Contoh 1

Gunakan metode trapesium satu pias untuk menghitung $I = \int_0^4 e^x \, dx$.

Penyelesaian

Bentuk integral di atas dapat diselesaikan secara analitis :

$$I = \int_0^4 e^x \, dx = [\, e^x \,]_0^4 = (\, e^4 - e^0 \,) = 53{,}598150$$

Hitungan integral numerik dilakukan dengan menggunakan Persamaan (6.2) :

$$I \approx (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2} = (4 - 0) \frac{e^0 + e^4}{2} = 111{,}1963$$

Untuk mengetahui tingkat ketelitian dari integral numerik, hasil hitungan numerik dibandingkan dengan hitungan analitis. Kesalahan relatif terhadap nilai eksak adalah :

$$\varepsilon = \frac{53{,}598150 - 111{,}1963}{53{,}598150} \times 100\ \% = -107{,}46\ \%$$

Terlihat bahwa penggunaan metode trapesium satu pias memberikan kesalahan sangat besar (lebih dari 100%).

Contoh 2

Gunakan metode trapesium empat pias dengan lebar pias adalah $\Delta x=1$ untuk menghitung :

$$I = \int_0^4 e^x \, dx$$

Penyelesaian

Metode trapesium dengan 4 pias, sehingga panjang pias adalah :

$$\Delta x = \frac{(b-a)}{n} = \frac{(4-0)}{4} = 1$$

Luas bidang dihitung dengan Persamaan (6.6) :

$$I = \frac{\Delta x}{2} [f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)]$$
$$= \frac{1}{2} [e^0 + e^4 + 2 (e^1 + e^2 + e^3)] = 57{,}991950$$

Kesalahan relatif terhadap nilai eksak :

$$\epsilon = \frac{53{,}598150 - 57{,}991950}{53{,}598150} \times 100\% = -\ 8{,}2\ \%$$

Apabila digunakan metode trapesium dengan koreksi ujung, maka integral dihitung dengan Persamaan (6.10). Dalam persamaan tersebut koreksi ujung mengandung turunan pertama dari fungsi. Apabila $f(x) = e^x$, turunan pertamanya adalah $f' = e^x$; sehingga :

$$I = \frac{\Delta x}{2}\,[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)] - \frac{\Delta x^2}{12}\,[f'(b) - f'(a)]$$

$$= \frac{1}{2}\,[\,e^0 + e^4 + 2\,(e^1 + e^2 + e^3\,)\,] - \frac{1}{12}\,(e^4 - e^0) = 57{,}991950$$

$$= 57{,}991950 - 4{,}466513 = 53{,}525437$$

Kesalahan relatif terhadap nilai eksak :

$$\varepsilon = \frac{53{,}598150 - 53{,}525437}{53{,}598150} \times 100\ \% = 0{,}14\ \%$$