: $\Delta\ ABC$ dengan titik sudut $A(0, 0)$, $B(a,0)$ dan $C(0, b)$; *M* adalah titik tengah dari sisi miring *BC*.
    buktikan: $AM = BM = CM$
17. Diberikan : $\Delta\ ABC$ dengan titik sudut $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$ dan $C(0, b)$
    Buktikan: $\Delta\ ABC$ sama kaki; median AN = median BM.
18. Tunjukan bahwa ABCD adalah jajaran genjang jika titik sudut $A(0, 0)$, $B(a, 0)$, $C(a+b,c)$, $D(b,c)$.

19. Tentukan kordinat titik tengah dari diagonal $\square$ *ABCD* dari contoh 18 dan tunjukan analitis bahwa diagonal membagi dua sama lain



Ex. 18.



Ex. 20.

20. Buktikan secara analitik bahwa ukuran pernyataan bergabung dengan titik tengah dari dua sisi segitiga sama dengan setengah ukuran sisi ketiga.

21. Buktikan secara analitik bahwa *O*(4, 3) adalah pusat dari lingkaran melalui *P*(5, 10), *Q*(11, 4) dan *R*(-1, -2)

22. Gambar sebuah lingkaran dengan pusat *O*(2, 3) dan melalui *P*(-8, 9). Apakah lingkaran melalui: (a) *A*(8, 13)? (b) *B*(12, -3)? (c) *C*(5,-7)?

13.7. Kemiringan dan lereng. Lihat l garis lurus bahwa tidak sejajar di sumbu y. dilihat $P(x_P, y_P)$ dan $Q(x_Q, y_Q)$ setiap dua titik yang berbeda pada l (lihat gambar 13.9) dan perbandingan bilangan m ditetapkan $m = (y_Q - y_P)/(x_Q - x_P)$.

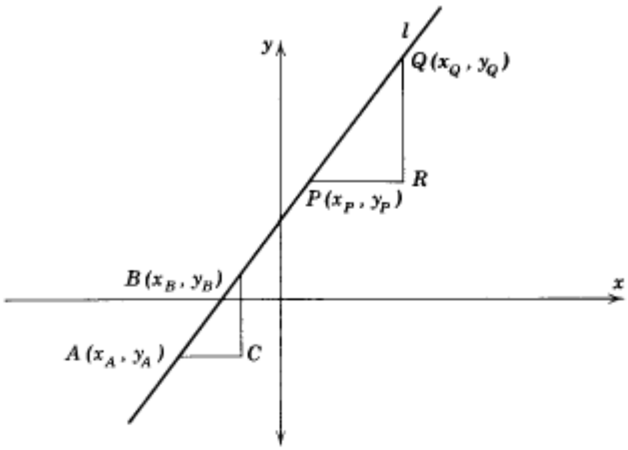


Fig. 13.9.

Pertanyaan yang muncul,''akan tidak sama sepasang titik digaris pasti tidak sama nilai untuk m?''

Beberapa pertimbangan dari titik di garis, $A(x_{A,}y_A)$ dan $B(x_{B,}y_B)$ dapat ditunjukan bahwa $\Delta ACB \sim \Delta PRQ$

Maka

$$\frac{RQ}{PR} = \frac{CB}{AC}$$

$$\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Teorema 13.3. (Kemiringan formula). Jika P$\neq Q$ *beberapa pasang titik dalam garis tidak sejajar di sumbu y dari sistem kordinat persegi panjang,mereka adalah bilangan unik*

$$m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$$

Bilangan dikatakan *kemiringan* dari garis.

Dalam bahasa awam, kemiringan adalah ukuran untuk kecuraman garis adalah perbandingan" kenaikan" ke "kaki" di garis. Jadi 10% kemiringan kenaikan 10 kaki dari setiap 100 kaki.

Lihat garis *l* memotong sumbu *x* di *B* (gambar.13.10). Jika membuat beberapa titik *P* di *l* berada di sisi positif *y* di sumbu *x* (kuadran I atau II) ketika $< a$ dikatakan *sudut yang berkecenderungan* dan $m< a$ dikatakan *cenderung pada l* . Itu harus jelas bahwa 0$\leq m < a \leq 180$

Jika garis sejajar di sumbu *x* bertepatan dengan itu maka $m< a = 0$ dan kemiringan *m = 0*. Kita mengatakan *garis horisontal*. jika garis sejajar

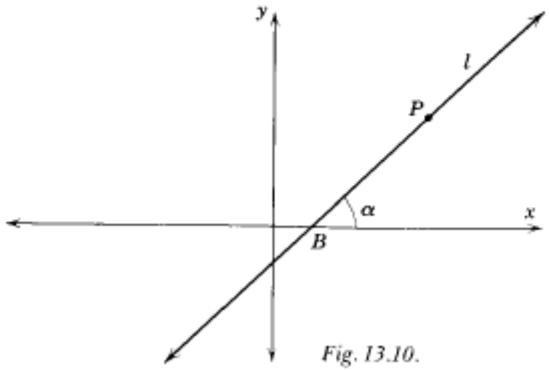


Fig. 13.10.

sumbu *y* bertepatan dengan itu, $m< a$ = 90 dan kemiringan *m* tidak menggambarkan seperti itu. Dikatakan *garis vertikal* . Kita juga berbicara horizontal dan vertikal pernyataan dan sinar.

Peninjauan fungsi kemiringan akan mengungkapkan bahwa:

1. Jika $0 < m\angle\alpha < 90,$ kemiringan *m* adalah positif dan kemiringan garis atas ke kanan.
2. Jika $90 < m\angle\alpha < 180,$ kemiringan *m* adalah negatif dan kemiringan garis bawah ke kanan.

13.8. Garis sejajar. Kapan dua garis sejajar kedua-duanya sumbu *x* mempunyai kemiringan 0. Oleh karena itu kemiringannya sama. Selanjutnya dua pertimbangan garis tidak horizontal,tidak vertikal $l_1\, dan\, l_2$ sejajar(lihat gbr 13.11). lihat sudut yang cenderung untuk garis $l_1\, dan\, l_2$ dengan $a_1\, dan\, a_2$ masing-masing. Karena $l_1 \| l_2$ kita tahu $< a_1 \cong < a_2$.

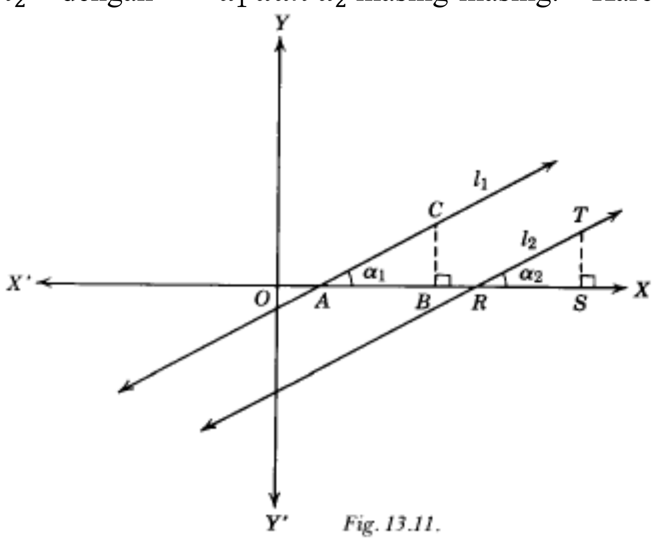


Fig. 13.11.

Jika menjatuhkan tegak lurus dari setiap titik C dalam l_1 untuk $\overleftrightarrow{XX}$, dua segitiga sama akan terbentuk. Karena itu sisi sesuai akan dalam ukuran. Bahwa

$$\frac{BC}{AB} = \frac{ST}{RS}.$$

Tetapi $BC|AB = m_1$,dan $ST \mid RS = m_2$. Maka $m_1 = m_2$ oleh sifat subtitusi. Lalu $l_1 \| l_2 \rightarrow m_1 = m_2$.

Sebaliknya, ketika $m_1 = m_2$ kita dapat menyatakan bahwa $l_1 \| l_2$ untuk $m_1 = m_2$,maka $BC|AB = RT|RS$. Sejak $< ABC \cong < RST$, kita tahu bahwa teorema 8.13 itu $\Delta ABF \sim \Delta RST$. Karena itu $< a_1 \cong < a_2$ dan $l_1 \| l_2$ oleh teorema 5.12

Teorema 13.4. *Dua garis tidak vertikal $l_1 dan$ l_2 adalah sejajar jika dan hanya jika mereka berkemiringan $m_1 dan$ m_2 adalah sama.*

$$l_1 \| l_2 \leftrightarrow m_1 = m_2$$

13.9. Garis tegak lurus. Pertimbangan dua garis tegak lurus $l_1 dan$ l_2 juga tidak vertikal dan dengan pertimbangan kemiringan $m_1 dan$ m_2 (lihat gambar 13.12). lihat P dititik yang berpotongan. Selanjutnya pilih setiap titik R

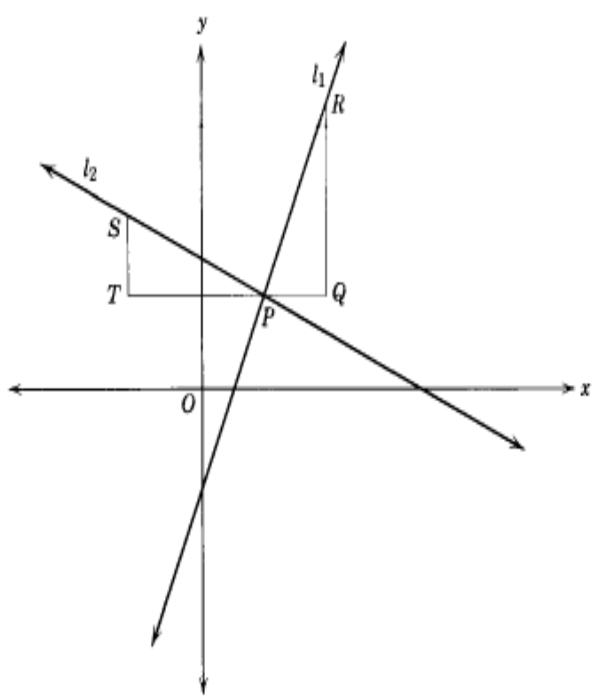


Fig. 13.12.

Di l_1 berbaring di atas dan ke kanan P dan titik S di l_2 diatas dan di kiri P adalah $PS = PR$. Oleh penggambaran garis melalui S dan R tegak lurus di sumbu x dan garis yang melalui P sejajar disumbu x, kita membentuk dua segitiga siku-siku $\Delta PQR\ dan\ \Delta PTS$.

Oleh teorema 5.19 kita dapat membuktikan $\Delta PQR \cong \Delta STP$. oleh karena itu,

$QR = TP$ dan $PQ = ST$
dan

$$\frac{QR}{PQ} = \frac{TP}{ST}$$

Tetapi,

$$\frac{QR}{PQ} = m_1\ dan\ m_2 = -\frac{ST}{TP} = -\frac{PQ}{QR}$$

Oleh karena itu,

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

Jadi, kami telah menunjukan bahwa kemiringan dua garis tegak lurus tidak vertikal adalah berbanding terbalik negatif satu sama lain. Kebalikan dari fakta ini dapat dibuktikan dengan menapak langkah kami.

Teorema 13.5. *Dua garis tidak vertikal $l_1 dan\ l_2$ adalah tegak lurus jika dan hanya jika kemiringan reciprocals negatif satu sama lain.*

$$l_1 \perp l_2 \leftrightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

Latihan

Di latihan 1-6 cari kemiringan garis yang melewati titik

1. $(7,3), (4,-3)$.
2. $(-3,3), (3,-4)$.
3. $(4,1), (-1,6)$.
4. $(-3,0), (1,2)$.
5. $(-3,2), (2,1)$.
6. $(6,-4), (2,-3)$.

Di latihan 7-12 periksa untuk melihat apakah $\overline{AB} \parallel \overline{CD}\ atau\ jika\ \overline{AB} \perp \overline{CD}$

7. $A(-4,2)$, $B(4,-1)$, $C(3,2)$, $D(11,-1)$
8. $A(2,-2)$, $B(-3,4)$, $C(5,0)$, $D(-1,-5)$
9. $A(2,4)$, $B(0,0)$, $C(-2,1)$, $D(-1,3)$
10. $A(-1,-2)$, $B(-2,-4)$, $C(3,-2)$, $D(1,-1)$
11. $A(0,4)$, $B(0,11)$, $C(3,-3)$, $D(4,-3)$
12. $A(-4,-5)$, $B(-3,4)$, $C(3,1)$, $D(-6,2)$

Di latihan 13-15 buktikan titik kolinier

13. $A(3,4)$, $B(4,6)$, $C(2,2)$

14. $A(-3,0)$, $B(-1,1)$, $C(3,3)$

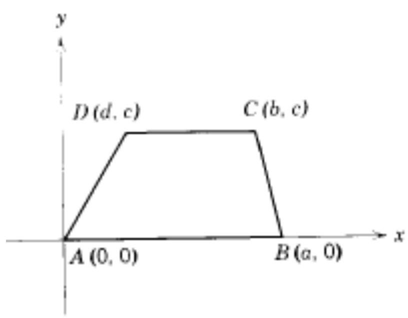
15. $A(-4,-6)$, $B(0,-7)$, $C(-8,-5)$

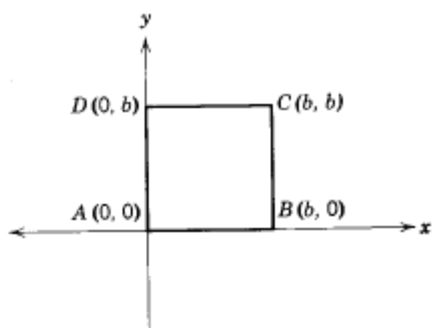
Buktikan teorema analitis berikut :

16. Segmen bergabung titik tengah dari dua sisi segitiga sejajar dengan sisi tengah.

17. Median dari trapesium adalah sejajar di basis dan memiliki ukuran yang sama dengan setengah jumlah dari ukuran basis.

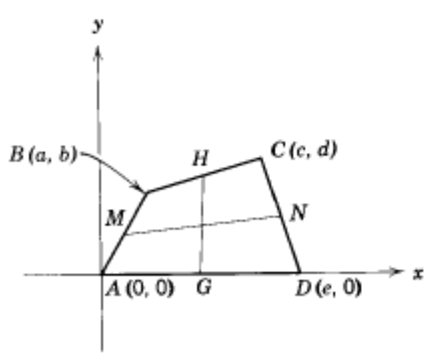
18. Diagonal persegi berpotongan di sudut kanan.



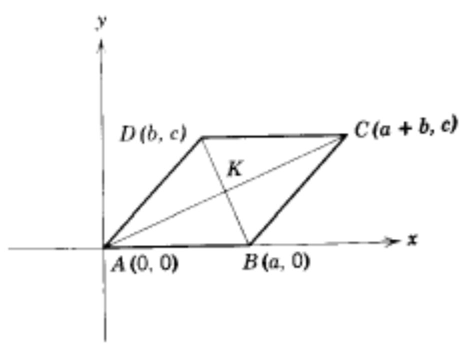


19. Garis gabung titik tengah dari sisi yang berlawanan dari jajaran genjang yang saling membagi dua.

20. Diagonal dari rhombus berpotongan di sudut kanan.



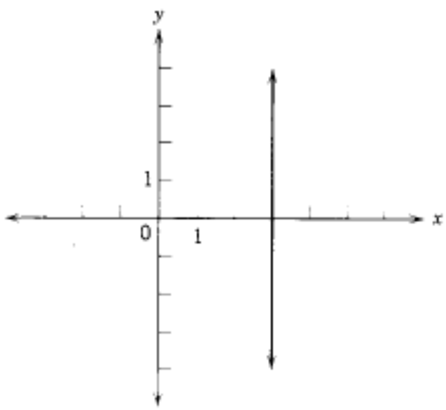
Ex. 19.



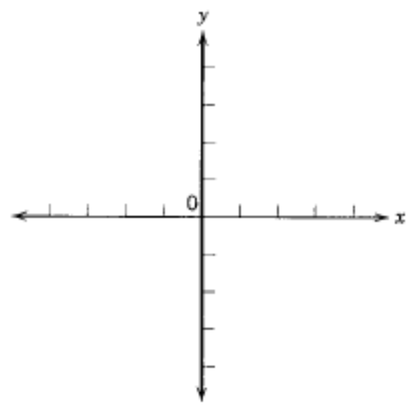
Ex. 20.

3.10. Grafik kondisi. *Grafik kondisi* yang dikenakan pada dua variabel adalah himpunan titik- titik yang koordinat *(x,y)*memenuhi kondisi. Seringkli kondisibini diberikan dalam persamaan atau pertidaksamaan bentuk. *Grafik persamaan (pertidaksamaan)* atau kondisi di *x* dan *y* berarti menggambar grafik. Untuk mendapatkan itu , kami menggambar sosok yang mewakili semua poin yang koordinat memenuhi kondisi. Grafik mungkin garis, sinar, segmen, segitiga, lingkaran, setengah bidan atau himpunan bagian dari masing-masing. Mengikuti contoh yang menggambarkan hubungan antara kondisi dan grafiknya.

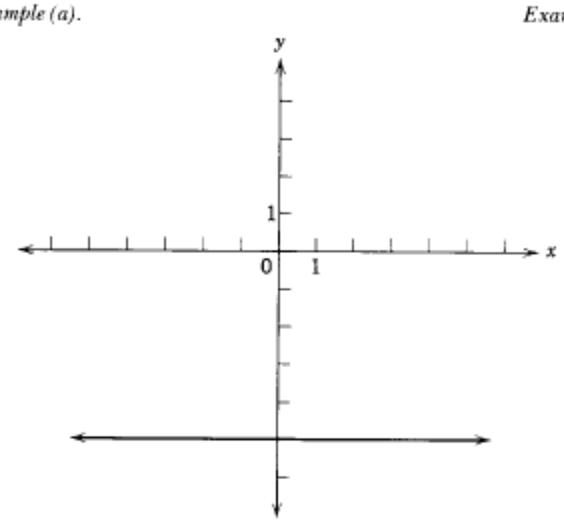
Contoh. Gambar grafik di titik *P(x,y)* yang memenuhi kondisi berikut: $(a)x = 3; (b)x = 0; (c)y = -5; (d)y \geq 0; (e)\ 1 < x \leq 4; (f)\ OP \leq 2.$
Penyelesaian :



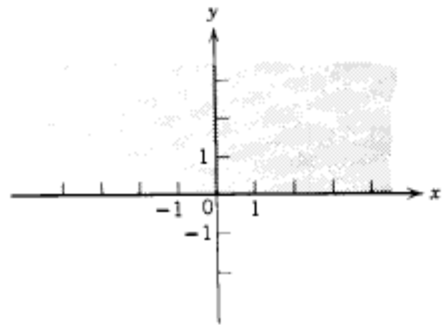
Example (a).



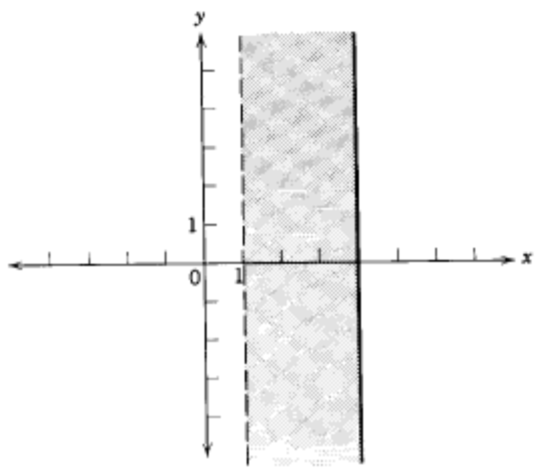
Example (b).



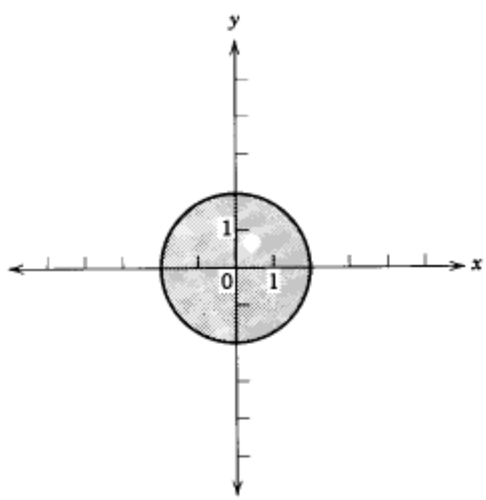
Example (c).



Example (d).



Example (e).



Example (f).

Latihan

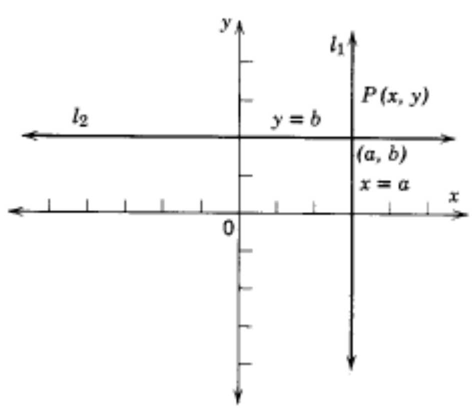
Menggambar dan menunjukkan grafik yang memenuhi persyaratan sebagai berikut .

1. $x \geq 0$.
2. $y < 0$.
3. $x > 0$ dan $y > 0$.
4. $x < 0$ dan $y > 0$.
5. $x > 0$ dan $y < 0$.
6. $-1 < x < 2$
7. $x > 0$ atau $x < -2$.
8. $y < 1$ atau $y > 4$.
9. $-1 < x < 3$ dan $2 < y < 4$.
10. $2 \leq x \leq 4$ dan $3 \leq y \leq 5$.
11. $x = 1$ dan $y \geq 0$.
12. $|x| = 3$.
13. $|y| < 2$.
14. $|y| > 2$.
15. $x > 2$ dan $y < -1$.
16. $x > 0$, $y > 0$, dan $y = x$.

13.11 . Persamaan garis . Persamaan garis pada sebuah bidang adalah persamaan dalam dua variabel , seperti x dan y , yang dipenuhi oleh setiap titik pada garis.Bentuk persamaan akan tergantung pada data yang digunakan dalam menentukan garis . Sebuah garis lurus adalah ditentukan secara geometris dalam beberapa cara . Jika dua poin digunakan untuk menentukan garis , persamaan garis akan memiliki bentuk yang berbeda dari pada jika satu titik dan arah yang digunakan . Kami akan mempertimbangkan beberapa yang lebih umum bentuk persamaan untuk garis lurus .

13.12 . Garis mendatar dan tegak lurus . Jika garis l_1 sejajar dengan sumbu y ,maka setiap titik pada l_1 memiliki koordinat x yang sama (lihat Gambar . 13.13) . Jika ini koordinat x, maka titik $P(x, y)$ adalah pada l_1 *jika dan hanya jika* $x = a$.

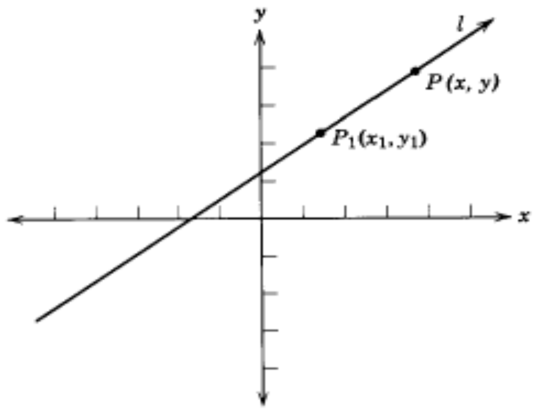
Dengan cara yang sama, $y = b$ adalah persamaan l_2 sebuah garis melalui (0 , b) sejajar dengan sumbu x .



Gambar . 13.13 .

13.13 . Bentuk titik - kemiringan persamaan garis . Salah satu cara paling sederhana dalam sebuah garis ditentukan untuk mengetahui koordinat titik melalui sebuah titik yang lulus uji dan kemiringan garis .

Pertimbangkan garis tidak tegak lurus *l* melewati $P_1(x_1 y_2)$ dengan kemiringan *m*(lihat Gambar . 13.14) . Misalkan *P (x , y)* menjadi titik selain garis P_1 yang diberikan . *P*



Gambar . 13.14 .

akan berbaring di atas *l jika dan hanya jika* kemiringan $\overleftrightarrow{PP1}$ adalah *m* ; yaitu *P (x , y)* adalah *l* kemiringan $\overleftrightarrow{PP1}$ adalah *m* , atau

$$P(x, y) \text{ is on } l \leftrightarrow \frac{y-y_1}{x-x_1} = m$$

Dan

$$P(x, y) \text{ is on } l \leftrightarrow y-y_1 = m(x-x_1).$$

Persamaan 13.6 . *Untuk setiap titik P_1 (X_1,Y_2) dan untuk setiap nomor m , persamaan dari garis melalui P_1 dengan kemiringan m adalah $y-y_1 = m(x-x_1)$.* Persamaan ini disebut *bentuk titik kemiringan* persamaan garis .

Contoh . Tentukan persamaan garis yang berisi titik dengan koordinat (2 , -3) dan memiliki kemiringan 5 .

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} y-y_1 &= m(x-x_1) \\ y-(-3) &= 5(x-2) \\ y+3 &= 5x-10 \\ 5x-y-13 &= 0 \end{aligned}$$

Contoh . Tentukan kemiringan garis yang persamaannya 5x - 2y = 11
Penyelesaian : Pertama-tama kita harus mengurangi persamaan untuk bentuk titik kemiringan , sebagai berikut:

$$5x - 2y = 11$$
$$5x - 11 = 2y \text{ (Mengapa ?)}$$
$$2y = 5x - 11 \text{ (Mengapa ?)}$$
$$= 5\left(x - \tfrac{11}{5}\right)$$
$$y = \tfrac{5}{2}\left(x - \tfrac{11}{5}\right) \text{ (Mengapa ?)}$$

atau

$$y - 0 = \tfrac{5}{2}\left(x - \tfrac{11}{5} \right)$$

Membandingkan persamaan ini dengan persamaan bentuk titik kemiringan standar, kita menemukan bahwa garis melewati ($\frac{11}{5}$,0) dan memiliki kemiringan pada $\frac{5}{2}$.

13.14 . Dua titik persamaan garis . Persamaan garis lurus yang melewati dua titik dapat diperoleh dengan menggunakan bentuk titik kemiringandan persamaan untuk kemiringan garis yang melalui dua titik . Dengan demikian , jika P_1(x_1,y_1) dan P_2(x_2,y_2) adalah koordinat dari dua titik yang dilalui garis melewati kemiringan garis adalah m = (y_1 - y_2) / (x_1 - x_2) dan menggantikannya ini nilai m dalam bentuk titik kemiringan , kita mendapatkan persamaan

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$$

Ini disebut bentuk *dua titik persamaan* garis lurus .

Latihan

Tentukan persamaan untuk masing-masing garis dijelaskan .

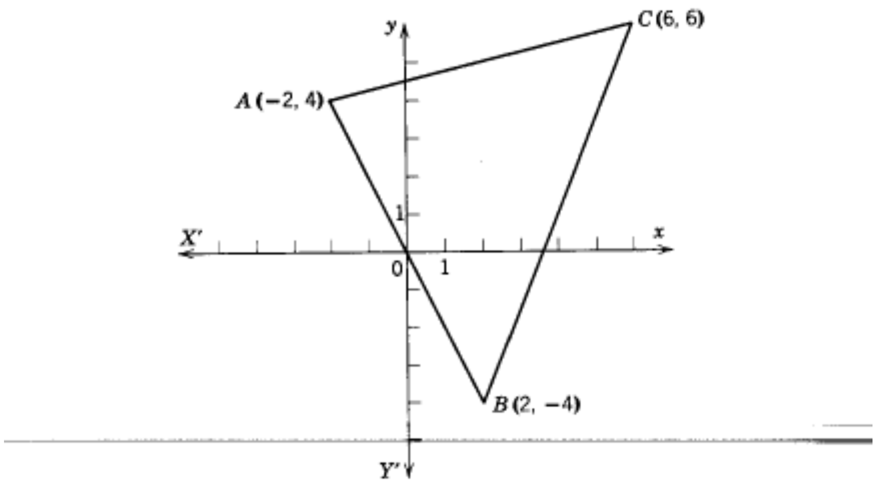
1. Garis berisi titik dengan koordinat (7 , 3) dan kemiringannya adalah 4 .
2. Garis berisi titik dengan koordinat (-2 , -5) dan memiliki kemiringan ke 3 .
3. Jalur ini memiliki kemiringan -2 dan melewati (-6 , 8) .
4. Jalur ini memiliki kemiringan 45 dan melewati (3 , 5) .
5. Garis melewati (-9 , -3) dan sejajar dengan sumbu *x* .
6. Garis berisi titik (5 , -7) dan tegak lurus terhadap sumbu *x* .
7. Garis berisi titik dengan koordinat (4 , 7) dan (6,11).
8. Garis berisi titik koordinat yang (-1 , 1) dan memiliki kemiringan 90 .

Dalam no. 9-16 tentukan kemiringan masing-masing garis dengan persamaan berikut .

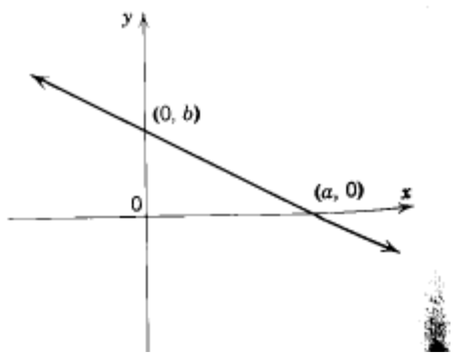
9. $3x - y = 7$.
10. $2x + y = 8$.
11. $5x + 3y = 9$.
12. $y = x$.
13. $2x = y$.
14. $y = 2x - 7$.
15. $y = -3$.
16. $x = 6$.

Soal no. 17-22 , poin A (-2,4) , B (2 , -4) , C (6 , 6) adalah simpul dari , 6 , ΔABC .

17. Tentukan persamaan $\overleftrightarrow{AB}$
18. Tentukan persamaan $\overleftrightarrow{BC}$
19. Tentukan persamaan median diambil dari C.
20. Tentukan persamaan median diambil dari A.
21. Tentukan persamaan garis-berat dari $\overline{AB}$.
22. Tentukan persamaan garis-berat $\overline{BC}$.



13.15 . Bentuk perpotongan dari persamaan garis. Sebuah garis didefinisikan sebagai koordinat dari titik di mana garis melintasi sumbu x dan sumbu y masing-masing . Iistilah juga digunakan untuk jarak titik-titik ini dari titik asal. Konteks pernyataan itu akan membuat jelas jika koordinat atau jarak yang dimaksud. Jika perpotongan x dan perpotongan y dari baris masing-masing a dan b (Gbr. 13.15) ,koordinat dari titik persimpangan garis dan sumbu adalah $(a,0)$ dan $(0,b)$. Menggunakan gambar dua titik,



Gambar 13.15

$$y-b=\frac{b-0}{0-a}(x-0)$$

atau

$$y-b=-\frac{b}{a}x$$

Hal ini dapat dikurangi dengan

$bx + ay = ab$

dan dengan membagi kedua sisi persamaan dengan ab,kita mendapatkan

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

yang merupakan *perpotongan* dari persamaan garis .

Contoh . Menggambar grafik garis *L* yang persamaannya $3x - 4y - 12 = 0$.
Penyelesaian : $3x - 4y - 12 = 0$.

Menambahkan 12 untuk kedua belah pihak ,

$3x - 4y = 12$.

Membagi kedua sisi dengan 12 ,

$$\frac{x}{4} - \frac{y}{3} = 1$$

atau

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{(-3)} = 1$$

Oleh karena itu, perpotongan *x* adalah 4 dan perpotongan *y* adalah -3 .

13.16 . Bentuk kemiringan dan perpotongan y dari persamaan garis. Jika perpotongan *y* dari sebuah garis *b* dan kemiringan garis adalah *m* , kita dapat menentukan persamaan dari garis dengan menggunakan bentuk titik kemiringan. Dengan demikian ,

$y - b = m (x - 0)$

atau

$y = mx + b$

Ini disebut *kemiringan bentuk perpotongan y.*

Persamaan 13.7 . *Grafik dari persamaan $y = mx + b$ adalah garis dengan kemiringan m dan y perpotongan b .*

Contoh : Apa kemiringan garis yang persamaannya $2x - 5y - 17 = 0$.
Penyelesaian : Kurangi persamaan untuk $y = mx + b$ bentuk , sebagai berikut

$2x - 5y - 17 = 0$
$2x - I7 = 5y$ (Mengapa ?)
$5y = 2x - I7$ (Mengapa ?)
$y = \frac{2}{5}$ x $\frac{17}{5}$ (Mengapa ?)

Kemiringan garis adalah $\frac{2}{5}$.

13.17 . Bentuk umum dari persamaan garis . Bentuk yang paling umum dari sebuah persamaan tingkat pertama dalam *x* dan *y* adalah

$Ax + By + C = 0$

di mana *A* dan *B* tidak keduanya nol.

Jika $B \neq 0$, kita dapat memecahkan untuk y untuk mendapatkan

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Ini persamaan dari bentuk ini $y = mx + b$ dan, karenanya ,harus melalui persamaan garis lurus dengan

$$\text{slope } m = -\frac{A}{B} \quad \text{and} \quad y\text{-intercept } b = -\frac{C}{B}$$

Jika $B = 0$, kita dapat memecahkan persamaan untuk *x* untuk mendapatkan $x = -C | A$, yang merupakan persamaan garis sejajar dengan sumbu *y* . Jika $A = 0$, $y = -C | B$, yang merupakan persamaan untuk garis yang sejajar dengan sumbu *x* .

Dengan demikian , kami telah membuktikan berikut :

Persamaan 13.8 . *Grafik setiap persamaan linear dalam x dan y selalu lurus. Garis (dalam XY –bidang) .*

Kebalikan dari persamaan 13.8 dapat dibuktikan dengan mencatat bahwa setiap lurus baris harus baik memotong sumbu *y* atau sejajar dengan itu dan , karenanya , dapat dinyatakan baik oleh persamaan $x = a$, di mana *a* adalah konstanta , atau dengan $y = mx + b$.
Persamaan $y = mx + b$ dapat dikonversi ke $Ax + By + C = 0$ bentuk .

Teorema 13.9 . *Setiap garis lurus dalam bidang XY adalah grafik linear dari persamaan x dan y.*

Latihan

Apa x dan y perpotongan dari grafik persamaan berikut ?
Apa kemiringan setiap persamaan ? Gambarlah grafik dari persamaan.

1. $3x + 4y = 12$.
2. $2x - 3y - 6 = 0$.
3. $x + 5 = 0$.
4. $y -7 = 0$.

Tentukan persamaan , di $Ax + By + C = 0$ bentuk , dari yang berikut ini garis grafik .

5. Garis melalui (2 , 3) dengan kemiringan 5 .
6. Garis melalui (-5,1) dengan kemiringan 7 .
7. Garis melalui (4 , -3) dengan kemiringan -2 .
8. Garis melalui (1 , 1) dan (4 , 6) .
9. Garis melalui (2 , -3) dan (0 , -9) .
10. Garis melalui (-10 , -7) dan (-6 , -2) .
II. Garis dengan perpotongan y 5 dan kemiringan 2 .
12. Garis dengan perpotongan y 3 dan kemiringan 1 .
13. Garis dengan perpotongan y 4 dan kemiringan - 3 .
14. Sumbu x.
I5. Sumbu y .
16. Garis menurun melalui (-5 , 7) .
17. Garis menurun melalui (3 , -8) .
18. Garis melalui (2 , 5) dan sejajar dengan garis yang melewati (-2 , -4) dan (6 , 8) .
19. Garis melalui (4 , 4) dan tegak lurus terhadap garis yang melewati(1,1) dan (7 , 7) .
20. Garis dengan perpotongan x 5 dan perpotongan y 1 .
21. Garis melalui (-1 , 3) dan sejajar dengan garis yang persamaannya $6x- 2y - I5 = 0$.
22. Garis melalui (5 , -2) dan sejajar dengan garis yang persamaannya $2x + 5y + 20 = 0$.
23. Garis melalui (0 , 0) dan tegak lurus terhadap garis yang persamaannya $5x - y - 9 = 0$.
24. Garis melalui (-4 , -7) dan tegak lurus terhadap garis yang persamaannya adalah $6x + 5y - I8 = 0$.

Ringkasan Pengujian

Test 1

LAPORAN PENYELESAIAN

1. Koordinat asal adalah...
2. Garis melalui (2 , -3) tegak lurus terhadap sumbu x memotong sumbu x pada titik koordinat yang...
3. Titik (8 , -5) terletak pada ... kuadran
4. Jika k adalah negatif nomor dan h adalah positif nomor titik ($-k,-h$) garis terletak pada ... kuadran.
5. Koordinat titik yang merupakan titik potong dari sumbu x dan sumbu y adalah ...
6. Garis melalui (-2 , -4) dan (... ,-8)adalah menurun.
7. Sebuah jalan dengan 6 % kemiringan akan naik ... kaki untuk setiap mendatar 500 kaki .
8. Kemiringan garis melalui A $(a - b , b)$ dan B $(a + b , a)$ adalah ...
9. Garis melalui (2 , -4) dan (-3 ,...) memiliki kemiringan $\frac{1}{2}$.
10. Titik tengah dari garis yang titik akhir adalah (-7,6) dan (3 , -4)memiliki koordinat...
11.Sebuah titik terletak pada ... kuadran jika absis adalah nilai yang sama dengan ordinat tetapi berlawanan tanda .
12. Sebuah titik (3 , -2) , (4,3) , dan (-6 , 5) menurun simpul adalah ... segitiga .
13. Tiga simpul persegi panjang adalah titik yang koordinat (-3,4) ,(-3 , -2) , dan (1,4) . Koordinat titik sudut keempat adalah...
14. Titik (1 , 6) , (4 , -5) , dan (0 , 17) adalah koordinat adalah ...segitiga .
15. $3x$-$4y$-12=0 dan $6x$+(...)-6=0 persaman dua garis sejajar.
16. $4y$-$10x$-30=0 dan $2x$+(...)-15=0 persamaan garis tegak lurus.

Test 2

Masalah

1-7 memberikan ΔABC dengan puncak $A(-4,7)$, B(10,5),dan C(-6,-8).

1. Tentukan panjang garis $\overline{BC}$.
2. Tentukan koordinat titik tengah garis $\overline{AB}$.
3. Tentukan kemiringan garis $\overline{AC}$.
4. Tentukan persamaan $\overline{AB}$.
5. Tentukan persamaan median dari bentuk C.
6. Tentukan persamaan ketinggian dari bentuk B.
7. Tentukan persamaan garis melalui B dan sejajar dengan $\overleftrightarrow{AC}$.

8. Apa koordinat , pusat lingkaran dengan diameter yang titik tengah berada di (3 , -7) dan (-5 , 2) .

9. Tentukan daerah ΔRST jika simpul berada di R (7 , 5) , S(-4 , 2) , dan T (O , -2) .

10. Tentukan daerah lingkaran dibatasi ΔRST contoh 9 .

11. Tentukan persamaan garis yang perpotongan x adalah -2 dan yang perpotongan y adalah 6.

12. Buktikan bahwa titik-titik (5 , 2) , (2 , 6) , (- 6, 0) , dan(-3,-4) puncak dari persegi panjang.

13. Tentukan persamaan garis melalui (-2,5) dan sejajar dengan garis yang persamaannya $6x - 3y - 24 = O$.

14. Tentukan persamaan garis melalui (1 , -4) dan tegak lurus terhadap garis yang persamaannya $3x - 4y = 12$.

15. Menggambar dan menjelaskan grafik yang memenuhi kondisi : $-1 \leq x < 3$ dan $2 < y \leq 4$.

16. Buktikan bahwa garis bergabung dengan titik tengah dari sisi yang berlawanan dari segiempat membagi dua satu sama lain .