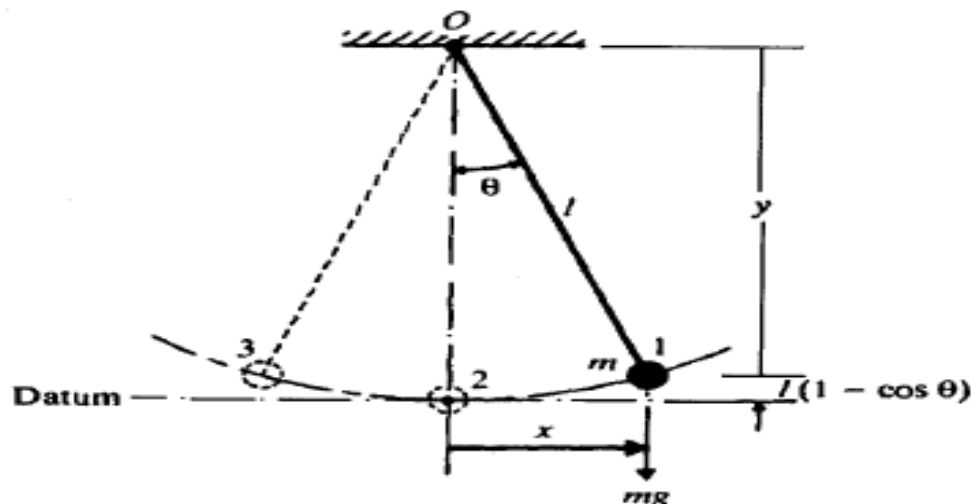


1.2 Konsep Dasar Getaran Mekanis

Getaran adalah gerakan berisolasi dari sistem mekanis serta kondisi-kondisi dinamisnya. Gerakan dapat berupa benturan yang berulang secara kontinyu atau dengan kata lain dapat juga berupa gerakan tidak beraturan atau acak. Getaran sebagai fenomena alam merupakan kecenderungan respons alam atau respons yang terjadi, baik langsung maupun tidak langsung, akibat terjadinya peristiwa alam. Peristiwa alam ini menampakkan sesuatu yang dapat kita pelajari rentetannya. Penampakan ini dapat merupakan sesuatu yang dirasakan maupun yang tidak dirasakan oleh panca indera. Ranah pengetahuan tertarik terhadap lingkup fenomena yang tidak dapat dirasakan panca indera, seperti panas dan getaran. Getaran merupakan salah satu fenomena alam. Itu berarti kita buat kelompok kejadian dari respons penampakan dalam domain yang kita sebut getaran. Gempa merupakan anggota kelompok getaran dan gerakan pegas daun sebagai penghubung roda dengan sasis mobil merupakan getaran.



Gambar 1.1 Getaran sederhana dari ayunan pendulum

Sebagai contoh adalah getaran dari pendulum pada Gambar 1.1. Jika suatu massa m dilepas setelah disimpangkan membentuk sudut ' θ ' pada posisi-1, energi kinetiknya adalah nol. Namun pada posisi ini energi potensialnya sebesar ' $mgl(1 - \cos \theta)$ ', karena gaya gravitasi ' mg ' akan memberikan torsi sebesar $mgl \sin \theta$ di titik O . Benda tersebut akan mulai berayun ke kiri dari posisi-1. Hal ini akan memberikan percepatan angular searah jarum jam. Ketika mencapai posisi-2, semua energi potensial benda dikonversi menjadi energi kinetik. Ayunan benda kemudian berlanjut ke posisi-3, namun torsi yang berlawanan dengan arah jarum mulai bereaksi akibat gaya resultan sebagai gaya radial. Hal ini menyebabkan terjadinya perlambatan pada benda. Kecepatan benda berkurang hingga menjadi nol pada posisi-3. Pada posisi ini semua energi kinetik benda dikonversi menjadi energi potensial. Akibat adanya torsi dari resultan gravitasi dan tegangan tali, dan meskipun pada posisi-2 tidak ada gaya resultan radial, benda melanjutkan ayunannya dengan arah berlawanan jarum jam, dengan percepatan secara angular dan melewati titik-2.

Secara umum, gerak getaran merupakan suatu fungsi periodik di mana fungsi periodik tersebut dapat dinyatakan dengan persamaan 1.1. Waktu t dan periode T dengan percepatan sudut dalam rpm (rotasi per menit) memberikan hubungan Fungsi Harmonik, persamaan 1.2. Jika fungsi harmonik dinyatakan dengan simpangan atau $x(t)$ maka Fungsi Kecepatan merupakan turunan pertama dari fungsi simpangan sebagai fungsi waktu, sesuai persamaan 1.3.

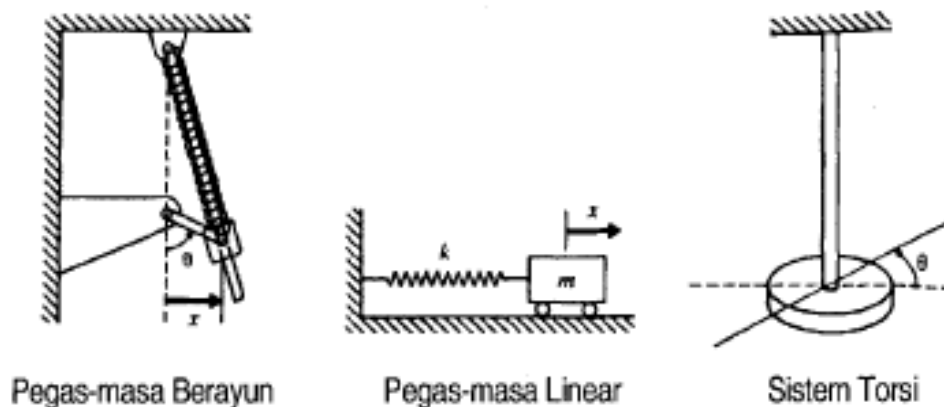
$$\text{Fungsi Periodik, } x(t) = x(t + T) \quad (1.1)$$

$$\text{Fungsi Harmonik Sederhana, } x(t) = A \sin \omega t \quad (1.2)$$

$$\text{Fungsi Kecepatan, } v(t) = dx / dt = A \omega \cos \omega t \quad (1.3)$$

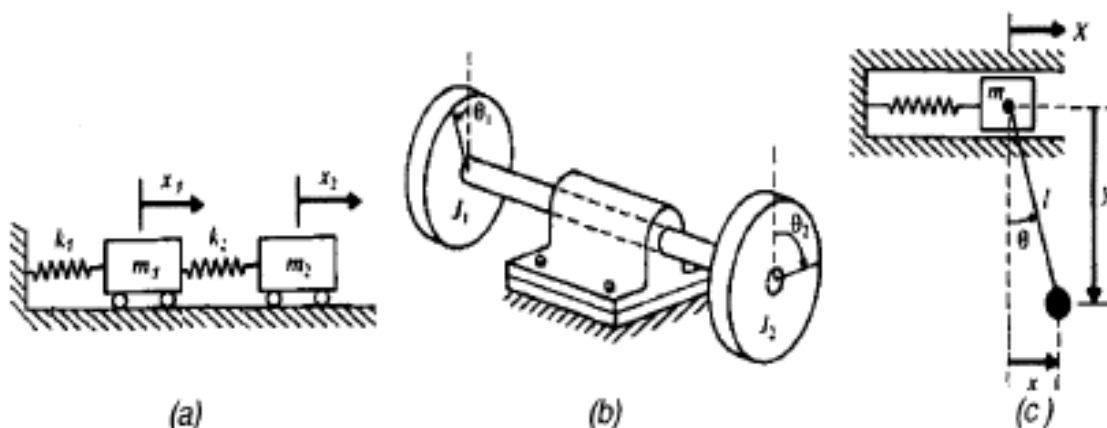
Jumlah minimum koordinat bebas yang dibutuhkan untuk menentukan gerakan semua benda dan berhubungan sebagai bagian dari sistem pada waktu tertentu, didefinisikan sebagai *Derajat Kebebasan Sistem* atau Degree of Freedom. Sistem sederhana pada pendulum Gambar 1.1, dan untuk contoh pada Gambar 1.2, mewakili *Single Degree of Freedom*, disingkat SDOF, atau sistem satu derajat kebebasan. Pada sistem pendulum sederhana Gambar 1.1, koordinat dapat ditentukan baik menggunakan koordinat kartesian dengan 'x dan y' maupun koordinat polar dengan ' θ '.

Jika koordinat kartesian 'x dan y' dipergunakan untuk menggambarkan gerakan pendulum, maka koordinat-koordinat itu (x dan y) tidak saling bebas (sesuai kemampuan gerakan dengan DOF=1). Koordinat 'x dan y' tersebut dihubungkan dengan persamaan $x^2 + y^2 = l^2$, dengan ' l ' adalah panjang pendulum yang tetap. Ada satu lagi koordinat yang dapat menggambarkan gerakan pendulum, yang dalam contoh ini kita temukan bahwa penggunaan koordinat polar sebagai koordinat bebas sistem pendulum sederhana lebih tepat daripada koordinat kartesian. Untuk kasus slider Gambar 1.2 (a), baik koordinat polar ' θ ' maupun koordinat kartesian 'x' dapat digunakan untuk menggambarkan gerakan slider. Pernyataan penggunaan koordinat kartesian 'x' berhubungan dengan harga ' θ ' sebagai ' $x = R \sin \theta$ ', dengan 'R' panjang penyangga screw. Untuk Gambar 1.2 (b), koordinat kartesian sebagai hanya arah sumbu 'x' dapat digunakan untuk menggambarkan gerakan benda. Sedangkan untuk sistem torsional Gambar 1.2 (c), koordinat polar ' θ ' lebih tepat digunakan untuk menggambarkan gerakan benda.



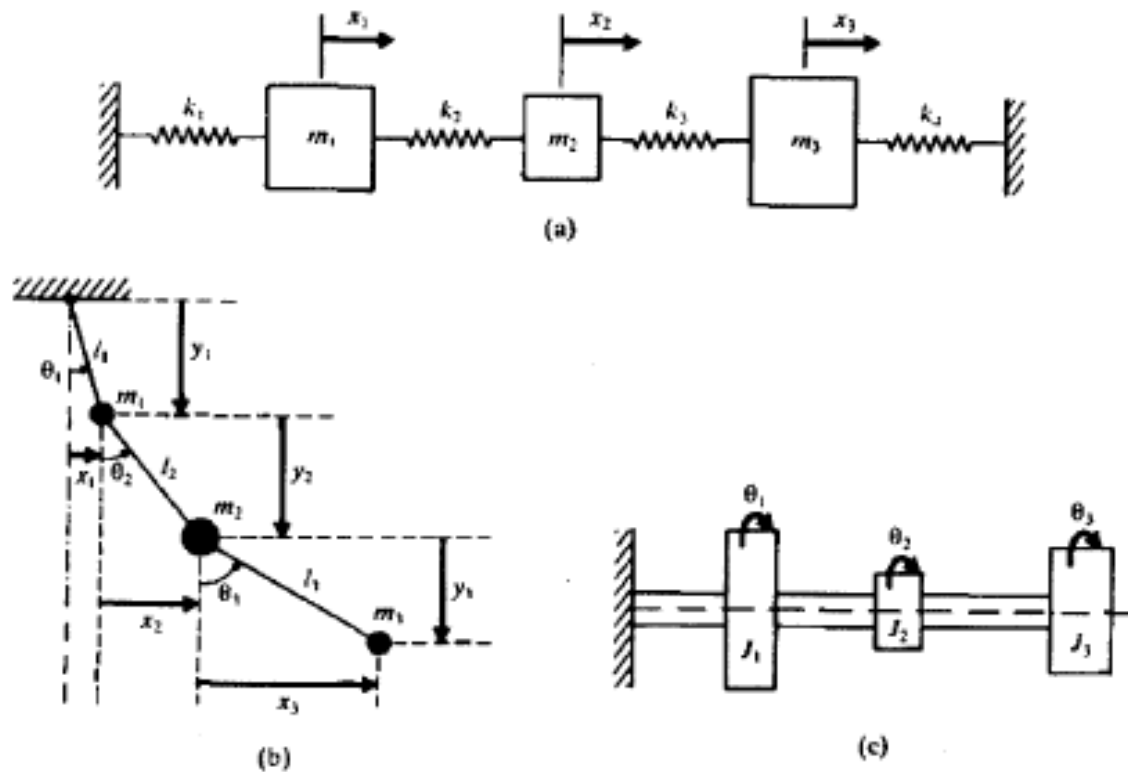
Gambar 1.2 Contoh Idealisasi getaran SDOF

Contoh untuk *double degree of freedom* (disingkat MDOF), dapat dilihat pada Gambar 1.3. Uraian tiga gambar ini sebagai berikut, Gambar 1.3 (a) diperlihatkan sistem dua massa dengan dua pegas yang menggambarkan dua koordinat linier x_1 dan x_2 , Gambar 1.3 (b) menunjukkan dua sistem rotor di mana gerakan dapat ditentukan dalam koordinat polar ' θ_1 dan θ_2 '. Sedangkan gerakan dalam Gambar 1.3 (c) dapat diwakili baik dengan koordinat ' (x,y) ', atau $X(x,y,\theta)$ '. Huruf kecil ' x dan y ' dibatasi oleh persamaan ' $x^2 + y^2 = l^2$ ', di mana ' l ' adalah panjang yang tetap.



Gambar 1.3 Contoh sistem dengan 2 derajat kebebasan

Contoh untuk tiga derajat kebebasan dapat dilihat pada Gambar 1.4, di mana pada Gambar 1.4(a), 1.4(b), dan 1.4(c), tiga koordinat tersebut adalah koordinat linier ' x_i ($i=1,2,3$)' dan ' θ_i ($i=1,2,3$)' dapat digunakan untuk menggambarkan gerakan sistem. Sedangkan Gambar 1.5(b), dengan ' θ_i ($i=1,2,3$)' menunjukkan posisi dari massa ' m_i ($i=1,2,3$)'. Khusus untuk Gambar 1.4(b) penggunaan koordinat kartesian ' (x_i, y_i) ' dengan ' $(i=1,2,3)$ ', dibatasi oleh persamaan ' $x_i^2 + y_i^2 = l_i^2$ dan ' $(i=1,2,3)$ '.



Gambar 1.4 Contoh sistem dengan 3 derajat kebebasan

Secara praktis banyak sistem dapat digambarkan oleh derajat kebebasan tertentu seperti yang terlihat pada Gambar 1.2 sampai Gambar 1.4. Namun ada beberapa kasus, seperti batang cantilever, lihat Gambar 1.5, yang memiliki derajat kebebasan tak terhingga. Jumlah koordinat dapat didefinisikan menjadi tak hingga atau banyak sekali agar kurva defleksi lebih halus, sebagai kurva defleksi. Pemahaman mekanika menyebutkan bahwa sistem dengan derajat kebebasan tertentu disebut sebagai *sistem diskrit* dan sistem dengan derajat kebebasan tak terhingga disebut sebagai *sistem kontinu*. Sistem kontinu benda riil dapat didekati sebagai sistem diskrit dan solusi yang diperoleh dalam bentuk paling sederhana, atau dengan jumlah asumsi nodal yang proporsional.

Persamaan getaran dibuat sebagai persamaan diferensial dalam bentuk matriks untuk model lebih dari satu DOF. Hal ini memungkinkan diskritisasi model dari sistem dengan DOF dibuat menjadi tak berhingga agar pendekatan solusi dapat diperoleh. Persamaan getaran dalam bentuk umum atau bentuk matriks dinyatakan sebagai berikut:

$$[m] \ddot{x}(t) + (c) \dot{x}(t) + [k] x(t) = f(t)$$

Matriks bujur sangkar '[m], [c] dan [k]' adalah matriks massa, matriks damping, dan matriks kekakuan. Contoh koefisien matriks untuk 2-DOF masing-masing sebagai berikut:

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$[c] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}$$

Detail pembahasan yang menghasilkan koefisien-koefisien dalam matriks persamaan diatas untuk 2-DOF, dicantumkan dalam Bab V pada persamaan 5.3(a) sampai 5.3(c).



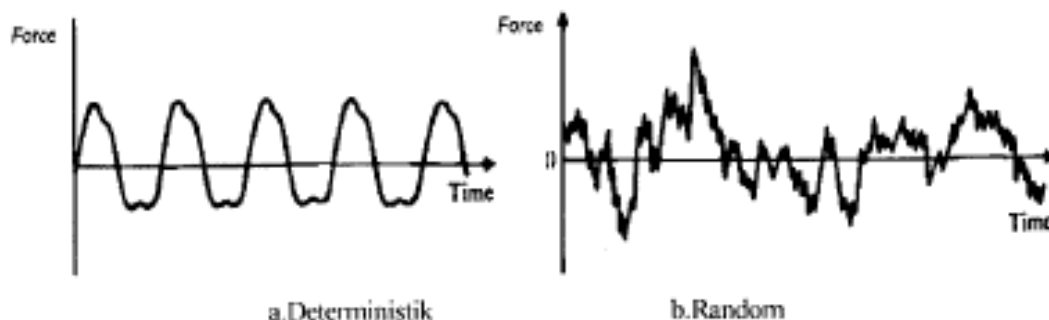
Gambar 1.5 Contoh Batang DOF tak terhingga

1.3. PEMBEBANAN & KLASIFIKASI GETARAN

Getaran dibagi menjadi beberapa klasifikasi, antara lain:

1. **Getaran bebas** didefinisikan sebagai getaran yang terjadi pada suatu sistem (mekanisme) tanpa adanya pengaruh gaya luar (eksitasi) yang memengaruhinya. Dengan kata lain, eksitasi diberikan pada awal saja, setelah itu benda akan berosilasi. Contohnya adalah gerakan pendulum pada Gambar 1.1.
2. **Getaran paksa** dapat didefinisikan sebagai getaran yang terjadi pada suatu sistem karena adanya rangsangan gaya luar (eksitasi). Sebagai contoh adalah getaran pada motor diesel. Jika rangsangan tersebut ber-osilasi maka sistem dipaksa untuk bergetar pada frekuensi rangsangan. Jika frekuensi rangsangan sama dengan salah satu frekuensi natural sistem maka akan didapat keadaan resonansi, dan osilasi besar dapat menimbulkan bahaya. Kerusakan struktur yang terjadi pada gedung, jembatan, turbin, dan sayap pesawat berhubungan dengan fenomena resonansi ini.
3. **Getaran tak teredam** adalah getaran di mana tidak ada kehilangan energi yang disebabkan tahanan selama osilasi.
4. **Getaran teredam** adalah getaran di mana terjadi kehilangan energi yang disebabkan tahanan selama osilasi.
5. **Getaran linier** adalah semua komponen sistem yang bergetar, baik itu pegas, massa, dan peredam berperilaku linier. Pada kondisi ini prinsip superposisi dipegang dan analisis teoritis menggunakan model matematika sangat baik untuk dikembangkan. Buku ini melakukan analisis getaran secara linear.

6. **Getaran non-linier** adalah semua komponen sistem yang bergetar baik itu pegas, massa, dan peredam berperilaku non linier. Pada kondisi ini penerapan prinsip superposisi tidak valid dan analisis menggunakan model matematika kurang baik untuk dikembangkan. Perhitungan numerik dengan pendekatan metode non-linear dari hasil regresi kelakuan material suatu percobaan dilakukan. Contoh pendekatan ini umum dilakukan untuk getaran impact.
7. **Getaran deterministik** adalah getaran di mana harga eksitasi yang bekerja pada sistem diketahui setiap saat. Eksitasi diplot kemudian perhitungan numerik ekuivalen eksitasi pada model dilakukan.
8. **Getaran random** atau getaran acak adalah getaran di mana harga eksitasi yang bekerja pada sistem tidak dapat diperkirakan. Untuk jenis getaran ini diperlukan rekaman data eksitasi dari pendekatan atau simulasi yang benar untuk dibuatkan polanya secara statistik sehingga rata-rata eksitasinya dapat diperkirakan. Contoh getaran ini adalah gempa bumi, kekasaran permukaan jalan, kecepatan angin.



Gambar 1.6 Contoh eksitasi deterministik dan random

1.4 Prosedur Analisis Getaran

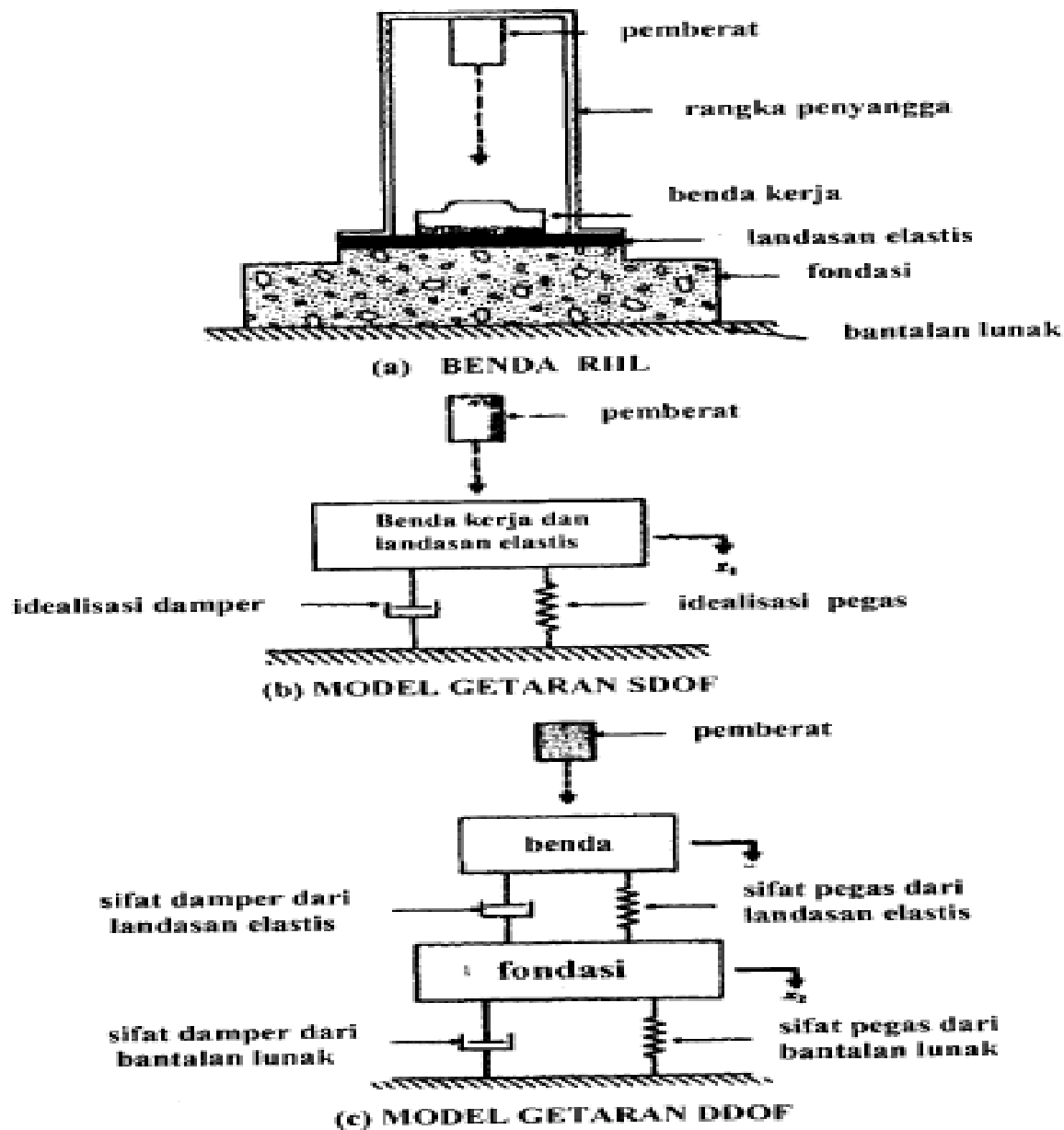
Salah satu contoh suatu sistem bergetar adalah sistem dinamika, dan variabel seperti eksitasi (input) akan memberikan respons (output) sebagai fungsi dari waktu. Respons suatu sistem getaran dinyatakan dengan kondisi awal, yaitu suatu pasangan harga antara respons (misalnya simpangan) pada jumlah derajat kebebasan sesuai idealisasi dari model getaran yang dibuat. Analisis dari sistem getaran biasanya melibatkan model matematika, turunan dari persamaan yang dibangun, solusi dari persamaan, dan interpretasi hasil, yang dijabarkan sebagai berikut:

Langkah 1: Membuat Model Matematika

Model matematika merupakan representasi dari kondisi riil realisasi operasional sebuah sistem dan tujuan pembuatan model matematika ini adalah untuk mencari solusi dari analisis perilaku sistem. Model matematika haruslah mampu menggambarkan sistem cukup detail, namun tidak membuatnya terlalu kompleks. Model matematika bisa linier maupun non-linier, tergantung perilaku komponen sistem getaran. Kadang-kadang model matematika dibuat secara perlahan untuk memperoleh hasil yang akurat. Pada pendekatan ini model dasar yang digunakan secara tepat dapat menggambarkan perilaku sistem secara keseluruhan. Selanjutnya model matematika diperbaiki dengan mengamati komponen atau perilaku sistem secara lebih detail.

Untuk mengilustrasikan prosedur perbaikan yang digunakan dalam membangun model matematika, perhatikan forging hammer pada Gambar 1.7. Forging hammer terdiri dari rangka, pemberat yang dikenal sebagai *tup*, *anvil*, dan fondasi. Anvil adalah komponen yang terbuat dari baja pejal tempat di mana material yang hendak diforging ke bentuk sesuai keinginan dengan ditumbuk oleh *tup* secara berulang. Umumnya anvil dipasang padaudukan elastis untuk mengurangi transmisi getaran ke rangka dan fondasi. Pada pendekatan pertama, rangka, anvil, dudukan elastis, fondasi, dan tanah dimodelkan sebagai satu derajat kebebasan seperti diperlihatkan Gambar 1.7(b). Untuk perbaikan pendekatan, berat dari rangka, anvil, dan fondasi dipisah menjadi model dua derajat kebebasan seperti diperlihatkan Gambar 1.7(c). Model getaran ini dapat dikembangkan dengan memperhatikan dan mempertimbangkan tumbukan dari *tup*.

Ilustrasi untuk *prosedur perbaikan* yang digunakan dalam membuat model matematika, dapat diperhatikan dari mesin forging hammer Gambar 1.7. Forging hammer terdiri dari rangka, pemberat yang dikenal sebagai *tup*, benda kerja atau *anvil*, dan dudukan atau *fondasi*. Anvil merupakan komponen yang terbuat dari baja pejal tempat material hendak diforging menjadi bentuk sesuai keinginan dengan ditumbuk (impact) oleh pemberat atau *tup* secara berulang-ulang. Umumnya anvil dipasang pada dudukan atau fondasi elastis untuk mengurangi transmisi getaran ke rangka dan fondasi. Pada pendekatan pertama, rangka, anvil, dudukan elastis, fondasi, dan tanah atau bantalan lunak, pada lokasi dibawah fondasi, dimodelkan dengan satu derajat



Gambar 1.7 Model Forging Hammer

kebebasan atau SDOF, seperti diperlihatkan Gambar 1.7(b). Untuk perbaikan pendekatan, berat dari rangka, anvil, dan fondasi dipisah menjadi model dua derajat kebebasan seperti diperlihatkan Gambar 1.7(c). Model getaran ini dapat dikembangkan dengan memperhatikan dan mempertimbangkan tumbukan dari tup. Beban model matematika SDOF dibuat dan dievaluasi untuk pilihan terbaik.

Langkah 2: Menurunkan Persamaan Matematika Getaran

Sekali model matematika tersedia, kita gunakan prinsip dinamika untuk persamaan turunan yang menggambarkan sistem getaran. Umumnya persamaan matematika ini dalam bentuk *ordinary differential equation* (ODE) untuk sistem diskrit dan *partial differential equation* (PDE) untuk sistem kontinu. Persamaan matematika dapat dalam bentuk linier ataupun non-linier, tergantung perilaku komponen sistem getaran. Beberapa pendekatan umum digunakan untuk menurunkan persamaan matematika. Pembahasan dalam buku ini, di antaranya adalah Hukum ke-2 Newton tentang gerakan, prinsip d'Alembert, dan prinsip konservasi energi, dinyatakan pada Bab III.

Langkah 3: Membuat Prosedur Persamaan Matematika Getaran

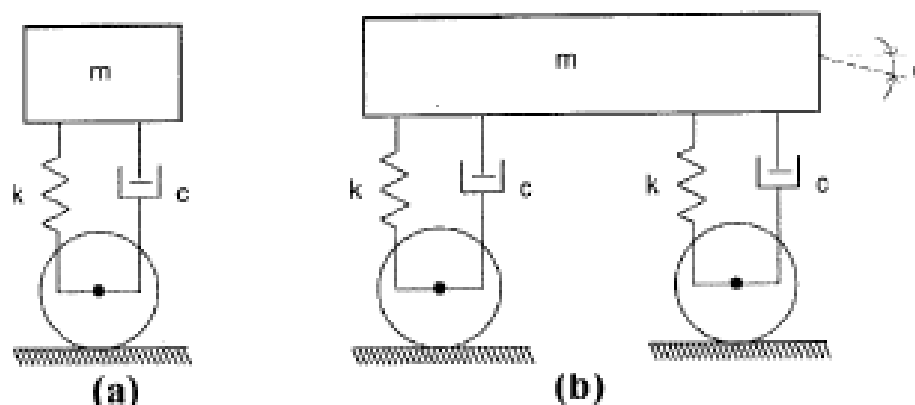
Persamaan gerakan harus dicari solusi untuk mendapatkan respons dari sistem getaran. Prosedur solusi ini dinyatakan dalam metode yang dipilih tergantung kondisi getaran riil. Kita dapat menggunakan salah satu teknik berikut untuk menemukan solusi, yaitu metode standar untuk mendapatkan persamaan turunan, misalnya dengan memilih, metode transformasi Laplace, atau metode matriks, atau metode numerik. Jika persamaan matematika yang terbentuk adalah non-linier, umumnya solusi menggunakan bentuk tertutup. *Lebih jauh*, umumnya solusi untuk pemecahan persamaan matematika PDE perlu lebih rinci dideskripsikan daripada ODE sehingga metode numerik dengan bantuan komputer digunakan untuk solusi persamaan matematika PDE. Namun demikian sangatlah sulit menarik kesimpulan umum dari perilaku sistem dengan menggunakan hasil komputer. Salah satu alasan dengan penggunaan komputer adalah *jaminan* fungsi respon yang diperoleh dapat dicari dari *harga respon sebagai fungsi* terhadap waktu dengan *regresi*. *Kelemahan penggunaan komputer* yang sampai sekarang menjadi kajian menarik adalah: a. kurang tepat dalam memilih asumsi fungsi untuk regresi dari harga 'respon fungsi waktu', b. pemilihan selang waktu perhitungan, dan c. kondisi awal.

Langkah 4: Interpretasi Hasil.

Tiga kelemahan dari solusi penerapan persamaan matematika dengan bantuan komputer ini menjadi menarik bagi peneliti karena ketiganya berhubungan dengan ketepatan pemberian harga atau persamaan matematik yang mempertimbangkan kondisi riil getaran. Interpretasi kondisi riil getaran harus dilakukan dengan dengan baik, misalnya interpretasi terhadap *displacement*, kecepatan, dan akselerasi dari berbagai sistem riil. Hasil ini harus diinterpretasikan dengan jelas untuk keperluan analisis dan kemungkinan implikasi terhadap hasil rancangan. Hasil prosedur *Langkah-4* digunakan untuk mengurangi kelemahan penggunaan komputer pada *Langkah-3*, untuk kebutuhan desain, dan pembuatan produk selanjutnya.

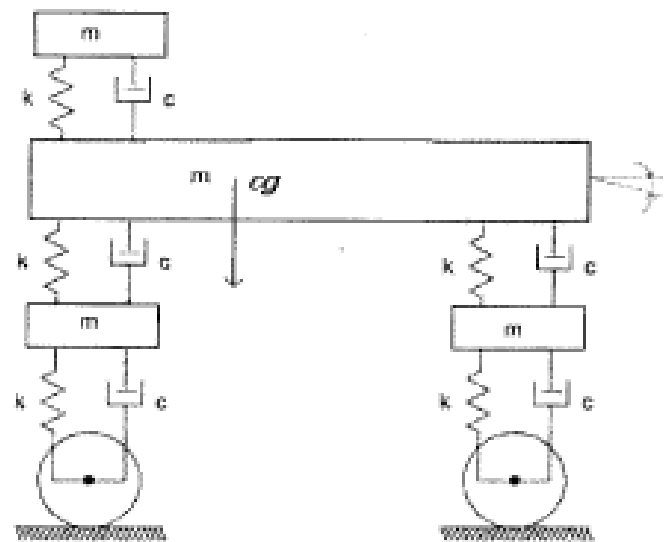
1.5 Model Getaran Sesuai Kebutuhan

Idealisasi suatu permasalahan getaran adalah langkah awal untuk menganalisis permasalahan tersebut. Idealisasi tergantung dari kepentingan yang dianalisis, apakah satu, dua, atau banyak derajat kebebasan. Sebagai contoh adalah mobil. Jika kita ingin melihat karekteristik suspensi mobil terhadap permukaan jalan maka tinjauan teoretik pegas-damper diidealisasikan sebagai sebuah konsentrasi masa (untuk body), yang ditumpu dengan pasangan pegas dan damper (sebagai lokasi pegas dan shock atau hidrolik kendaraan), dan diteruskan sebagai hubungan seri dengan ban. Idealisasi yang tepat untuk kasus ini adalah model satu derajat kebebasan, seperti yang terlihat pada Gambar 1.8(a). Sedangkan jika ingin melihat pengaruh goyangan arah anggukan dari body maka idealisasi yang tepat adalah sistem dengan dua derajat kebebasan seperti Gambar 18(b).

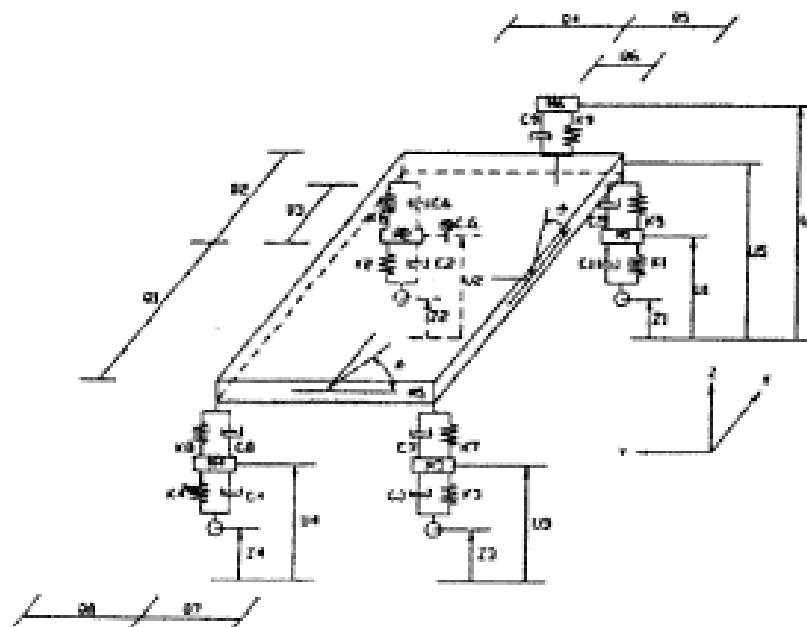


Gambar 1.8 Idealisasi model sistem suspensi mobil

Untuk kasus dengan mempertimbangkan kenyamanan sopir maka idealisasi yang tepat adalah model massa-pegas-redaman dengan banyak derajat kebebasan seperti Gambar 1.9. Untuk kasus ini orang sebagai massa dihubungkan seri sebagai spring-damper dengan jok. Kemudian keduanya dihubungkan seri dengan bodi (mobil atau chasis) sebagai massa. Keduanya dihubungkan seri dengan suspensi sebagai idealisasi dari pegas-redaman.



Gambar 1.9 Idealisasi model sistem nyaman sopir 2D



Gambar 1.10 Idealisasi sistem pegas-damper mobil 3D

Hasil akhir ini dihubungkan seri dengan idealisasi untuk model peleg sebagai massa tersendiri sebelum beban sampai ban sebagai pegas-redaman. Analisis kasus ini berupa analisis separuh mobil atau analisis dalam dua dimensi, dapat diamati Gambar 1.9. Analisis *keseluruhan mobil* (3D) dapat dilakukan dari idealisasi model sesuai Gambar 1.10.

1.6 Elemen Pegas

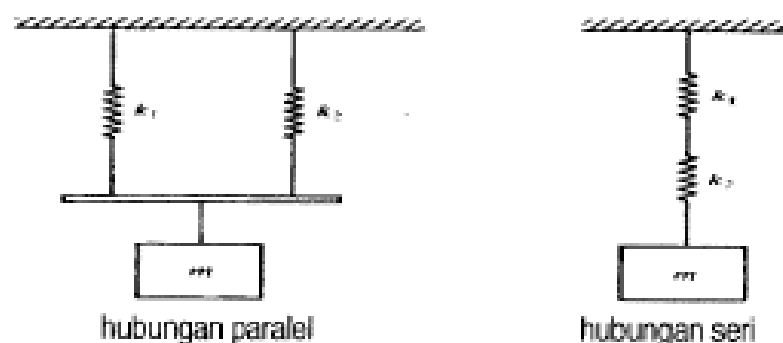
Elemen pegas merupakan idealisasi dari asumsi untuk koneksi antar benda *lamp mass*. Elemen pegas dapat juga sebagai idealisasi elemen mesin yang berkelakuan seperti pegas, yaitu mempunyai elastisitas atau idealisasi seperti benda riil pegas, misalnya pegas daun penyangga bak truk, dan pegas spiral penyangga body mobil bagian depan. Apabila sifat elastisitas dikatakan linier maka hubungan untuk pegas tersebut disebut pegas linier. Pegas linier adalah salah satu jenis penghubung mekanik yang secara umum diasumsikan dengan massa dan efek redamanannya diabaikan. Gaya pegas berbanding lurus dengan deformasinya, seperti terlihat pada persamaan berikut:

$$F = k \cdot x \quad (1.4)$$

di mana F adalah gaya pegas dengan deformasi sebesar ' x ' dan konstanta pegas k . Dalam banyak kasus, beberapa pegas linier digunakan secara kombinasi. Pegas-pegas ini dapat dikombinasikan menjadi satu pegas yang ekuivalen.

Kasus 1. Hubungan Pegas Paralel

Pegas dalam susunan paralel, seperti dinyatakan pada Gambar 1.11(a), jika W adalah berat dari suatu massa m , maka kita dapat mencari persamaan keseimbangan benda yaitu:



Gambar 1.11 Kombinasi pegas seri dan paralel

$$W = k_1 \delta_{st} + k_2 \delta_{st} \quad (1.5a)$$

di mana δ_{st} defleksi statik. Jika ' k_{eq} ' merupakan simbol konstanta pegas ekuivalen dari kombinasi dua pegas, pada kasus ini, dan pegas mengalami defleksi statik yang sama, maka persamaannya menjadi:

$$W = k_{eq} \delta_{st} \quad (1.5b)$$

Dari persamaan 1.5a dan 1.5b diperoleh:

$$k_{eq} = k_1 + k_2 \quad (1.6)$$

Secara umum jika kita memiliki n-pegas dengan konstanta pegas dari ' k_1 , k_2 , ..., sampai k_n ' dalam susunan paralel maka konstanta pegas ekuivalen k_{eq} diperoleh:

$$k_{eq} = k_1 + k_2 + \dots + k_n \quad (1.7)$$

Kasus 2. Hubungan Pegas Seri

Pembahasan kasus 2 adalah untuk pegas dalam susunan seri, seperti dinyatakan Gambar 1.11 (b). Karena benda mendapat gaya W yang sama maka kita dapati keseimbangannya sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W &= k_1 \delta_1 \\ W &= k_2 \delta_2 \end{aligned} \quad (1.8)$$

δ_1 dan δ_2 defleksi pegas 1 dan pegas 2. Total defleksi dari ke-2 pegas tersebut sama dengan defleksi statik yang terjadi, yaitu:.

$$\delta_{st} = \delta_1 + \delta_2 \quad (1.9)$$

Jika k_{eq} merupakan simbol konstanta pegas ekuivalen, untuk defleksi statik yang sama maka persamaannya menjadi:

$$W = k_{eq} \delta_{st} \quad (1.10)$$

Dari persamaan 1.9 dan persamaan 1.8 diperoleh:

$$k_1 \delta_1 = k_2 \delta_2 = k_{eq} \delta_{st} \quad (1.11)$$

$$\text{atau} \quad \delta_1 = \frac{k_{eq} \delta_{st}}{k_1} \quad \text{dan} \quad \delta_2 = \frac{k_{eq} \delta_{st}}{k_2} \quad (1.12)$$

Substitusikan persamaan 1.12 ke persamaan 1.10 sehingga diperoleh:

$$\frac{k_{eq} \delta_{st}}{k_1} + \frac{k_{eq} \delta_{st}}{k_2} = \delta_{st} \quad \text{atau} \quad \frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad (1.13)$$

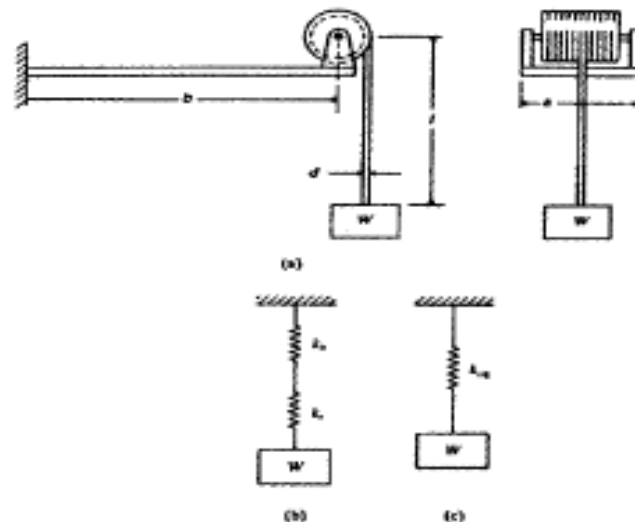
Secara umum persamaan 1.13 untuk kasus dengan n pegas disusun seri

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n} \quad (1.14)$$

Penggunaan hubungan seri dan paralel dinyatakan dalam kasus tertentu sebagai pegas yang dihubungkan dengan komponen *rigid* seperti pulley, lever, dan roda gigi. Untuk kasus dengan konstanta ekuivalen pegas ditemukan dengan menggunakan energi ekuivalen seperti pada Contoh 1.1 berikut ini.

Contoh 1.1

Sebuah *Hoisting Drum* dipasang pada ujung dari sistem cantilever seperti terlihat pada Gambar 1.9(a). Tentukan konstanta ekuivalen dari pegas sistem dengan kawat baja yang menjulur panjang l dari hoisting drum. Asumsikan: diameter kawat baja ' d ' dan modulus young batang dan kawat baja bahan sama, yaitu dengan ' E '.



Gambar 1.12 Hoisting drum

Jawab contoh 1.1:

Diketahui : Dimensi batang cantilever, panjang = b , lebar = a
ketebalan = t , Modulus young batang = E , panjang kawat
baja = l , diameter = d , dan modulus young kawat baja = E .

Tentukan : Konstanta pegas ekuivalen dengan susunan pegas seri

Jawab : Konstanta pegas dari batang cantilever diperoleh dari ekuivalen lendutan cantilever sederhana sesuai hubungan dalam mekanika teknik, yaitu:

$$k_b = \frac{3EI}{b^3} = \frac{3E}{b^3} \left(\frac{1}{12} at^3 \right) = \frac{Eat^3}{4b^3}$$

Kekakuan dari kawat baja akibat beban aksial dicari dari asumsi hubungan pegas dan defleksi, sebagai berikut:

$$k_c = \frac{AE}{l} = \frac{\pi d^2 E}{4l}$$

Batang cantilever dan kawat baja dapat ditinjau sebagai pegas yang disusun seri sehingga konstanta pegas ekuivalennya adalah:

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_b} + \frac{1}{k_c} = \frac{4b^3}{Eat^3} + \frac{4l}{\pi d^2 E}$$

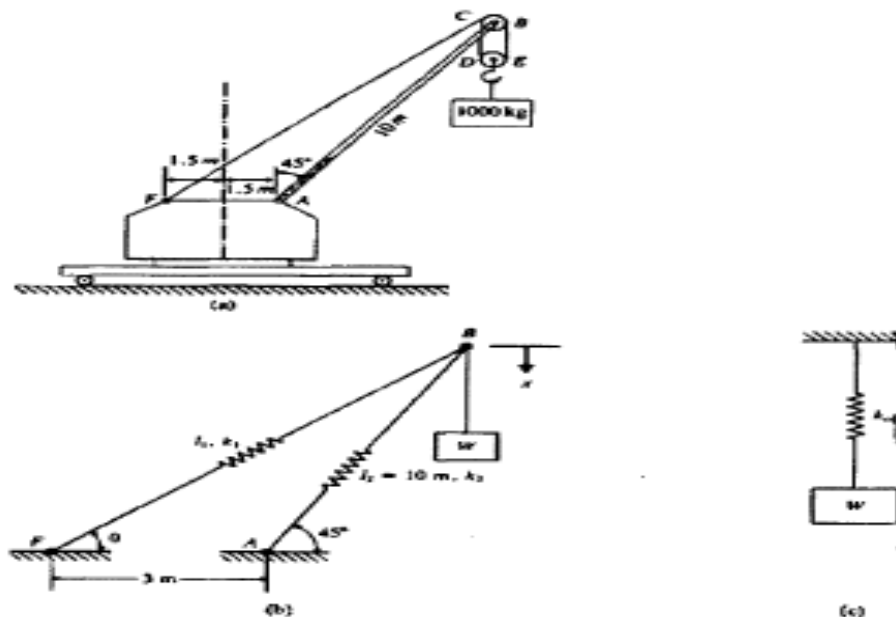
atau:

$$k_{eq} = \frac{E}{4} \left(\frac{\pi at^3 d^2 b^3}{\pi d^2 b^3 + lat^3} \right)$$

Contoh 1.2

Sebuah penyangga umumnya terdiri dari susunan *truss* (asumsi rangka batang hanya mengalami gaya tarik-tekan) atau *boom* (penyangga beban, asumsi batang frame berupa cantilever hollow atau tengah berlubang) yang terbuat dari material baja. Sebut saja penyangga tersebut sebagai batang AB dengan pengontrol ketinggian dari tali baja di atasnya. Peralatan ini disebut *crane* (salah satu jenis Pesawat Pengangkat Beban), lihat Gambar 1.13(a). Truss juga dapat idealisasi dari tali baja, termasuk tali baja di mana digantungkan

beban. Batang baja yang uniform dengan panjang 10 m dan luas penampang 2500 mm^2 . Beban dengan massa 1000 kg menggantung pada crane ketika crane dalam keadaan diam. Kabel CDEBF terbuat dari baja yang memiliki luas penampang 100 mm^2 . Abaikan pengaruh dari kabel CDEB, tentukan konstanta pegas ekuivalen dari sistem dalam arah vertikal. Idealisasi rangkaian pegas dinyatakan pada Gambar 1.13(b), dan rangkaian ekuivalen dapat diamati dari Gambar 1.13(c).



Gambar 1.13 Crane pengangkat beban

Diketahui : Batang AB Panjang = 10 m, $A_1 = 2500 \text{ mm}^2$,
Material baja
Kabel FB, $A_2 = 100 \text{ mm}^2$, Material baja
Jarak base AF = 3m

Tentukan : Konstanta pegas ekuivalen sistem
Pendekatan ekuivalen energi potensial pegas seri-paralel

Jawab : Vertical displacement x pada titik B akan menyebabkan pegas k_2 (batang AB) terdeformasi sejauh $x_2 = x \cos 45^\circ$, kemudian

pegas k_1 (kabel FB) terdeformasi sejauh $x_1 = x \cos (90^\circ - \theta)$. Panjang kabel FB diasumsikan dengan satu satuan panjang, sehingga persamaannya menjadi:

$$l_1^2 = 3^2 + 10^2 - 2(3)(10)\cos 135^\circ = 151,426, \quad l_1 = 12,3055 \text{ m}$$

Sudut θ sebagai kemiringan tali baja digunakan untuk mempertahankan kondisi seimbang beban menjadi:

$$l_1^2 + 3^2 - 2(l_1)(3)\cos \theta = 10^2, \quad \cos \theta = 0,8184, \quad \theta = 35,0736^\circ$$

Total energi potensial yang disimpan dalam pegas k_1 dan dalam pegas k_2 diberikan oleh persamaan berikut ini:

$$U = \frac{1}{2}k_1(x \cos 45^\circ)^2 + \frac{1}{2}k_2[x \cos (90^\circ - \theta)]^2$$

Persamaan ini merupakan rumus persamaan energi pegas sebagai $U = \frac{1}{2} k x^2$, di mana defleksi x mengikuti posisi tali baja dan boom yang sudah miring, sehingga:

$$k_1 = \frac{A_1 E_1}{l_1} = \frac{(100 \times 10^{-6})(207 \times 10^9)}{12,3055} = 1,6822 \times 10^6 \text{ N/m}$$

Dan untuk konstanta pegas ke-2 dengan cara yang sama menjadi:

$$k_2 = \frac{A_2 E_2}{l_2} = \frac{(2500 \times 10^{-6})(207 \times 10^9)}{10} = 5,1750 \times 10^6 \text{ N/m}$$

Harga U dapat diketahui dan dapat dihitung dari harga k_1 dan k_2 yang diper-oleh di atas. Harga U ini sama dengan harga dengan menggunakan k_{eq} sebagai asumsi dari pegas ekuivalen. Dalam arah vertikal k_{eq} mengalami deformasi sejauh asumsi ' x '. Oleh sebab itu energi potensial ekuivalen pada pegas (U_{eq}) dengan persamaan berikut:

$$U_{eq} = \frac{1}{2}k_{eq}x^2$$

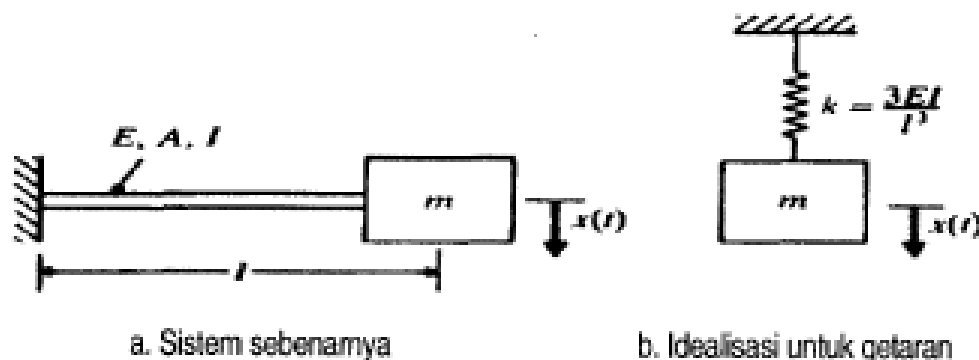
Dengan melakukan setting kondisi $U = U_{eq}$ maka kita peroleh konstanta pegas ekuivalen sistem menjadi:

$$k_{eq} = 26,4304 \times 10^6 \text{ N/m}$$

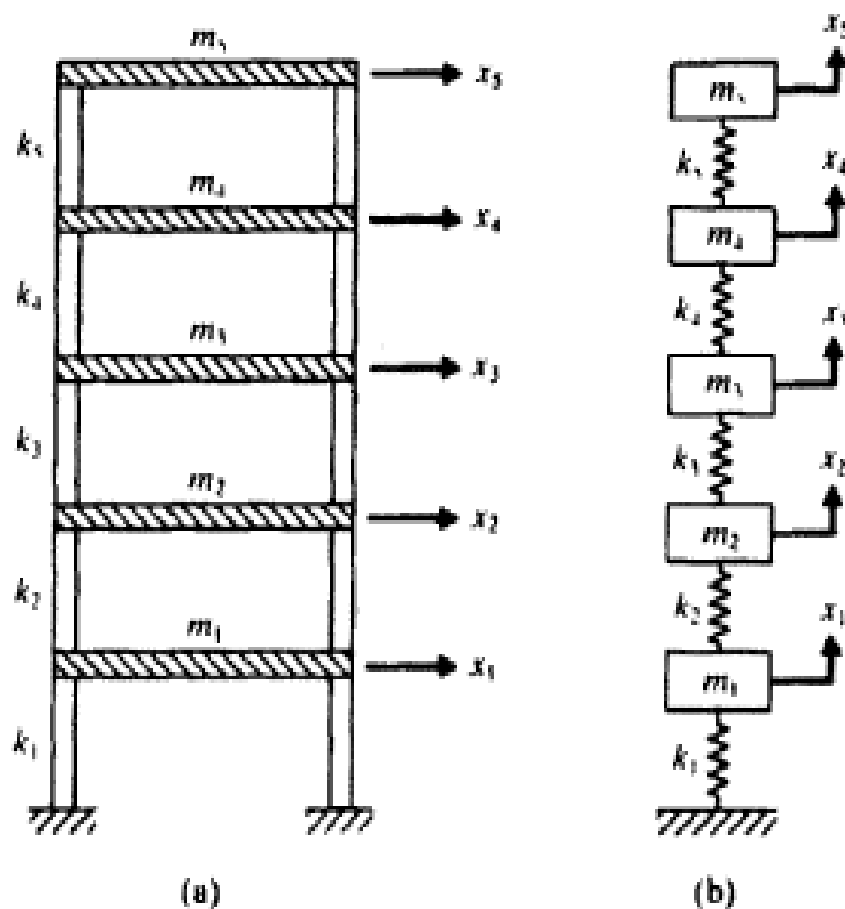
1.7 Elemen Massa atau Inersia

Inertia atau kelembaman merupakan sifat kecenderungan suatu benda untuk melawan beban aksi yang diterimanya. Umumnya benda memiliki kapasitas bertahan terhadap benda lain, dan apabila benda tidak dapat bertahan dari beban yang diterima maka benda tersebut akan hancur. Ketahanan benda dinyatakan dengan gerakan sebagai bentuk tambahan energi dalam yang diterima dari beban. Gerakan ini merupakan ciri dari kelembaman benda. Keadaan dapat berbeda bila elemen massa atau inersia diasumsikan sebuah benda rigid, di mana benda ini dapat menerima atau kehilangan energi kinetik ketika kecepatan benda tersebut berubah. Dari hukum ke-2 untuk gerakan Newton, hasil kali massa dan percepatannya adalah gaya yang dikenai pada benda. Kerja '*gaya dikalikan perpindahan*' benda dengan harga kerja positif bila perpindahan searah gaya yang bekerja. Atau usaha merupakan kerja yang berlangsung disimpan oleh massa dalam bentuk energi kinetik dari massa.

Dalam kebanyakan kasus kita harus menggunakan model matematika untuk merepresentasikan sistem getaran dengan beberapa kemungkinan model matematika. Tujuan dari analisis seringkali untuk menentukan model matematika mana yang tepat. Satu model matematika yang dipilih, maka elemen massa atau inersia dari sistem dapat dengan mudah diidentifikasi. Sebagai contoh, perhatikan batang cantilever lihat Gambar 1.14(a). Terhadap gambar ini dapat dilakukan analisis cepat dan logis, bahwa massa dan peredam dari batang yang menghubungkan tumpuan dengan benda dapat diabaikan. Sistem dapat dimodelkan sebagai sistem pegas-massa SDOF seperti terlihat pada Gambar 1.14(b). Persoalannya adalah seberapa akurat koefisien pegas k kita asumsikan agar idealisasi Gambar 1.14(b) mendekati kenyataan.



Gambar 1.14 Cantilever dengan massa di ujung



Gambar 1.15 Idealisasi gedung bertingkat sistem MDOF

Massa m yang ada di ujung cantilever merepresentasikan elemen massa, dan elastisitas batang sebagai kekakuan pegas. Berikutnya, perhatikan sebuah gedung bertingkat yang mengalami gempa bumi. Asumsikan bahwa massa dari kerangka dinding diabaikan karena relatif kecil dibandingkan dengan massa lantai. Atau, ada perhitungan asumsi efektif dari sejauh mana kekakuan lantai dapat ditambahkan akibat pengaruh massa dinding. Bangunan dapat dimodelkan sebagai sebuah multi derajat kebebasan seperti terlihat pada Gambar 1.15. Massa lantai dari berbagai tingkat merepresentasikan elemen massa dan elastisitas rangka arah vertical sebagai elemen pegas.

Dua contoh berikut ini merupakan praktek idealisasi model beberapa massa yang ada dikombinasikan menjadi satu massa ekuivalen untuk mempermudah analisis, seperti pembahasan berikut:

Kasus 1. Massa yang bertranslasi dengan sebuah benda rigid.

Seperti pada Gambar 1.13 (a), ada beberapa massa yang menempel pada batang dengan salah satu ujungnya diengsel. Sebuah massa ekuivalen dapat diasumsikan ada di sepanjang batang. Agar lebih spesifik, kita asumsikan lokasi dari massa ekuivalen dengan ' m_1 '. Kecepatan dari massa m_2 (\dot{x}_2/dt)

dan m_3 adalah (\dot{x}_3), dapat diekspresikan dalam terminologi kecepatan m_1 (\dot{x}_1). Dengan mengasumsikan displacement angular batang kecil maka:

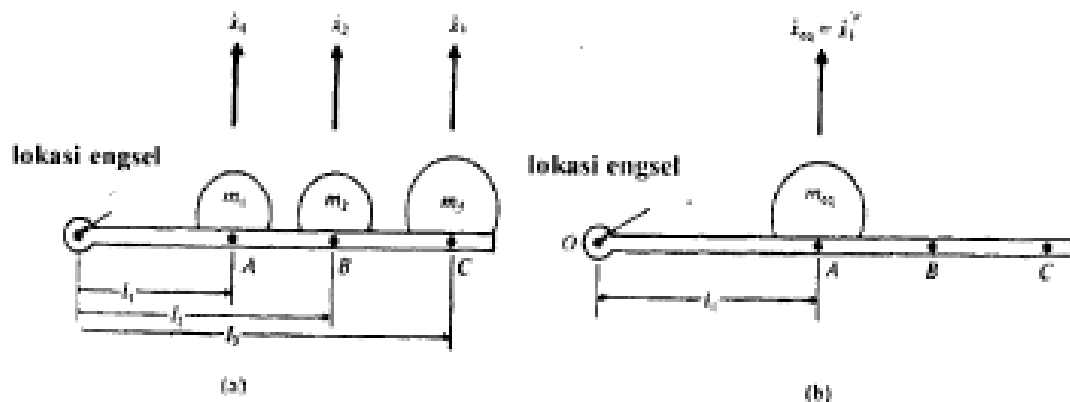
$$\dot{x}_2 = \frac{l_2}{l_1} \dot{x}_1; \quad \dot{x}_3 = \frac{l_3}{l_1} \dot{x}_1 \quad (1.15)$$

dan

$$\dot{x}_{eq} = \dot{x}_1 \quad (1.16)$$

Dengan menerapkan persamaan energi kinetik dari ketiga massa sistem untuk mendapatkan massa ekuivalen, diperoleh persamaan:

$$\frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{x}_3^2 = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}_{eq}^2 \quad (1.17)$$



Gambar 1.16 Massa translasi dengan rigid body

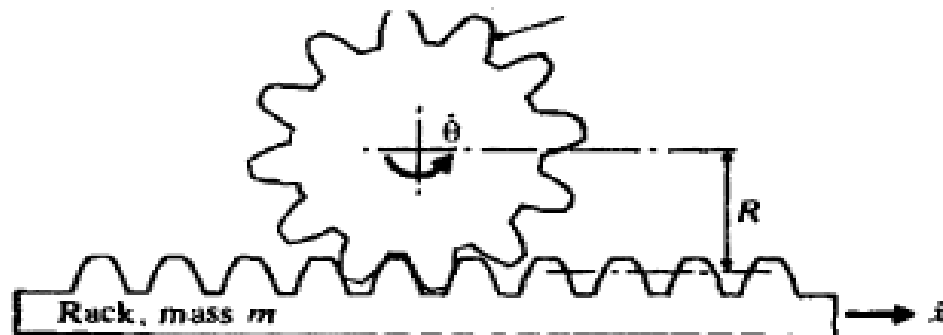
Dengan mensubstitusikan persamaan 1.15 dan 1.16 diperoleh:

$$m_{eq} = m_1 + \left(\frac{l_2}{l_1} \right)^2 m_2 + \left(\frac{l_3}{l_1} \right)^2 m_3 \quad (1.18)$$

Kasus 2. Massa yang bertranslasi dan berotasi bergerak bersamaan.

Sebuah massa 'm' memiliki kecepatan translasi ' \dot{x}/dt ' dikopel dengan massa yang lain (massa dari momen inersia ' J_0 ') yang memiliki kecepatan rotasional ' $d\theta/dt$ ' pada susunan *rack dan pinion* seperti pada Gambar

1.17(b). Dua massa tersebut dapat berkombinasi untuk memperoleh sebuah massa ekuivalen yang bertranslasi, m_{eq} , atau sebuah massa ekuivalen yang berotasi, J_{eq} , seperti dijelaskan berikut ini.



Gambar 1.17 Massa bertranslasi dan berotasi

Massa ekuivalen yang bertranslasi, yang untuk kasus ini energi kinetik dari kedua massa tersebut diberikan sebagai berikut:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2 \quad (1.19)$$

Energi kinetik ekuivalen dapat diekspresikan sebagai berikut:

$$T_{eq} = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}_{eq}^2 \quad (1.20)$$

Karena $\dot{x}_{eq} = \dot{x}$ dan $\dot{\theta} = \dot{x}/R$, maka ekuivalensi T dan T_{eq} membentuk persamaan berikut ini:

$$\frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_0 \left(\frac{\dot{x}}{R} \right)^2 \quad (1.21)$$

sehingga:

$$m_{eq} = m + \frac{J_0}{R^2} \quad (1.22)$$

1.8 Elemen Peredam

Umumnya energi getaran yang timbul dari proses gerakan benda diserap oleh udara sebagai panas atau bunyi. Idealisasi benda dengan kemampuan dapat *mengalirkan panas atau suara ke udara* disebut dengan *peredaman*, dengan simbol *redaman* pada model. Jadi idealisasi model untuk peredaman tidak selalu sama dengan redaman dari defleksi yang terjadi dari operasional aktuator. Meskipun demikian jumlah energi yang dikonversikan ke panas atau suara relatif kecil.

Pertimbangan adanya idealisasi redaman menjadi hal yang sangat penting untuk sebuah prediksi yang akurat terhadap respons getaran sebuah idealisasi model sistem. Hal ini antara lain disebabkan oleh asumsi dari benda yang dianggap tak bermasa dan tidak memiliki elastisitas, tetapi dapat berkelakuan sebagai peredam. Gaya peredaman hanya ada jika kecepatan relatif terjadi antara dua ujung lokasi peredam. Sangatlah sulit menentukan penyebab dari redaman dalam sistem secara praktis. Oleh karena itu redaman dimodelkan sebagai satu atau lebih jenis redaman berikut ini.

1. Redaman Viscous

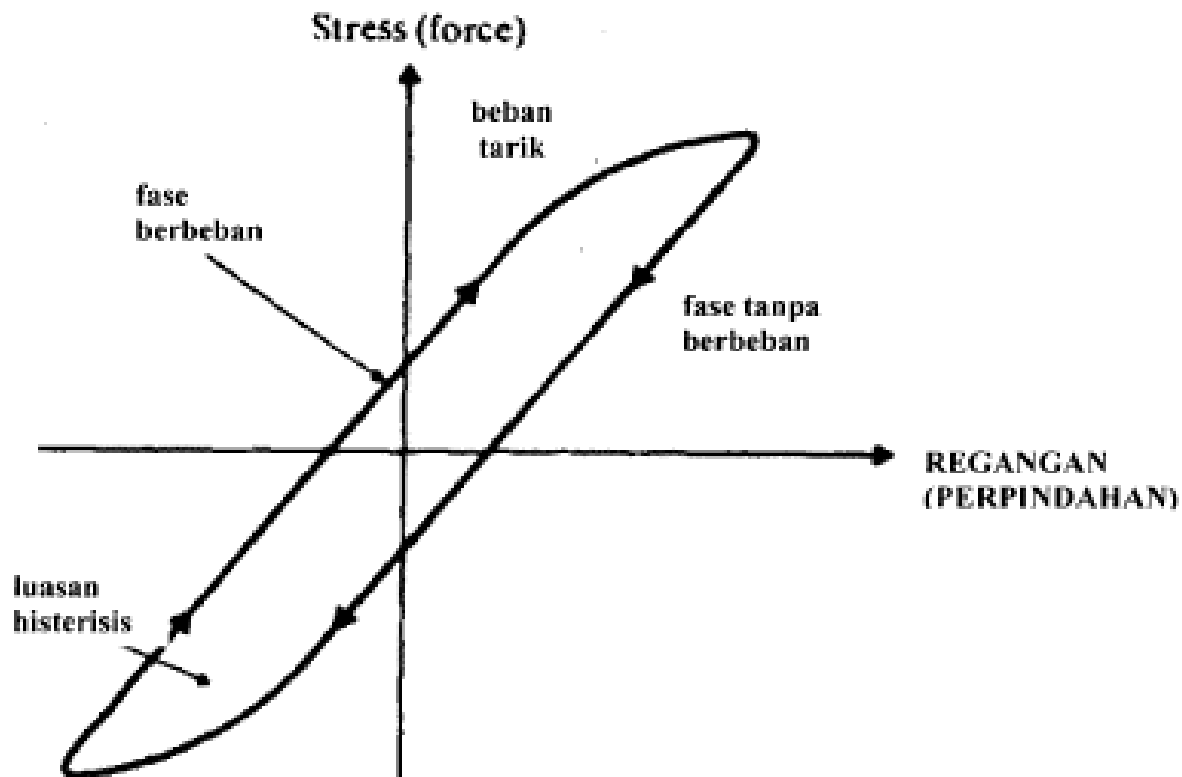
Jenis redaman ini paling banyak digunakan pada aplikasi model sistem getaran. Ketika sistem mekanis bergetar dalam sebuah media fluida, misalnya udara, air, atau minyak, maka akan timbul resistensi dari fluida yang menyebabkan energi sistem berkurang. Dalam kasus ini jumlah energi yang berkurang tergantung pada ukuran dan bentuk dari benda yang bergetar, viskositas fluida, frekuensi getaran, dan kecepatan getar benda. Dalam peredam viscous, gaya redaman proporsional dengan kecepatan dari benda yang bergetar. Contoh dari redaman jenis ini adalah lapisan tipis fluida di antara dua permukaan sliding, dengan contoh yaitu: aliran fluida dipermukaan piston dalam silinder, aliran fluida yang melintasi orifice dan lapisan fluida pada bantalan jurnal.

2. Redaman Coulumb

Gaya pada jenis redaman ini konstan besarnya tetapi arahnya berlawanan dengan gerakan benda yang bergetar. Hal ini disebabkan friksi yang terjadi akibat lubrikasi yang tidak sempurna terjadi atau pelumas yang tersedia tidak mencukupi.

3. Redaman Hysteretic

Apabila sebuah benda terdeformasi maka energinya akan discrap oleh material sehingga pada akhirnya berpindah pada atau ditiup udara. Hal itu disebabkan oleh adanya gesekan di internal material. Dalam hal ini *slip or slide* adalah bentuk deformasi yang sering terjadi. Ketika sebuah benda memiliki material redaman terhadap getaran, diagram tegangan-regangan memperlihatkan *hysteresis loop* yang ditunjukkan pada Gambar 1.18. Luasan loop menyatakan bahwa kehilangan energi per siklus disebabkan oleh redaman.



Gambar 1.18 Hysteresis loop untuk material elastik

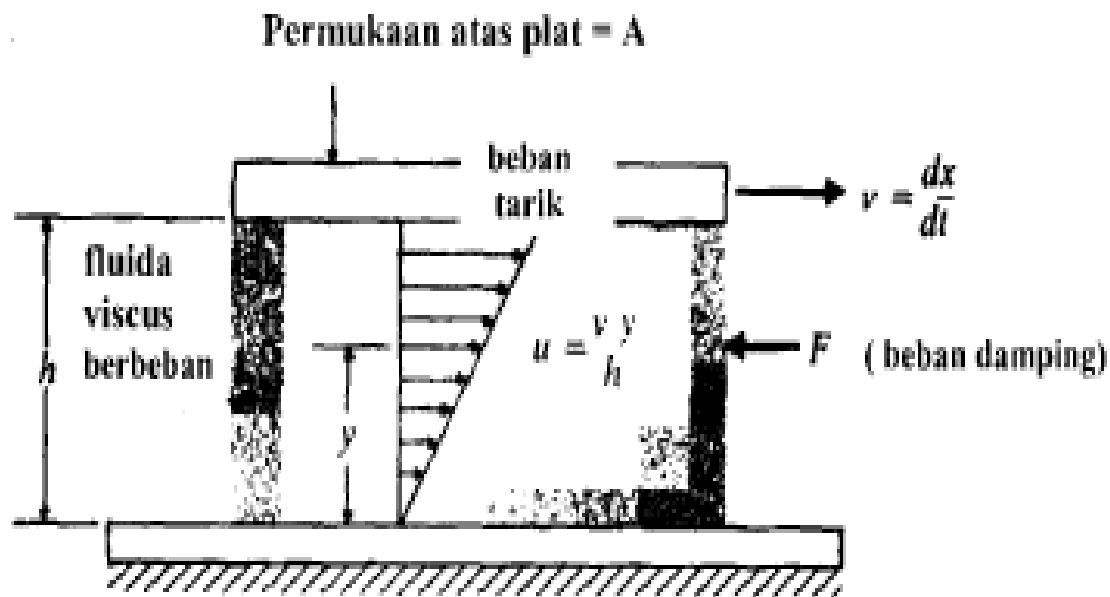
Konstruksi peredam viscous dapat dibuat menggunakan dua plat paralel yang dipisahkan sejauh h oleh fluida dengan viskositas μ . Lihat Gambar 1.19. Salah satu plat diam sedangkan yang lain bergerak dengan kecepatan v . Lapisan fluida yang kontak dengan plat bergerak dengan kecepatan v sedangkan yang kontak dengan plat yang diam dan tidak bergerak. Kecepatan antara keduanya diasumsikan bervariasi secara linier antara 0 dan v seperti pada Gambar 1.19. Merujuk hukum Newton, pada aliran viscous, persamaan tegangan geser (τ) yang dikembangkan dalam lapisan fluida pada jarak y dari plat diam adalah sebagai berikut:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (1.23)$$

$du/dy = v/h$ adalah gradien kecepatan. Gaya geser F yang terjadi pada bagian bawah permukaan plat yang bergerak menjadi:

$$F = \tau A = \frac{\mu A v}{h} = c v \quad (1.24)$$

A adalah luas permukaan plat yang bergerak dan $c = \frac{\mu A}{h}$ adalah konstanta redaman.



Apabila model peredam diasumsikan dari susunan kombinasi plat dan fluida bertumpuk, langkah penyelesaian model mengikuti pembahasan pada Sub Bab 1.6 dan Sub Bab 1.7 (pegas dan inersia).

Contoh 1.3

Dapatkan hubungan antara konstanta redaman c dalam diameter ' D dan d ' untuk alat penekan (drop forging) pembuatan tabung cetak dari produk alat dashpot seperti diperlihatkan pada Gambar 1.20(a).

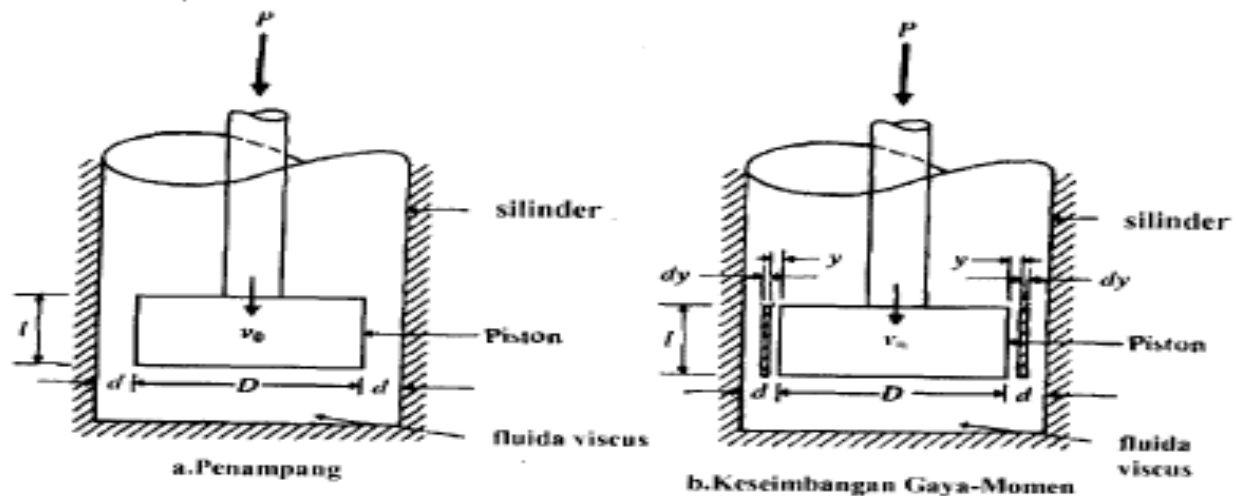
Diketahui: Diameter silinder = $D + 2d$, diameter piston = D , Kecepatan piston = v_0 , panjang aksial piston = l , viskositas fluida = μ .

Tentukan : Konstanta redaman dashpot ' c '.

Pendekatan : Persamaan tegangan geser untuk aliran viscous. Persamaan laju aliran fluida.

Solusi : Seperti terlihat pada Gambar 1.20(a).

Dashpot terdiri dari piston dengan diameter D , panjang l dengan kecepatan v_0 dengan silinder yang diisi fluida dengan viskositas μ . Jarak antara piston dan dinding silinder didefinisikan sebagai d . Pada posisi y dari permukaan yang bergerak didefinisikan memiliki kecepatan v dan tegangan gesernya τ , dan pada jarak $(y+dy)$ dari permukaan yang bergerak yang didefinisikan memiliki kecepatan $(v+dv)$ dengan tegangan gesernya $(\tau+d\tau)$, Gambar 1.1 (b). Tanda negatif pada dv menunjukkan kecepatan yang berkurang ketika piston bergerak maju. Gaya viscous pada ring annular sama dengan:



Gambar 1.20 Dashpot

$$F = \frac{\pi D}{d\tau} = \pi D \frac{d\tau}{dy} dy$$

Tetapi tegangan geser diberikan sebagai berikut:

$$\tau = -\mu \frac{dv}{dy}$$

Tanda negatif konsisten dengan penurunan gradien kecepatan. Dengan menggunakan dua persamaan sebelumnya, maka:

$$F = -\pi D / dy \mu \frac{d^2 v}{dy^2}$$

Gaya pada piston akan menyebabkan perbedaan tekanan di bagian akhir elemen. Persamaan tekanan tersebut adalah sebagai berikut:

$$P = \frac{4P}{\pi D^2}$$

Sehingga gaya tekan pada bagian ujung elemen menjadi:

$$p(\pi D \, dy) = \frac{4P}{\pi D^2} (\pi D \, dy) = \frac{4P}{D} dy$$

$(\pi D \, dy)$ menunjukkan luasan annular antara y dan $(y+dy)$.

Jika diasumsikan kecepatan rata-rata uniform dalam arah gerakan fluida maka gaya yang diberikan dalam tiga persamaan sebelumnya harus sama sehingga diperoleh persamaan berikut:

$$\frac{4P}{D} dy = -\pi D / dy \mu \frac{d^2 v}{dy^2} \quad \text{atau} \quad \frac{d^2 v}{dy^2} = -\frac{4P}{\pi D^2 / \mu}$$

Dengan melakukan integrasi dua kali dan menggunakan kondisi batas untuk $v = -v_o$ di $y = d$, kita peroleh:

$$v = -\frac{2P}{\pi D^2 / \mu} (yd - y^2) - v_o \left(1 - \frac{y}{d}\right)$$

Laju aliran yang melintasi ruang sisa antara ring dan dinding silinder diperoleh dengan mengintegrasikan laju aliran yang melintas antara elemen dengan batas $y = 0$ dan $y = d$, sehingga diperoleh:

$$Q = \int_0^d v \pi D dy = \pi D \left[\frac{2Pd^3}{6\pi D^2 / \mu} - \frac{1}{2} v_o d \right]$$

Volume dari cairan yang melintasi ruang sisa pembakaran per detik harus sama dengan besar volume persamaan detik yang dipindahkan oleh

piston. Dengan demikian kecepatan piston akan sama dengan laju aliran dibagi luas piston yang diekspresikan dengan persamaan berikut:

$$v_0 = \frac{Q}{\pi D^2/4}$$

Substitusikan dua persamaan sebelumnya sehingga diperoleh:

$$P = \left[\frac{3\pi D^3 l \left(1 + \frac{2}{D} \right)}{4d^3} \right] \mu v_0$$

Dengan menyatakan gaya sebagai $P = cv_0$, maka konstanta redaman menjadi sebagai berikut:

$$c = \left[\frac{3\pi D^3 l \left(1 + \frac{2}{D} \right)}{4d^3} \right] \mu$$

1.9 Ringkasan

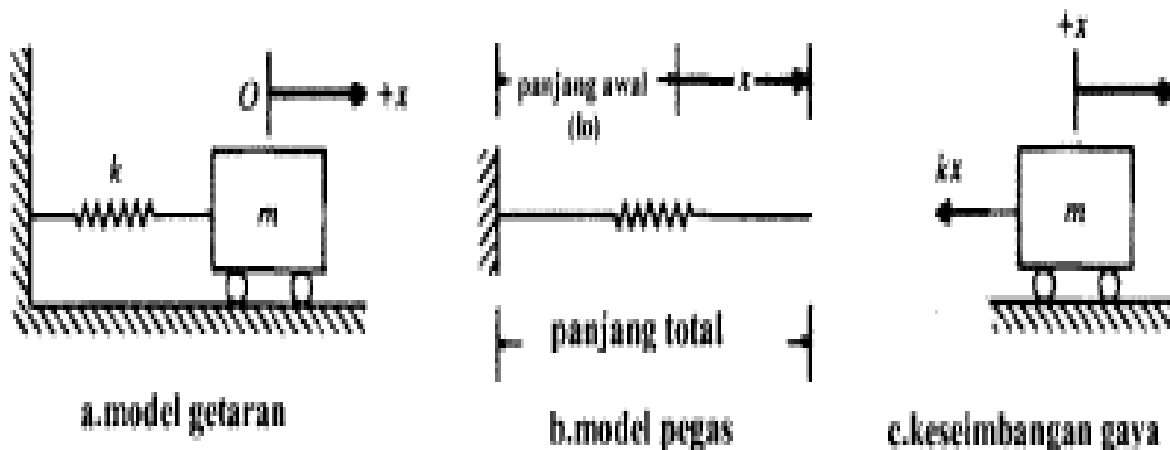
Sejarah ilmu getaran mekanis dimulai dari penemuan Galileo mengenai hubungan antara panjang pendulum dan frekuensinya serta pengamatannya terhadap resonansi dua benda yang dihubungkan oleh energi sebagai transfer getaran pada frekuensi yang sama.

Model matematika getaran dikembangkan untuk membantu analisis getaran di mana perilaku getaran dapat berupa model linier maupun non-linier. Dengan ditemukannya komputer maka metode numerik kemudian menjadi salah satu solusi untuk memecahkan permasalahan getaran yang bersifat non-linier.

Koordinat bebas yang dibutuhkan untuk menentukan jumlah gerakan pada posisi semua bagian dari sistem untuk waktu tertentu, didefinisikan sebagai derajat kebebasan sistem. Sistem getaran memiliki derajat kebebasan satu sampai multi. Semakin tepat dalam menentukan jumlah derajat kebebasan, analisisnya akan menjadi semakin akurat.

Dalam bab ini juga diuraikan prinsip elemen dasar dari sistem getaran yang meliputi elemen pegas, inersia, dan peredam. Dalam buku ini untuk selanjutnya, *khusus lingkup materi getaran Lamp Mass* dibahas, dengan damper linear dan asumsi eksitasi teoritik diberlakukan untuk SDOF, DDOF, dan MDOF.

GETARAN BEBAS SISTEM SATU DERAJAT KEBEBASAN

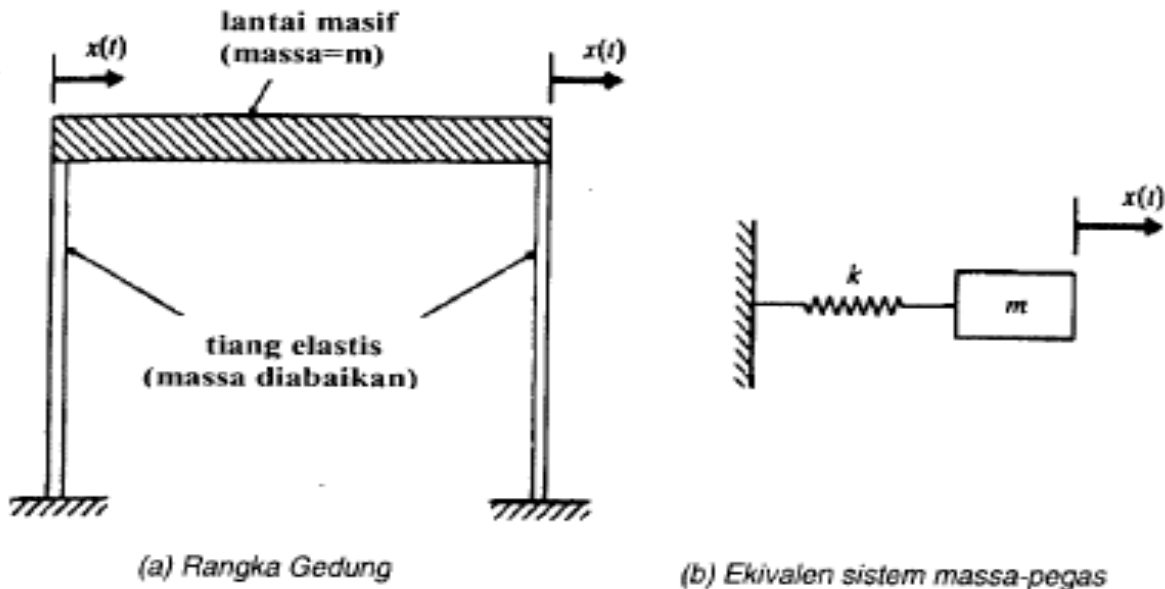


Gambar 2.1 Sistem pegas-massa posisi horizontal

Penyusunan idealisasi model getaran menjadi persamaan getaran dari pendekatan konversi energi dengan dua pendekatan, yaitu (1) menggunakan sistem konservatif dengan asumsi dari energi total sistem yang selamanya tidak berubah dan sistem konservatif ini merupakan awal mula getaran diberlakukan, dan (2) pendekatan dari sistem kekekalan energi dengan asumsi berlaku untuk energi total sistem yang dinyatakan dengan energi potensial dan energi kinetik sesuai rumus berikut ini:

$$K.E. + P.E. = \text{tetap} \quad \text{atau} \quad \frac{d}{dt} K.E. + P.E. = 0 \quad (2.1)$$

Singkatan untuk usaha, yaitu K.E, adalah energi kinetis dan PE sebagai energi potensial. Persamaan yang dihasilkan adalah persamaan gerakan sistem. Selanjutnya metode ini disebut metode energi. Semua penurunan persamaan getaran. Dalam bab ini, pembuatan persamaan getaran dilakukan dengan menggunakan metode ini. Persamaan 2.1 merupakan *differential equation* atau persamaan diferensial. Jika persamaan diferensial setelah dilakukan penyederhanaan menjadi linear, yaitu bentuk diferensial pangkat satu, maka getaran yang terjadi disebut getaran linear, sedangkan jika persamaan diferensialnya non-linier, getaran itu disebut getaran non-linear.



Gambar 2.2 Idealisasi rangka gedung

Persamaan getaran sistem secara umum dinyatakan dalam bentuk matriks. Persamaan ini merupakan kumpulan persamaan diferensial simultan dari turunan kekekalan energi yang tidak hanya melibatkan asumsi pegas, juga termasuk asumsi inersia benda, dan asumsi redaman viscous. Persamaan ini dapat dinyatakan dalam bentuk matriks:

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{F\} \quad (2.2)$$

$$\sum F = ma$$

$$\text{dan } \sum M_{CG} = I\alpha$$

'I' adalah momen inersia sedangkan CG adalah pusat gravitasi massa. Penerapan hukum kedua Newton rigid body membutuhkan *metode free body diagram* untuk mendapatkan solusinya. Ada dua free body diagram, yang pertama adalah free body diagram menggambarkan keseluruhan gaya dan momen eksternal yang dianalisis pada benda, dan yang kedua adalah free body diagram memperlihatkan gaya dan momen efektif. Konsep ini dinyatakan pada Gambar 2.3.

Konsep ini dapat diekspresikan dalam persamaan berikut:

$$\sum F_{Ext} = \sum F_{Eff} \quad (2.3)$$

dan

$$\sum Mo_{Ext} = \sum Mo_{Eff} \quad (2.4)$$

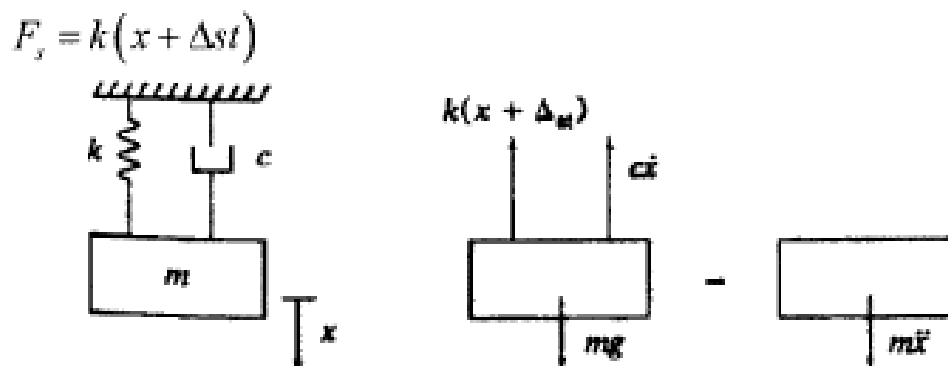
Contoh soal.

1.

Turunkan persamaan gerak dari sistem yang terlihat pada Gambar 2.4(a)!

Solusi:

Misalkan x adalah displacement dari balok. Sudah kita tetapkan bahwa arah x positif adalah ke arah bawah. *Free body diagram eksternal dan efektif* diperlihatkan pada Gambar 2.4. Dari gambar tersebut terlihat bahwa gaya statik tercipta dikarenakan displacement dari pegas yang memiliki konstanta k . Jika x diukur dari keseimbangan statik maka gaya statik dapat diekspresikan dengan persamaan berikut:



Gambar 2.4 Free body diagram Contoh 2.1

Dengan menerapkan hukum kedua Newton diperoleh:

$$\sum F_{Ext} = \sum F_{Eff}$$

$$mg - k(x + \Delta_{st}) - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

Analisis posisi keseimbangan statik diperoleh:

$$\Delta_{st} = \frac{mg}{k}$$

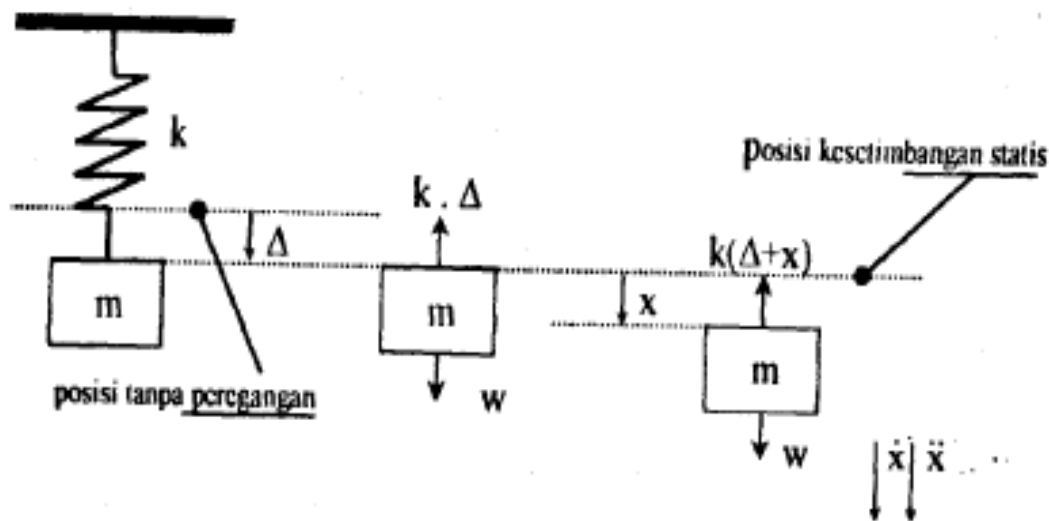
Sehingga persamaan getaran bebas SDOF menjadi:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

2.2 Getaran Bebas Tak Teredam SDOF

Sistem getaran SDOF paling sederhana hanya terdiri dari satu massa dan satu pegas, seperti dinyatakan dalam Gambar 2.6a. Getaran bebas SDOF tak teredam ini hanya mempunyai satu konsentrasi massa dan massa tersebut bergantung pada sebuah pegas. Pegas merupakan penopang massa dengan asumsi kekakuan massa yang diabaikan. Hukum Newton kedua sebagai dasar gerakan pegas-massa ini dijabarkan dalam bentuk persamaan 2.5, yaitu:

$$k \cdot x = w = m \cdot g \quad (2.5)$$



Gambar 2.6a Diagram benda bebas getaran massa-pegas

Simpangan awal diperoleh sesuai dengan rumus statika, yaitu $x = F/k$ dan gaya yang bekerja F sama dengan massa benda dikalikan gravitasi. Efek defleksi x menyebabkan massa berosilasi. Jika diasumsikan tidak terjadi gesekan benda terhadap udara maka gerakan sebuah benda dengan hanya ditumpu pegas tanpa beban luar. Hal ini disebut getaran bebas SDOF.

Beberapa persamaan berikut digunakan untuk menurunkan persamaan getaran dengan metode energi, yaitu:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\omega_n = 2\pi f$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

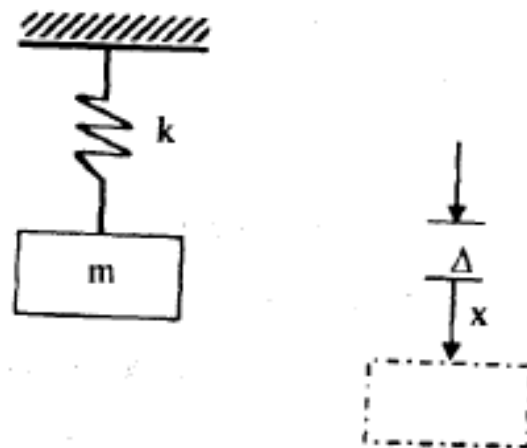
$$\omega_n = 2 \pi f = \frac{2\pi}{T}$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Di mana ω_n sebagai frekuensi pribadi (rad/det), f_n frekuensi pribadi (Hz = 1/s), dan T adalah periode getaran.

Bila benda diberi simpangan dan kemudian dilepas maka benda tersebut akan bergetar pada frekuensi pribadinya sehingga dapat diketahui dari persamaan yang telah ditulis di atas. Bila massanya kecil dan kekakuannya besar maka frekuensi pribadinya besar. Demikian juga sebaliknya, bila massanya besar dan kekakuannya kecil maka frekuensi pribadinya juga kecil.

Hukum kekekalan energi menyatakan jumlah energi kinetik dan energi potensial adalah konstan sehingga $T + U = \text{konstan}$ dan



Gambar 2.6b Sistem pegas massa tanpa redaman

$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0$$

Pada Gambar 2.6(b), pegas dan massa mengalami simpangan sejauh 'x'. Energi kinetik yang terjadi pada massa yang mengalami simpangan adalah:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \text{ sedangkan energi potensial pegas } U = \frac{1}{2} kx^2 .$$

$$\text{Jadi } T + U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 , \text{ atau } T + U = C,$$

$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0 = m\dot{x} \ddot{x} + kx \dot{x}$$

$$\text{Sehingga, } m\ddot{x} + kx = 0$$

Penurunan untuk mendapatkan persamaan getaran bebas tak teredam sederhana ini dapat dilakukan dengan penerapan hukum Newton kedua untuk gerak pada massa m , yaitu dengan persamaan berikut:

$$m \cdot x = \sum F \quad (\text{persamaan Newton-2})$$

$$m \cdot x = w - k \cdot (\Delta + x) \quad (\text{pernyataan } \sum F \text{ dalam bentuk 'usaha'})$$

$$= w - k \cdot \Delta - k \cdot x$$

karena $k \cdot \Delta = w$ maka diperoleh persamaan $m \cdot x = -k \cdot x$. Model matematika persamaan getaran bebas tak teredam pada sistem satu derajat kebebasan dengan cara Newton juga diperoleh:

$$m \ddot{x} + k x = 0 \quad (2.6)$$

m dan k merupakan koefisien tertentu sistem yang menyatakan masa dari lamp mass dan kekakuan pegas. ' k ' adalah idealisasi dari kekakuan asumsi pegas yang menopang idealisasi massa ' m ' dengan koefisien kekakuan tertentu dari sistem persamaan diferensial orde-2.

Solusi persamaan 2.6 dapat diperoleh dengan menyatakan solusi simpangan getaran sebagai *fungsi transien* yang umumnya diasumsikan sebagai *fungsi eksponensial*. Solusi asumsi ini diikuti sesuai tahapan, misal-nya dengan membuat turunan pertama dan kedua persamaan solusi diferensial, meskipun dengan konstanta. Turunan kedua fungsi yang masih mengandung konstanta tidak dalam bentuk angka, dimasukkan dalam persamaan 2.6. Jika *metode sistem ekuivalen* yang digunakan maka ' $m = m_{eq}$ ' dan ' $k = k_{ed}$ '. Asumsi solusi dari persamaan 2.5 merupakan pemisalan sederhana dengan fungsi eksponensial adalah sebagai berikut:

$$x(t) = Ce^{st} \quad (2.7)$$

Konstanta ‘C’ dan ‘s’ adalah konstanta yang akan dicari dari persyaratan kondisi batas yang diberikan.

Substitusikan persamaan 2.7 ke persamaan 2.6, sehingga persamaan 2.6 menjadi:

$$C(ms^2 + k) = 0$$

Karena ‘C’ tidak boleh nol, maka persamaan 2.7 menjadi:

$$ms^2 + k = 0$$

$$\text{Hingga } s = \pm \left(-\frac{k}{m} \right)^{1/2} = \pm i\omega_n \quad (2.8)$$

Harga ‘s’ pada persamaan 2.8 harus merupakan bilangan riil sebagai syarat getaran terjadi. Syarat lain berhubungan dengan parameter frekuensi pribadi atau frekuensi natural dalam satuan radian/det dan frekuensi ini diperoleh dari persamaan berikut:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.9)$$

Syarat terjadinya getaran yang lain adalah harga frekuensi natural atau frekuensi pribadi harus positif dan hal ini mudah dipenuhi. Harga ‘s’ agar merupakan bilangan riil, agar kombinasi harga ‘m’ dan ‘k’ harus sesuai.

Parameter lain dapat diturunkan dari frekuensi natural adalah:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (2.10)$$

Sehingga frekuensi natural dalam satuan sesuai pakar yang diberi kehormatan, yaitu Hz, menjadi:

$$f_n = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.11)$$

Dua nilai ‘s’ diperoleh dari persamaan 2.8 dan ‘s’ merupakan akar dari persamaan kuadrat. Persamaan ini dikenal sebagai *Persamaan Eigenvalue*. Bentuk solusi umum dari persamaan eigenvalue tersebut memperhatikan kemungkinan berlaku dan tidak, yang merupakan bilangan imajiner adalah:

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_n t} + C_2 e^{-i\omega_n t} \quad (2.12)$$

Asumsi solusi persamaan 2.12 dinyatakan hanya dengan tujuan bahwa ekuivalensi persamaan ini (bentuk eksponensial) dapat disetarakan atau diganti dengan ekspresi lain, sebagai *persamaan trigoneometri*. Persamaan trigoneometri dengan sifat khas osilasi umum yang menyatakan simpangan getaran. Identitas kesamaan dengan trigonometri dengan menggunakan identitas sebagai berikut:

$$e^{\pm i\omega_n t} = \cos \omega_n t \pm i \sin \omega_n t \quad (2.13)$$

Maka persamaan 2.13 dapat ditulis kembali menjadi:

$$x(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t \quad (2.14)$$

di mana A_1 dan A_2 adalah konstanta baru. Konstanta C dan C atau A dan A dapat ditentukan dari kondisi awal sistem. Jika nilai dari displacement $x(t)$ dan kecepatan $\dot{x}(t) = (dx/dt)(t)$ dispesifikasikan menjadi x_0 dan \dot{x}_0 pada $t = 0$, maka persamaan 2.10 dengan kondisi awal adalah:

$$\begin{aligned} x(t=0) &= A_1 = x_0 \\ \dot{x}(t=0) &= \omega_n A_2 = \dot{x}_0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

dengan mensubstitusikan persamaan 2.15 ke dalam persamaan 2.14, diperoleh:

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t \quad (2.16)$$

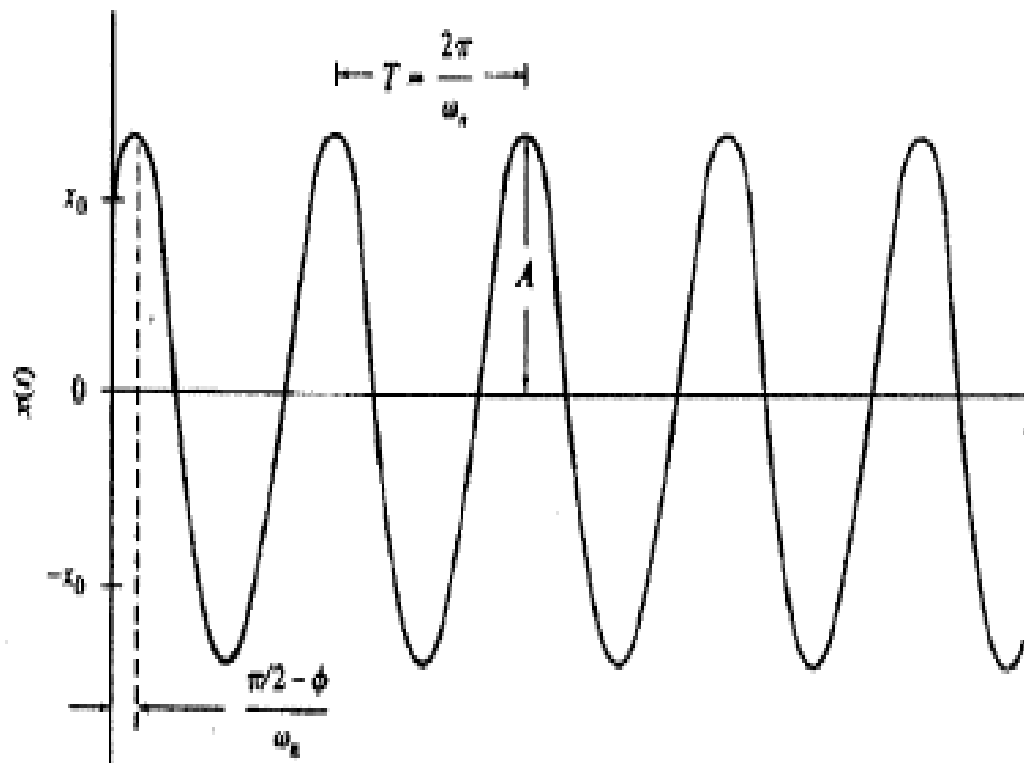
Persamaan 2.16 juga dikenal sebagai persamaan getaran harmonik fungsi waktu yang dapat disederhanakan menjadi:

$$x(t) = A(\sin \omega_n t + \phi) \quad (2.17)$$

$$\text{Dengan amplitudo } A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2} \quad (2.18)$$

$$\text{Dan beda phase } \phi = \tan^{-1} \left(\frac{\omega_n x_0}{\dot{x}_0} \right) \quad (2.19)$$

Respons getaran untuk sistem satu derajat kebebasan yang diwakili oleh persamaan 2.17 diplotkan seperti terlihat pada Gambar 2.6c.



Gambar 2.6c Respons getaran bebas SDOF

Namun biasanya persamaan diferensial getaran bebas tak teredam satu derajat kebebasan ini ditulis dengan mensubstitusikan persamaan 2.10 ke persamaan 2.5 sehingga bentuk sederhana menjadi:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (2.20)$$

2.

Sebuah mesin dengan berat 500 kg diinstalasi di atas *fondasi elastis* yang memiliki konstanta pegas 7×10^5 N/m. Tentukan frekuensi natural sistem tersebut.

Solusi:

Sistem dimodelkan sebagai pegas-massa satu derajat kebebasan SDOF, dan frekuensi natural SDOF dihitung dengan persamaan 2.8, yaitu:

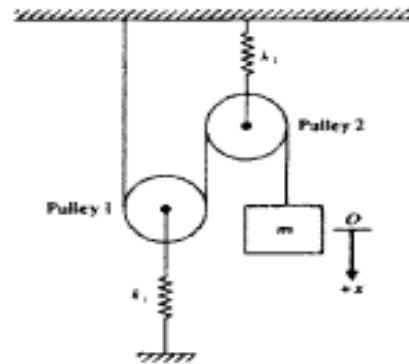
$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{7 \times 10^5}{500}} = 5,96 \text{ Hz}$$

3.

Tentukan frekuensi natural dari gambar dibawah ini. Asumsikan massa pulley diabaikan dan getaran terjadi dengan tidak ada friksi!

Jawab:

Getaran pulley diasumsikan dengan tanpa gesekan dan massa pulley diabaikan. Tegangan tali menjadi konstan dan sama dengan berat W dari massa m . Gaya yang bekerja pada pulley-1 ke atas sebesar $2W$ dan gaya yang bekerja pada pulley-2 ke bawah sebesar $2W$. Asumsikan jika titik pusat pulley-1 bergerak sejauh $2W/k_1$ maka titik pusat pulley-2 bergerak sejauh $2W/k_2$. Sehingga total perpindahan massa m adalah:



$$2\left(\frac{2W}{k_1} + \frac{2W}{k_2}\right).$$

Jika k_{eq} menyatakan konstanta pegas ekuivalen sistem, maka:

$$\frac{W}{k_{eq}} = 4W\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) = \frac{4W(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}$$

$$k_{eq} = \frac{k_1 k_2}{4(k_1 + k_2)}$$

Persamaan getaran dengan *kekakuan ekuivalen* menjadi sebagai berikut:

$$m \ddot{x} + k_{eq} x = 0$$

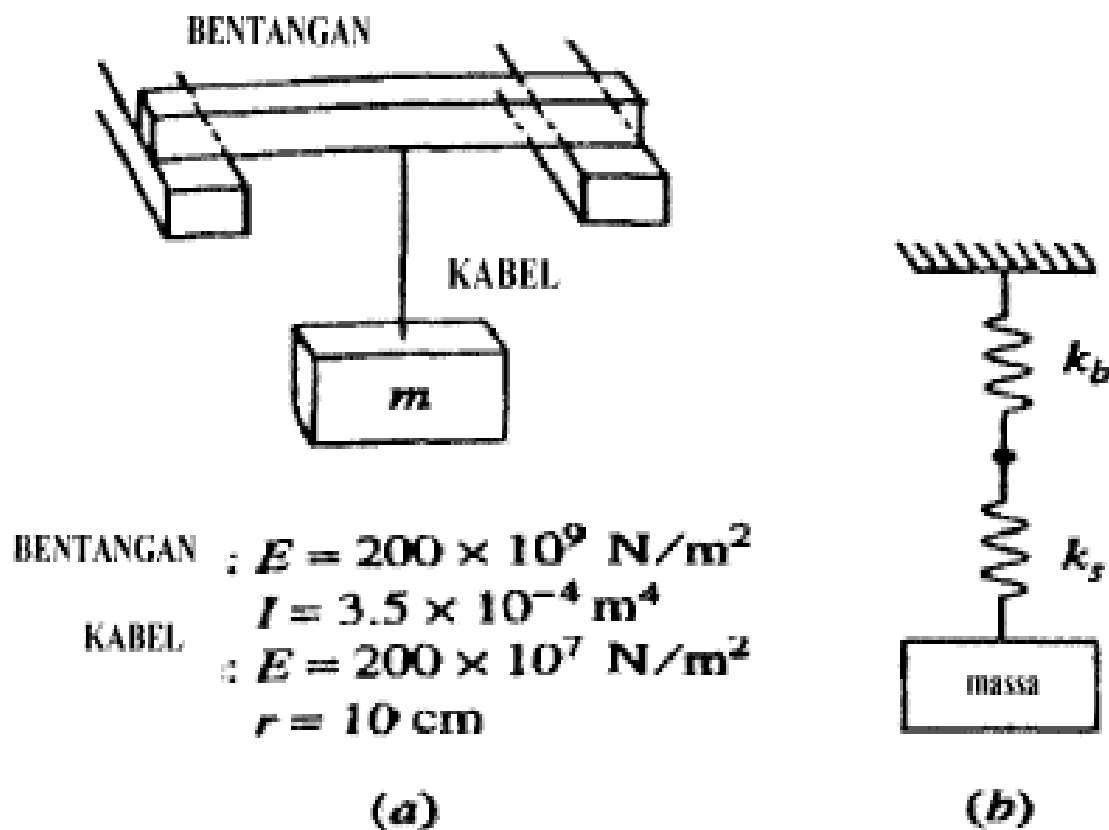
Maka frekuensi natural sistem dengan ω_n atau f_n adalah:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \left[\frac{k_1 k_2}{4m(k_1 + k_2)} \right]^{1/2} \text{ rad/sec}$$

atau

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{k_1 k_2}{4m(k_1 + k_2)} \right]^{1/2} \text{ Hz}$$

4.



Gambar 2.7a. Beban pada bentang hoist

Sebuah pabrik menggunakan mesin pengangkat dan pemindah barang tipe *hoist*. Hoist digantungkan pada sebuah batang sebagai *bentangan* yang dapat bergerak sepanjang lintasan. Beban diikatkan pada kabel. Idealisasi sifat pegas pada hoist diberlakukan untuk *beam* dan kabel yang dihubung seri. Model hoist seperti pada Gambar 2.7(a).

Tentukan:

Frekuensi natural sistem ketika hoist digunakan untuk mengangkat benda sebesar 800 kg dengan panjang tali 9 m.

Jawab:

Langkah pertama yang dilakukan adalah membuat asumsi agar persoalan ini dapat dijawab dengan menempatkan hoist di tengah bentangan batang. Konstanta kekakuan dapat ditentukan menjadi:

$$k_b = \frac{48EI}{L^3} = \frac{48(200 \times 10^9 \text{ N/m}^2)(3,5 \times 10^{-4} \text{ m}^4)}{(3,1 \text{ m})^3} = 1,13 \times 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Konstanta kekakuan kabel menjadi:

$$k_c = \frac{AE}{L} = \frac{\pi(0,1 \text{ m})^2(200 \times 10^9 \text{ N/m}^2)}{9} = 6,98 \times 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Dengan kondisi kekakuan bentangan dan kabel dipasang seri maka:

$$k_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{k_b} + \frac{1}{k_c}} = \frac{1}{\frac{1}{1,13 \times 10^8 \text{ N/m}} + \frac{1}{6,98 \times 10^8 \text{ N/m}}} = 9,73 \times 10^7 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Jadi frekuensi natural sistem adalah:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{9,73 \times 10^7 \text{ N/m}}{800 \text{ kg}}} = 3,49 \times 10^2 \text{ rad/detik}$$

2.3 Getaran Bebas SDOF dengan Viscous Damping

Sebuah sistem getaran bebas dengan redaman viscous SDOF dinyatakan pada Gambar 2.7(b). Jika ' x ' diukur dari posisi kesimbangan terhadap gerakan naik-turun massa ' m ', maka dengan menggunakan hukum Newton-2 diperoleh persamaan umum getaran bebas teredam dengan redaman viscous untuk satu derajat kebebasan, yaitu:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + k x = 0 \quad (2.21)$$

Seperti untuk solusi defleksi SDOF tanpa redaman, solusi persamaan getaran SDOF dengan peredam dapat diperoleh dengan asumsikan bentuk eksponensial yaitu:

$$x(t) = Ce^{st} \quad (2.7)$$

Dalam hal ini, C dan s adalah konstanta yang akan dicari. Substitusikan persamaan 2.7 ke dalam persamaan 2.21 sehingga persamaannya menjadi:

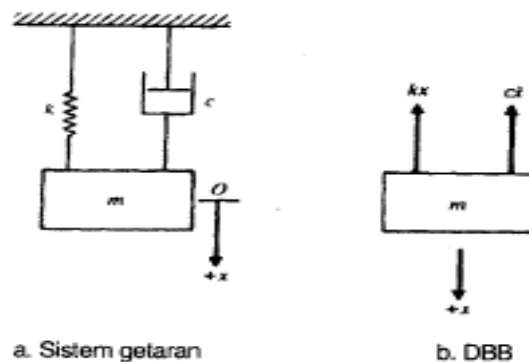
$$C(ms^2 + cs + k) = 0 \quad (2.22)$$

Karena ' C ' tidak boleh berharga nol maka persamaan 2.22 menjadi:

$$ms^2 + cs + k = 0 \quad (2.23)$$

Persamaan 2.23 dikenal sebagai *persamaan karakteristik* dan persamaan ini mempunyai dua akar dari *rumus ABC*, yaitu:

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (2.24)$$



Gambar 2.7b Sistem pegas-massa redaman viscous

Dua akar dari persamaan karakteristik 2.24 adalah akar dari persamaan 2.21 yang dikenal sebagai *eigenvalue*. Bentuk solusi umum dari persamaan tersebut adalah:

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$$

Substitusikan persamaan 2.24 pada persamaan 2.25 menghasilkan:

$$x(t) = C_1 e^{-\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} t} + C_2 e^{-\frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} t} \quad (2.26)$$

2.4 Getaran Bebas SDOF Coulomb Damping

Coulomb damping adalah asumsi sifat redaman dari kelakuan dari koneksi atau hubungan benda lamp mass yang terjadi akibat benda itu bergesekan dengan permukaan kering atau permukaan yang bersifat *dry friction* dari dua permukaan yang memiliki sifat sliding, yaitu meluncur satu dengan yang lain. Contoh permukaan asumsi Coulomb damping adalah *axle friction* atau Landasan Luncur dengan tumpuan journal bearing, dan *belt friction* dengan Landasan Rolling. Apapun kondisi riil Landasan Luncur atau Landasan Rolling, kedua landasan ini dimodelkan sama, yaitu model 'redaman'. Di sini kita akan membahas massa sliding pada permukaan kering sebagai bahan analisis. Namun hasilnya secara kualitatif dapat digunakan pada semua bentuk coulomb damping. Dengan mengikuti asumsi massa slide pada permukaan kering, seperti tercantum pada Gambar 2.13, gaya gesek yang menahan gerakan antara massa dan permukaan dapat ditentukan.

Coulomb menyatakan bahwa gaya gesek yang timbul, mempunyai harga sebanding dengan gaya normal yang timbul antara massa dan permukaan dari bidang gesek. Konstanta yang berfungsi sebagai penyeimbang tersebut adalah koefisien gesekan kinetik dengan notasi ' μ .' Karena gaya gesek selalu menahan gerakan yang terjadi, maka arahnya berlawanan arah kecepatan pergerakan benda. Penerapan prinsip Coulomb penting untuk mengetahui jumlah siklus tertentu dari getaran bebas SDOF dengan kondisi massa dan parameter pegas-damper tertentu. Tujuan pembuatan model getaran ini dibuat sejalan dengan asumsi gesekan pada permukaan getaran sebagai yang menghentikan gerakan.

Aplikasikan hukum Newton untuk diagram free body pada Gambar 2.13(b) menghasilkan persamaan diferensial sebagai berikut:

$$m\ddot{x} + kx = -\mu mg \quad \dot{x} > 0 \quad (2.53a)$$

$$m\ddot{x} + kx = \mu mg \quad \dot{x} < 0 \quad (2.53b)$$

Asumsikan sistem satu derajat kebebasan dengan getaran bebas seperti pada Gambar 2.13 dengan kondisi awal massa berpindah sejauh ' δ ' ke kanan. Gaya pegas mendorong massa ke titik keseimbangan dengan arah kecepatan negatif. Persamaan 2.53(b) diterapkan pada setengah siklus pertama dari gerakan sampai kecepatannya menjadi nol, kemudian persamaan 2.53(a) diberlakukan untuk siklus selanjutnya. Pembahasan berikut ini diawali dari persamaan 2.53(a).

Persamaan 2.53(a) digunakan untuk persamaan gerak pada kondisi sampai tanda arah kecepatan berubah atau kecepatan menjadi sama dengan nol. Solusi dari persamaan 2.53(a) menggunakan persamaan 2.55 dan kecepatan sama dengan nol atau $\dot{x}\left(\frac{\pi}{\omega_n}\right) = 0$ digunakan sebagai kondisi awal, sehingga diperoleh:

$$x(t) = \left(\delta - \frac{3\mu mg}{k} \right) \cos \omega_n t - \frac{\mu mg}{k} \quad \frac{\pi}{\omega_n} \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega_n} \quad (2.54)$$

Kecepatan kembali berubah tanda pada $t = 2\pi/\omega_n$ sehingga defleksi yang terjadi sesuai dengan hubungan berikut ini:

$$x\left(\frac{\pi}{\omega_n}\right) = \delta - \frac{4\mu mg}{k} \quad (2.55)$$

Solusi dari persamaan 2.53(b) berhubungan dengan parameter awal $x(0) = \delta$ dan $\dot{x}(0) = 0$ adalah sebagai berikut:

$$x(t) = \left(\delta - \frac{\mu mg}{k} \right) \cos \omega_n t + \frac{\mu mg}{k} \quad (2.56)$$

Perhatikan tanda '+' pada persamaan 2.56 dan tanda '-' pada persamaan sebelumnya. Persamaan 2.54 menggambarkan gerakan sampai kecepatan berubah tanda atau dengan kata lain terjadi kecepatan sama dengan nol, yaitu pada $t = \pi/\omega_n$. Kondisi tersebut terjadi dengan defleksi sama dengan:

$$x\left(\frac{\pi}{\omega_n}\right) = -\delta + \frac{2\mu mg}{k} \quad (2.57)$$

Gerakan satu siklus sempurna digambarkan dengan persamaan 2.54 dan persamaan 2.56. Amplitudo berubah dari kondisi awal ke kondisi berikutnya dengan hubungan persamaan sebagai berikut:

$$x(0) - x\left(\frac{\pi}{\omega_n}\right) = \frac{4\mu mg}{k} \quad (2.58)$$

EKSITASI SISTEM SATU DERAJAT KEBEBASAN

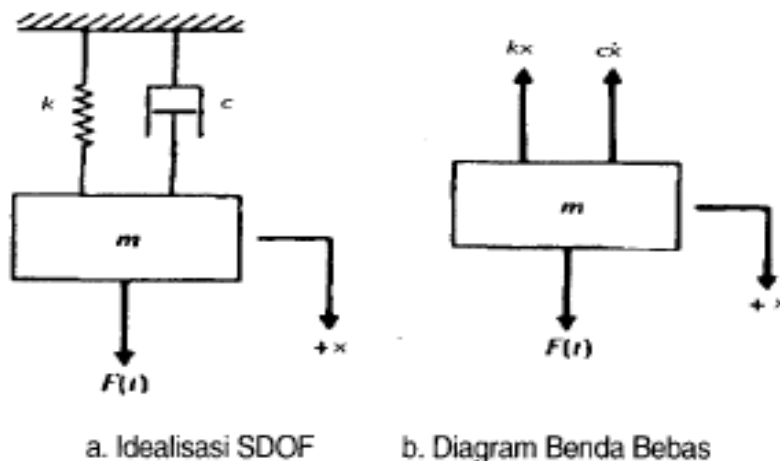
Jika suatu eksitasi dikenakan pada sistem redaman pegas-massa SDOF seperti ditunjukkan pada Gambar 3.1, maka persamaan gerak dapat diturunkan dengan prinsip hukum kedua Newton. Hal ini disebut perolehan persamaan getaran dengan *Metode Newton*, menjadi sebagai berikut ini:

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = F(t) \quad (3.1)$$

Metode Newton akan dibahas detail sehubungan dengan penyusunan persamaan getaran benda Lamp Mass MDOF pada bab selanjutnya. Karena

persamaan 3.1 adalah persamaan diferensial jenis non-homogen maka solusi umumnya adalah:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (3.2)$$



Gambar 3.1 Sistem redaman pegas-massa SDOF

Solusi total displacement ini terdiri dari persamaan transien $x_h(t)$ ditambah dengan persamaan steady state $x_p(t)$. Persamaan transien SDOF ditentukan dari asumsi eksitasi dari gaya luar diabaikan, dan solusi transien menggunakan persamaan homogen berikut ini:

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = 0 \quad (3.3)$$

