Contoh 3

Diberikan tabel data berikut :

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	3	9	19	33

Hitung luasan di bawah fungsi $f(x)$ dan di antara $x=0$ dan $x=4$ dengan menggunakan metode trapesium dan trapesium dengan koreksi ujung.

Penyelesaian

Integral numerik dihitung dengan Persamaan (6.6):

$$I = \frac{\Delta x}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right] = \frac{1}{2}\left[\,1+33+2\,(3+9+19)\,\right] = 48$$

Apabila digunakan metode trapesium dengan koreksi ujung, integral dihitung dengan Persamaan (6.10) :

$$I = \frac{\Delta x}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right] - \frac{\Delta x^2}{12}\left[f'(b) - f'(a)\right]$$

Turunan pertama pada ujung-ujung dihitung dengan diferensial beda hingga :

$$f'(x_1=a=0) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{3-1}{1} = 2$$

$$f'(x_n=b=4) = \frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}} = \frac{f(4)-f(3)}{4-3} = \frac{33-19}{1} = 14$$

$$I = \frac{1}{2}\left[\,1+33+2\,(3+9+19)\,\right] - \frac{1}{12}(14-2) = 48 - 1 = 47$$

Contoh 4

Hitung $I = \int_0^4 e^x \, dx$ dengan aturan Simpson 1/3.

Penyelesaian

Dengan menggunakan Persamaan (6.17) maka luas bidang adalah :

$$A_1 = \frac{b-a}{6}\,[\,f(a)+4f(c)+f(b)\,] = \frac{4-0}{6}\,(e^0 + 4\,e^2 + e^4) = 56{,}7696$$

Kesalahan terhadap nilai eksak :

$$E_t = \frac{53{,}598150 - 56{,}7696}{53{,}598150} \times 100\ \% = 5{,}917\ \%$$

Terlihat bahwa pada pemakaian satu pias, metode Simpson 1/3 memberikan hasil lebih baik dari rumus trapesium.

Contoh 5

Hitung $I = \int_0^4 e^x \, dx$ dengan metode Simpson dengan $\Delta x = 1$.

Penyelesaian

Dengan menggunakan Persamaan (6.19) maka luas bidang adalah :

$$I = \frac{1}{3}\,[\,e^0 + e^4 + 4(e^1 + e^3) + 2e^2\,] = 53{,}863846$$

Kesalahan terhadap nilai eksak :

$$E_t = \frac{53{,}598150 - 53{,}863846}{53{,}598150} \times 100\ \% = 0{,}5\ \%$$

Contoh 6

Dengan aturan Simpson 3/8 hitung $\int_0^4 e^x\,dx$. Hitung pula integral tersebut dengan menggunakan gabungan dari metode Simpson 1/3 dan 3/8, apabila digunakan 5 pias dengan $\Delta x = 0{,}8$.

Penyelesaian

a. Metode Simpson 3/8 dengan satu pias.

Integral dihitung dengan menggunakan Persamaan (6.21) :

$$I = (4-0)\,\frac{(e^0 + 3\,e^{1{,}3333} + 3\,e^{2{,}6667} + e^4)}{8} = 55{,}07798$$

Besarnya kesalahan adalah :

$$\varepsilon = \frac{53{,}598150 - 55{,}07798}{53{,}59815} \times 100\,\% = -2{,}761\,\%$$

b. Apabila digunakan 5 pias, maka data untuk kelima pias tersebut adalah :

$f(0) = e^0 = 1$

$f(0{,}8) = e^{0{,}8} = 2{,}22554$

$f(1{,}6) = e^{1{,}6} = 4{,}95303$

$f(2{,}4) = e^{2{,}4} = 11{,}02318$

$f(3{,}2) = e^{3{,}2} = 24{,}53253$

$f(4) = e^4 = 54{,}59815$

Integral untuk dua pias pertama dihitung dengan metode Simpson 1/3 (Persamaan 6.17) :

$$I = \frac{1{,}6}{6}\,(1 + 4\times 2{,}22554 + 4{,}95303) = 3{,}96138$$

Tiga pias terakhir digunakan aturan Simpson 3/8 :

$$I = 2{,}4\,\frac{(4{,}95303 + 3\times 11{,}02318 + 3\times 24{,}53253 + 54{,}59815)}{8} = 49{,}86549$$

Integral total adalah jumlah dari kedua hasil di atas :

$$I = 3{,}96138 + 49{,}86549 = 53{,}826873$$

Kesalahan terhadap nilai eksak :

$$\varepsilon = \frac{53{,}598150 - 53{,}826873}{53{,}59815} \times 100\,\% = -0{,}427\,\%$$