Handout

TEORI BILANGAN

Sejarah Perkembangan Teori Bilangan

Pada mulanya di zaman purbakala banyak bangsa-bangsa yang bermukim sepanjang sungai-sungai besar. Bangsa Mesir sepanjang sungai Nil di Afrika, bangsa Babilonia sepanjang sungai Tigris dan Eufrat, bangsa Hindu sepanjang sungai Indus dan Gangga, bangsa Cina sepanjang sungai Huang Ho dan Yang Tze. Bangsa-bangsa itu memerlukan keterampilan untuk mengendalikan banjir, mengeringkan rawa-rawa, membuat irigasi untuk mengolah tanah sepanjang sungai menjadi daerah pertanian untuk itu diperlukan pengetahuan praktis, yaitu pengetahuan teknik dan matematika bersama-sama. Sejarah menunjukkan bahwa permulaan Matematika berasal dari bangsa yang bermukim sepanjang aliran sungai tersebut. Mereka memerlukan perhitungan, penanggalan yang bisa dipakai sesuai dengan perubahan musim. Diperlukan alat-alat pengukur untuk mengukur persil-persil tanah yang dimiliki. Peningkatan peradaban memerlukan cara menilai kegiatan perdagangan, keuangan dan pemungutan pajak. Untuk keperluan praktis itu diperlukan bilangan-bilangan.

Bilangan dahulunya digunakan sebagai simbol untuk menggantikan suatu benda misalnya kerikil, ranting yang masing-masing suku atau bangsa memiliki cara tersendiri untuk menggambarkan bilangan dalam bentuk simbol diantaranya :

- Simbol bilangan bangsa Babilonia.
- Simbol bilangan bangsa Maya di Amerika pada 500 tahun SM.
- Simbol bilangan menggunakan huruf Hieroglif yang dibuat bangsa Mesir Kuno.
- Simbol bilangan bangsa Arab yang dibuat pada abad ke-11 dan dipakai hingga kini oleh umat Islam di seluruh dunia.
- Simbol bilangan bangsa Yunani Kuno.
- Simbol bilangan bangsa Romawi yang juga masih dipakai hingga kini.

A. Teori Bilangan pada Masa Prasejarah (Sebelum Masehi)

Konsep bilangan dan proses berhitung berkembang dari zaman sebelum ada sejarah (artinya tidak tercatat sejarah kapan dimulainya). Mungkin bisa diperdebatkan, tapi diyakini sejak zaman paling primitif pun manusia memiliki “rasa” terhadap apa yang dinamakan bilangan, setidaknya untuk mengenali mana yang “lebih banyak” atau mana yang “lebih sedikit” terhadap berbagai benda.

Hal ini dibuktikan dengan ditemukannya benda matematika tertua, yaitu tulang Lebombo di pegunungan Lebombo di Swaziland dan mungkin berasal dari tahun 35.000 SM. Tulang ini berisi 29 torehan yang berbeda yang sengaja digoreskan pada tulang fibula baboon. Terdapat bukti bahwa kaum perempuan biasa menghitung untuk mengingat siklus haid mereka; 28 sampai 30 goresan pada tulang atau batu, diikuti dengan tanda yang berbeda. Selain itu, ditemukan juga artefak prasejarah di Afrika dan Perancis, dari tahun 35.000 SM dan berumur 20.000 tahun, yang menunjukkan upaya dini untuk menghitung waktu. Tulang Ishango, ditemukan di dekat batang air Sungai Nil (timur laut Kongo), berisi sederetan tanda lidi yang digoreskan di tiga lajur memanjang pada tulang itu. Tafsiran umum adalah bahwa tulang Ishango menunjukkan peragaan terkuno yang sudah diketahui tentang barisan bilangan prima.

1. Teori Bilangan pada Suku Bangsa Babilonia

Matematika Babilonia merujuk pada seluruh matematika yang dikembangkan oleh bangsa Mesopotamia (kini Iraq) sejak permulaan Sumeria hingga permulaan peradaban helenistik. Dinamai "Matematika Babilonia" karena peran utama kawasan Babilonia sebagai tempat untuk belajar. Pada zaman peradaban helenistik, Matematika Babilonia berpadu dengan Matematika Yunani dan Mesir untuk membangkitkan Matematika Yunani. Kemudian di bawah Kekhalifahan Islam, Mesopotamia, terkhusus Baghdad, sekali lagi menjadi pusat penting pengkajian Matematika Islam.

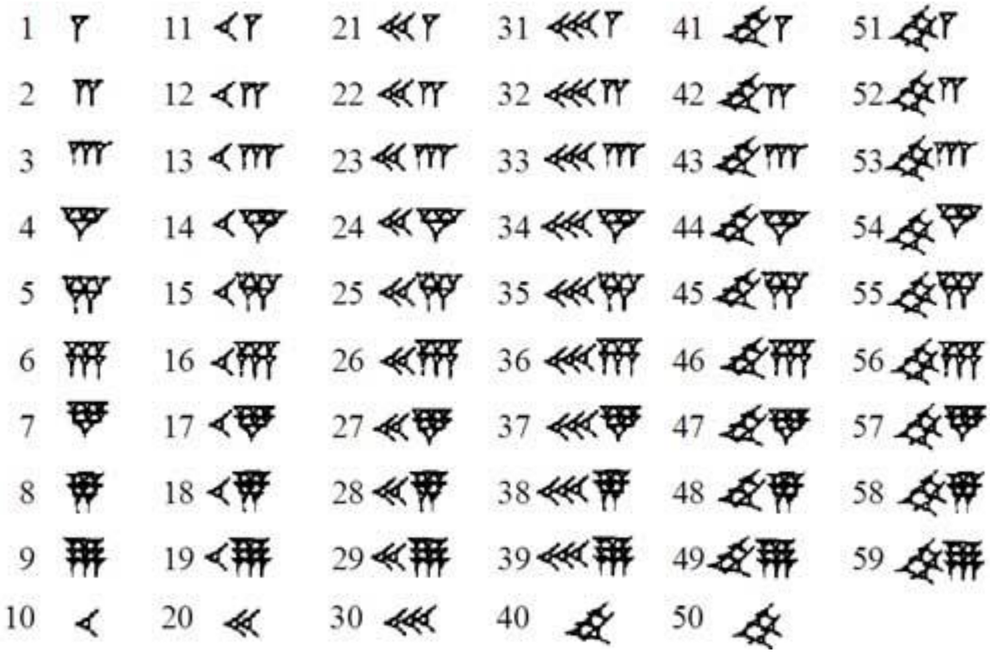
Bertentangan dengan langkanya sumber pada Matematika Mesir, pengetahuan Matematika Babilonia diturunkan dari lebih daripada 400 lempengan tanah liat yang digali sejak 1850-an. Lempengan ditulis dalam tulisan paku ketika tanah liat masih basah, dan dibakar di dalam tungku atau dijemur di bawah terik matahari. Beberapa di antaranya adalah karya rumahan.

Bukti terdini matematika tertulis adalah karya bangsa Sumeria, yang membangun peradaban kuno di Mesopotamia. Mereka mengembangkan sistem rumit metrologi sejak tahun 3000 SM. Dari kira-kira 2500 SM ke muka, bangsa Sumeria menuliskan tabel perkalian pada lempengan tanah liat dan berurusan dengan latihan-latihan geometri dan soal-soal pembagian. Jejak terdini sistem bilangan Babilonia juga merujuk pada periode ini.

Sebagian besar lempengan tanah liat yang sudah diketahui berasal dari tahun 1800 sampai 1600 SM, dan meliputi topik-topik pecahan, aljabar, persamaan kuadrat dan kubik, dan perhitungan bilangan regular, invers perkalian, dan bilangan prima kembar. Lempengan itu juga meliputi tabel perkalian dan metode penyelesaian persamaan linear dan persamaan kuadrat. Lempengan Babilonia 7289 SM memberikan hampiran bagi $\sqrt{2}$ yang akurat sampai lima tempat desimal.

Matematika Babilonia ditulis menggunakan sistem bilangan seksagesimal (basis-60). Dari sinilah diturunkannya penggunaan bilangan 60 detik untuk semenit, 60 menit untuk satu jam, dan 360 (60 x 6) derajat untuk satu putaran lingkaran, juga penggunaan detik dan menit pada busur lingkaran yang melambangkan pecahan derajat. Juga, tidak seperti orang Mesir, Yunani, dan Romawi, orang Babilonia memiliki sistem nilai-tempat yang sejati, di mana angka-angka yang dituliskan di lajur lebih kiri menyatakan nilai yang lebih besar, seperti di dalam sistem desimal.

Sistem Numerasi Babylonia (±2000 SM), pertama kali orang yang mengenal bilangan 0 (nol) adalah Babylonian.



2. Teori Bilangan pada Suku Bangsa Mesir Kuno

Matematika Mesir merujuk pada matematika yang ditulis di dalam bahasa Mesir. Sejak peradaban helenistik matematika Mesir melebur dengan matematika Yunani dan Babilonia yang membangkitkan Matematika helenistik. Pengkajian matematika di Mesir berlanjut di bawah Khilafah Islam sebagai bagian dari matematika Islam, ketika bahasa Arab menjadi bahasa tertulis bagi kaum terpelajar Mesir.

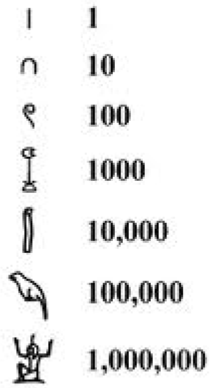
Tulisan matematika Mesir yang paling panjang adalah Lembaran Rhind (kadang-kadang disebut juga "Lembaran Ahmes" berdasarkan penulisnya), diperkirakan berasal dari tahun 1650 SM tetapi mungkin lembaran itu adalah salinan dari dokumen yang lebih tua dari Kerajaan Tengah yaitu dari tahun 2000-1800 SM. Lembaran itu adalah manual instruksi bagi pelajar aritmetika dan geometri. Selain memberikan rumus-rumus luas dan cara-cara perkalian, pembagian, dan pengerjaan pecahan, lembaran itu juga menjadi bukti bagi pengetahuan matematika lainnya, termasuk bilangan komposit dan prima; rata-rata aritmetika, geometri, dan harmonik; dan pemahaman sederhana Saringan Eratosthenes dan teori bilangan sempurna (yaitu, bilangan 6). Lembaran itu juga berisi cara menyelesaikan persamaan linear orde satu juga barisan aritmetika dan geometri.

Naskah matematika Mesir penting lainnya adalah lembaran Moskwa, juga dari zaman Kerajaan Pertengahan, bertarikh kira-kira 1890 SM. Naskah ini berisikan soal kata atau soal cerita, yang barangkali ditujukan sebagai hiburan.

Sistem Numerasi Mesir Kuno (±3000 SM) bersifat aditif, dimana nilai suatu bilangan merupakan hasil penjumlahan nilai-nilai lambang-lambangnya.

Lambang dan simbol bilangan Mesir

Vertical staff
Heel Bone (tulang lutut)
Scrool (gulungan surat)
Lotus flower (bunga teratai)
Pointing finger (telunjuk)
Polliwing / burbot (berudu)
Astronished man (orang astronis)



3. Teori Bilangan pada Suku Bangsa India

Sulba Sutras (kira-kira 800-500 SM) merupakan tulisan-tulisan geometri yang menggunakan bilangan irasional, bilangan prima, aturan tiga dan akar kubik; menghitung akar kuadrat dari 2 sampai sebagian dari seratus ribuan; memberikan metode konstruksi lingkaran yang luasnya menghampiri persegi yang diberikan, menyelesaikan persamaan linear dan kuadrat; mengembangkan tripel Pythagoras secara aljabar, dan memberikan pernyataan dan bukti numerik untuk teorema Pythagoras.

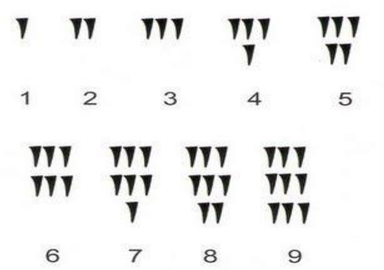
Panini (kira-kira abad ke-5 SM) yang merumuskan aturan-aturan tata bahasa Sanskerta menggunakan notasi yang sama dengan notasi matematika modern, dan menggunakan aturan-aturan meta, transformasi, dan rekursi. Pingala (kira-kira abad ke-3 sampai abad pertama SM) di dalam risalah prosodynya menggunakan alat yang bersesuaian dengan sistem bilangan biner. Pembahasannya tentang kombinatorika bersesuaian dengan versi dasar dari teorema binomial. Karya Pingala juga berisi gagasan dasar tentang bilangan Fibonacci.

Pada sekitar abad ke 6 SM, kelompok Pythagoras mengembangkan sifat-sifat bilangan lengkap (perfect number), bilangan bersekawan (amicable number), bilangan prima (prime number), bilangan segitiga (triangular number), bilangan bujur sangkar (square number), bilangan segilima (pentagonal number) serta bilangan-bilangan segibanyak (figurate numbers) yang lain. Salah satu sifat bilangan segitiga yang terkenal sampai sekarang disebut triple Pythagoras, yaitu : a.a + b.b = c.c yang ditemukannya melalui perhitungan luas daerah bujur sangkar yang sisi-sisinya merupakan sisi-sisi dari segitiga siku-siku dengan sisi miring (hypotenosa) adalah c, dan sisi yang lain adalah a dan b. Hasil kajian yang lain yang sangat popular sampai sekarang adalah pembedaan bilangan prima dan bilangan komposit. Bilangan prima adalah bilangan bulat positif lebih dari satu yang tidak memiliki Faktor positif kecuali 1 dan bilangan itu sendiri. Bilangan positif selain satu dan selain bilangan prima disebut bilangan komposit. Catatan sejarah menunjukkan bahwa masalah tentang bilangan prima telah menarik perhatian matematikawan selama ribuan tahun, terutama yang berkaitan dengan berapa banyaknya bilangan prima dan bagaimana rumus yang dapat digunakan untuk mencari dan membuat daftar bilangan prima.

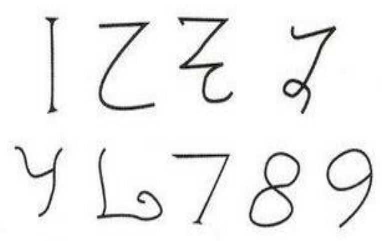
Dengan berkembangnya sistem numerasi, berkembang pula cara atau prosedur aritmetis untuk landasan kerja, terutama untuk menjawab permasalahan umum, melalui langkah-langkah tertentu, yang jelas yang disebut dengan algoritma. Awal dari algoritma dikerjakan oleh Euclid. Pada sekitar abad 4 S.M, Euclid mengembangkan konsep-konsep dasar geometri dan teori bilangan. Buku Euclid yang ke VII memuat suatu algoritma untuk mencari Faktor Persekutuan Terbesar dari dua bilangan bulat positif dengan menggunakan suatu teknik atau prosedur yang efisien, melalui sejumlah langkah yang terhingga. Kata algoritma berasal dari algorism. Pada zaman Euclid, istilah ini belum dikenal. Kata Algorism bersumber dari nama seorang muslim dan penulis buku terkenal pada tahun 825 M., yaitu Abu Ja’far Muhammed ibn Musa Al-Khowarizmi. Bagian akhir dari namanya (Al-Khowarizmi), mengilhami lahirnya istilah Algorism. Istilah algoritma masuk kosakata kebanyakan orang pada saat awal revolusi komputer, yaitu akhir tahun 1950.

Pada abad ke 3 S.M., perkembangan teori bilangan ditandai oleh hasil kerja Erathosthenes, yang sekarang terkenal dengan nama Saringan Erastosthenes (The Sieve of Erastosthenes). Dalam enam abad berikutnya, Diopanthus menerbitkan buku yang bernama Arithmetika, yang membahas penyelesaian persamaan didalam bilangan bulat dan bilangan rasional, dalam bentuk lambang (bukan bentuk/bangun geometris seperti yang dikembangkan oleh Euclid). Dengan kerja bentuk lambang ini, Diopanthus disebut sebagai salah satu pendiri aljabar.

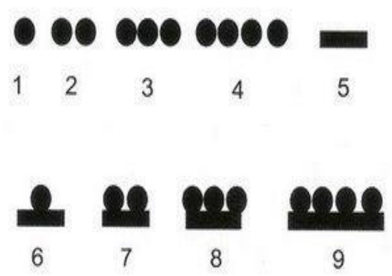
Berikut ini adalah Simbol-simbol bilangan yang ditemukan :



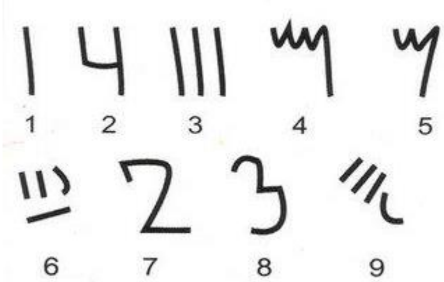
Bilangan Cunieform yang digunakan bangsa
Babilonia sejak tahun 5000 SM



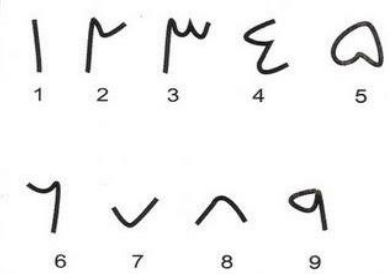
Lambang bilangan bangsa Hindu-Arab kuno
pada abad ke-10



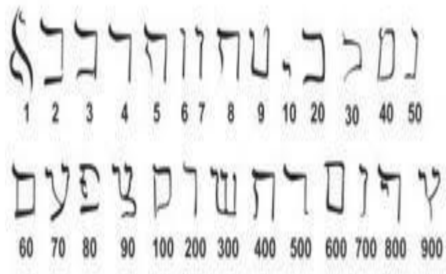
Lambang bilangan yang digunakan bangsa Maya
di Amerika pada tahun 500 SM



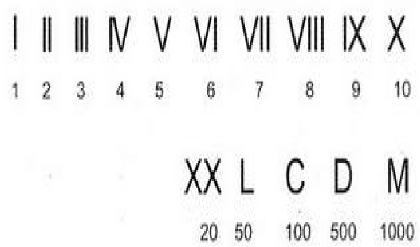
Lambang bilangan Hieroglif yang digunakan bangsa Mesir Kuno



Lambang bilangan bangsa Arab pada abad ke-11



Lambang bilangan bangsa Yunani Kuno



Lambang bilangan bangsa Romawi

B. Teori Bilangan pada Masa Sejarah (Masehi)

Awal kebangkitan teori bilangan modern dipelopori oleh Pierre de Fermat (1601-1665), Leonhard Euler (1707-1783), J.L Lagrange (1736-1813), A.M. Legendre (1752-1833), Dirichlet (1805-1859), Dedekind (1831-1916), Riemann (1826-1866), Giussepe Peano (1858-1932), Poisson (1866-1962), dan Hadamard (1865-1963). Sebagai seorang pangeran matematika, Gauss begitu terpesona terhadap keindahan dan kecantikan teori bilangan, dan untuk melukiskannya, ia menyebut teori bilangan sebagai the queen of mathematics.

Pada masa ini, teori bilangan tidak hanya berkembang sebatas konsep, tapi juga banyak diaplikasikan dalam berbagai bidang ilmu pengetahuan dan teknologi. Hal ini dapat dilihat pada pemanfaatan konsep bilangan dalam metode kode baris, kriptografi, komputer, dan lain sebagainya.

C. Beberapa Tokoh Teori Bilangan Legendaris

Pythagoras (582 SM . 496 SM)

Pythagoras adalah seorang matematikawan dan filsuf Yunani yang paling dikenal melalui teoremanya. Dikenal sebagai "Bapak Bilangan", dia memberikan sumbangan yang penting terhadap filsafat dan ajaran keagamaan pada akhir abad ke-6 SM.

Salah satu peninggalan Pythagoras yang terkenal adalah teorema Pythagoras, yang menyatakan bahwa kuadrat hipotenusa dari suatu segitiga siku-siku adalah sama dengan jumlah kuadrat dari kaki-kakinya (sisi-sisi siku-sikunya). Walaupun fakta di dalam teorema ini telah banyak diketahui sebelum lahirnya Pythagoras, namun teorema ini dikreditkan kepada Pythagoras karena ia yang pertama kali membuktikan pengamatan ini secara matematis.

Abu Ali Hasan Ibnu Al-Haytam (965 M)

Abu Ali Hasan Ibnu Al-Haytam lahir Basrah Irak, yang oleh masyarakat Barat dikenal dengan nama Alhazen. Al-Haytam adalah orang pertama yang mengklasifikasikan semua bilangan sempurna yang genap, yaitu bilangan yang merupakan jumlah dari pembagi-pembagi sejatinya, seperti yang berbentuk 2k-1(2k-1) di mana 2k-1 adalah bilangan prima. Selanjutnya Al-Haytam membuktikan bahwa bila p adalah bilangan prima, 1+(p-1)! habis dibagi oleh p.

Sayangnya, jauh di kemudian hari, hasil ini dikenal sebagai Teorema Wilson, bukan Teorema Al-Haytam. Teorema ini disebut Teorema Wilson setelah Warring pada tahun 1770 menyatakan bahwa John Wilson telah mengumumkan hasil ini. Selain dalam bidang matematika, Al-Haytam juga dikenal baik dalam dunia fisika, yang mempelajari mekanika pergerakan dari suatu benda. Dia adalah orang pertama yang menyatakan bahwa jika suatu benda bergerak, akan bergerak terus menerus kecuali ada gaya luar yang memengaruhinya.

Ini tidak lain adalah hukum gerak pertama, yang umumnya dikenal sebagai hukum Newton pertama.

Jamshid Al-Kashi (1380 M)

Al-Kashi terlahir pada 1380 di Kashan, sebuah padang pasir di sebelah utara wilayah Iran Tengah. Selama hidupnya, Al-Kashi telah menyumbangkan dan mewariskan sederet penemuan penting bagi astronomi dan matematika.

Pecahan desimal yang digunakan oleh orang-orang Cina pada zaman kuno selama berabad-abad, sebenarnya merupakan pecahan desimal yang diciptakan oleh Al-Kashi. Pecahan desimal ini merupakan salah satu karya besarnya yang memudahkan untuk menghitung aritmatika yang dia bahas dalam karyanya yang berjudul Kunci Aritmatika yang diterbitkan pada awal abad ke-15 di Samarkand.

Segitiga Pascal pertama kali diketahui dari sebuah buku karya Yang Hui yang ditulis pada tahun 1261, salah seorang ahli matematika Dinasti Sung yang termasyhur. Namun, sebenarnya segitiga tersebut telah dibahas dalam buku karya Al Kashi yang disebut dengan Segitiga Khayyam. Dan kita semua tahu bahwa ilmu di Cina dan Persia itu sudah tua. Sedangkan segitiga Pascal yang dibahas oleh Peter Apian, seorang ahli Aritmatika dari Jerman baru diterbitkan pada 1527. Sehingga bisa disimpulkan bahwa Segitiga Khayyam muncul terlebih dulu sebelum segitiga Pascal.

Pierre de Fermat

Pierre de Fermat meninggal pada tahun 1665. Dewasa ini kita mengira bahwa Fermat adalah seorang ahli teori bilangan, bahkan mungkin ahli teori bilangan yang paling terkenal yang pernah hidup. Karena itu alangkah mengejutkannya bahwa pada kenyataannya Fermat adalah seorang pengacara dan hanya seorang matematikawan amatir. Hal lain yang juga mengejutkan adalah fakta bahwa ia hanya pernah menerbitkan sekali dalam hidupnya karya dalam matematika, dan itupun ditulis tanpa nama yang disertakan dalam apendik suatu buku teks. Karena Fermat menolak untuk menerbitkan karyanya, teman-temannya takut bahwa ia akan segera dilupakan kecuali dilakukan sesuatu. Putranya, Samuel mengambil alih pengumpulan surat Fermat dan tulisan matematika lainnya, komentar yang ditulis di buku, dan sebagainya dengan tujuan untuk menerbitkan gagasan matematika yang dimiliki ayahnya. Dengan cara inilah "Teorema Terakhir" yang terkenal diterbitkan. Hal tersebut ditemukan oleh Samuel dalam catatan kecil ayahnya dalam salinan buku Arithmetica karya

Diophantus. Teorema terakhir Fermat menyatakan bahwa $x^n + y^n = z^n$ tidak mempunyai solusi bilangan bulat tak nol untuk x, y dan z, jika n > 2.

Fermat menuliskan bahwa “I have discovered a truly remarkable proof which this margin is to small to contain”. Fermat juga hampir selalu menulis catatan kecil sejak tahun 1603, manakala ia pertama kali mempelajari Arithmetica karya Diophantus. Ada kemungkinan Fermat menyadari bahwa apa yang ia sebut sebagai remarkable proof ternyata salah, karena semua teorema yang dia nyatakan biasanya dalam bentuk tantangan yang Fermat ajukan terhadap matematikawan lain. Meskipun kasus khusus untuk n = 3 dan n = 4 ia ajukan sebagai tantangan (dan Fermat mengetahui bukti untuk kasus ini) namun teorema umumnya tidak pernah ia sebut lagi. Pada kenyataannya karya matematika yang ditinggalkan oleh Fermat hanya satu buah pembuktian. Fermat membuktikan bahwa luas daerah segitiga siku- siku dengan sisi bilangan bulat tidak pernah merupakan bilangan kuadrat. Jelas hal ini mengatakan bahwa tidak ada segitiga siku-siku dengan sisi rasional yang mempunyai luas yang sama dengan suatu bujursangkar dengan sisi rasional. Dalam simbol, tidak terdapat bilangan bulat x, y, z dengan sehingga bilangan kuadrat. Dari sini mudah untuk mendeduksi kasus n = 4, Teorema Fermat. Penting untuk diamati bahwa dalam tahap ini yang tersisa dari pembuktian Fermat Last Theorem adalah membuktikan untuk kasus n bilangan prima ganjil. Jika terdapat bilangan bulat x, y, z dengan maka jika n = pq,.

Joseph-Louis de Langrange (25 Januari 1736 . 10 April 1813)

Joseph-Louis de Lagrange (lahir dengan nama Giuseppe Luigi Lagrangia) adalah seorang matematikawan dan astronom Perancis-Italia yang membuat sumbangan penting pada mekanika klasik, angkasa dan teori bilangan. Dilahirkan di Turin, ia adalah campuran Italia dan Perancis. Ayahnya ialah orang kaya, namun suka menghambur-hamburkan kekayaannya. Belakangan dalam hidupnya, Lagrange menyebutnya sebagai bencana yang menguntungkan karena, "jika saya mewarisi kekayaan mungkin saya tidak akan mempertaruhkan nasib saya dengan matematika”.

Berpaling pada matematika dengan membaca sebuah esai tentang kalkulus, dengan cepat ia menguasai subjek tersebut. Pada usia 19 tahun, ia memulai karyanya (mungkin yang terbesar), *Mecanique analitique*, meski tak diterbitkan sampai ia berusia 52 tahun. Karena tiadanya diagram yang lengkap, komposisi terpadu, William Rowan Hamilton menyebut bukunya sebagai "sajak ilmiah".

Pada saat Lagrange mengirim beberapa hasil karyanya kepada Leonhard Euler, Euler sadar akan kecemerlangan Lagrange dan menunda menerbitkan sejumlah karyanya sendiri yang berkaitan agar Lagrange-lah yang bisa menerbitkannya pertama kali (contoh langka tentang sifat seorang akademikus yang tak mementingkan diri sendiri).

Kariernya masyhur; pada usia 20 tahun ia adalah matematikawan istana pada Raja Prusia Friedrich yang Agung di Berlin dan kemudian guru besar di Ecole normale di Paris. Selama Revolusi Prancis, ia adalah favorit Marie Antoinette dan kemudian Napoleon. Di Paris, ia membantu menyempurnakan sistem metrik tentang berat dan ukuran.

Adrien-Marie Legendre (18 September 1752 . 10 Januari 1833)

Adrien-Marie Legendre ialah matematikawan Perancis. Ia membuat sumbangan penting atas statistik, teori bilangan, aljabar abstrak dan analisis matematika. Kebanyakan karyanya disempurnakan oleh ilmuwan lainnya (karyanya pada akar polinomial mengilhami teori Galois; karya Abel pada fungsi elips dibangun pada Legendre; beberapa karya Gauss dalam statistik dan teori bilangan yang melengkapi teori Legendre).

Pada tahun 1830 ia memberikan bukti pada teorema akhir Fermat untuk eksponen n = 5, yang diberikan hampir secara serentak oleh Dirichlet pada 1828. Dalam teori bilangan, ia mengkonjekturkan hukum timbal balik kuadrat, yang kemudian dibuktikan Gauss. Ia juga melakukan karya pioner pada prima, dan pada penerapan analisis pada teori bilangan. Konjekturnya dari teorema bilangan prima dengan tepat dibuktikan oleh Hadamard dan de la Vallee-Poussin pada 1898.

Johan Carl Friedrich Gauss (30 April 1777 . 23 Februari 1855)

Gauss adalah matematikawan, astronom, dan fisikawan Jerman yang memberikan beragam kontribusi. Ia dipandang sebagai salah satu matematikawan terbesar sepanjang masa selain Archimedes dan Isaac Newton. Dilahirkan di Braunschweig, Jerman, saat umurnya belum genap 3 tahun, ia telah mampu mengoreksi kesalahan daftar gaji tukang batu ayahnya. Menurut sebuah cerita, pada umur 10 tahun, ia membuat gurunya terkagum-kagum dengan memberikan rumus untuk menghitung jumlah suatu deret aritmatika berupa penghitungan deret 1+2+3+...+100. Meski cerita ini hampir sepenuhnya benar, soal yang diberikan gurunya sebenarnya lebih sulit dari itu.

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (13 Februari 1805-5 Mei 1859)

Dirichlet ialah matematikawan Jerman yang dihargai karena definisi "formal" modern dari fungsi. Keluarganya berasal dari kota Richelet di Belgia, dari yang nama belakangnya "Lejeune Dirichlet" ("le jeune de Richelet" = "anak muda dari Richelet") diturunkan, dan di mana kakeknya tinggal.

Dirichlet lahir di Duren, di mana ayahnya merupakan kepala kantor pos. Ia mendapatkan pendidikan di Jerman, dan kemudian Prancis, di mana ia belajar dari banyak matematikawan terkemuka saat itu. Karya pertamanya ialah pada teorema akhir Fermat. Inilah konjektur terkenal (kini terbukti) yang menyatakan bahwa untuk $n > 2$, untuk persamaan $x^n + y^n = z^n$ tak memiliki solusi bilangan bulat, selain daripada yang trivial yang mana $x, y,$ atau z itu 0. Ia membuat bukti parsial untuk kasus n = 5, yang dilengkapi oleh Adrien-Marie Legendre. Dirichlet juga melengkapi pembuktiannya sendiri hampir di saat yang sama; kemudian ia juga menciptakan bukti penuh untuk kasus n = 14. Setelah kematiannya, ceramah Dirichlet dan hasil lain dalam teori bilangan dikumpulkan, disunting dan diterbitkan oleh kawannya dan matematikawan Richard Dedekind dengan judul *Vorlesungen uber Zahlentheorie (Ceramah pada Teori Bilangan).*

Benjamin Peirce (4 April 1809 . 6 Oktober 1880)

Benjamin Peirce ialah seorang matematikawan Amerika yang mengajar di Universitas Harvard selama kira-kira 50 tahun. Dia bersumbangsih dalam bidang mekanika benda langit, teori bilangan, aljabar, dan filsafat matematika.

Setelah tamat dari Harvard, dia menjadi seorang asisten dosen (1829), dan kemudian diangkat menjadi dosen matematika pada 1831. Di dalam teori bilangan, dia membuktikan bahwa tidak ada bilangan sempurna ganjil yang kurang dari empat faktor prima. Di dalam aljabar, dia dikenal atas pengkajiannya pada aljabar asosiatif. Dia pertama mengajukan istilah idempoten dan nilpoten pada 1870 untuk menjelaskan unsur-unsur aljabar ini, dan dia juga memperkenalkan penguraian peirce.

Konsep Bilangan

A. BILANGAN

Bilangan merupakan sesuatu yang abstrak, dan secara sederhana tidak mudah didefinisikan. Namun, bilangan adalah merupakan sesuatu yang sangat penting dalam matematika. Begitu pentingnya sehingga kalau kita membicarakan matematika maka dengan sendirinya bilangan di dalamnya.

Bilangan (number) tidak sama dengan angka. Angka merupakan simbul bilangan. Tanda-tanda atau goresan yang terdapat pada batu, kertas dan sebagainya itu bukan bilangan melainkan *lambang bilangan*.

Jadi perkataan bilangan dalam matematika dapat diartikan sebagai jumlah atau banyaknya sesuatu. Misalnya: "*sepeda saya empat*" artinya sepeda saya banyaknya empat.

B. LAMBANG BILANGAN

Dalam penulisan sebuah bilangan biasanya diberi lambang atau simbul yang disebut lambang bilangan. Lambang bilangan itu bermacam-macam, diantaranya: numerasi-numerasi hindu-arab, arab, cina, jepang dan sebagainya. Yang biasa kita gunakan sekarang adalah lambang bilangan Hindu-Arab.

Misalnya: a. Anak saya tiga orang.

Perkataan "tiga" dapat ditulis dengan lambang "3" atau "III"

b. Ayam saya sebanyak lima.

Perkataan "lima" dapat ditlis dengan lambang "5" atau "V"

Sehingga jelas bahwa perbedaan anatara bilangan dan lambang bilangan. Namun dalam kebiasaan perbedaan itu sering terlupakan. Misalnya: " *tulislah bilangan yang lebih besar empat*", padahal kalau sudah dituliskan bukan lagi bilangan tetapi merupakan lambang bilangan.

B. 2

Macam-Macam Bilangan

Setelah kita membicarakan pengertian bilangan dan lambang bilangan, sekarang kita akan membahas macam-macam bilangan, yaitu:

A. BILANGAN KARDINAL

Bilangan kardinal adalah bilangan yang menyatakan banyaknya anggota sebuah himpunan. Bilangan kardinal inilah yang mula-mula dikenal anak-anak dalam perkembangannya.

Misalnya: - telingan adik sebanyak 2
- ayam bapak sebanyak 5 ekor

B. BILANGAN ASLI

Bilangan asli atau bilangan alam (natural number) merupakan bilangan yang pertama-tama digunakan oleh nenek moyang kita. Bilangan asli ini merupakan langkah lebih lanjut dari bilangan kardinal untuk menuju ke arah terciptanya sistem numerasi, sehingga terciptalah bilangan asli.

Bilangan asli ini dapat digolongkan menjadi:

a. Bilangan genap {2, 4, 6, 8, …}
b. Bilangan ganjil {1, 3, 5, 7, …}
c. Bilangan prima {2, 3, 5, 7, …}
d. Bilangan komposit {4, 6, 8, 9, 10, …}

Jadi, bilangan asli dapat ditulis {1, 2, 3, 4, 5, …} dan mempunyai ciri-ciri sebagai berikut:

1. mempunyai urutan tertentu.
2. mempunyai anggota permulaan
3. tidak mempunyai anggota terakhir
4. apabila n bilangan asli, maka terdapat tepat satu bilangan asli berikutnya (pengikut p).
5. tidak ada bilangan asli yang pengikutnya 1

Jika a dan b bilangan-bilangan asli, maka berlaku tepat satu relasi di bawah ini yaitu:

$a < b$; $a = b$; $a > b$

relasi di atas disebut sifat kenektif (trikotomi) dari bilangan asli.

Sifat-sifat lain dari bilangan asli adalah:

a. sifat reflektif : $a = a$ untuk setiap $a \in A$

b. sifat simeteris : $a = b$ maka $b = a$

c. sifat transitif : untuk setiap a, b, $c \in A$, berlaku:

$a = b, b = c$ maka $a = c$

$a < b, b < c$ maka $a < c$

$a > b, b > c$ maka $a > c$

d. untuk setiap a, x, y, $\in A$, sifat aditif berlaku:

- jika $x < y$, maka $x + a < y + a$ dan $ax < ay$
- jika $x = y$, maka $x + a = y + a$ dan $ax = ay$
- jika $x > y$, maka $x + a > y + a$ dan $ax > ay$

C. BILANGAN CACAH

Sistem bilangan asli yang sudah dikenal, diuraiakan terasa belum cukup dalam perhitngan-perhitungan. Misalnya $x + 2 = 2$, berapakah x? Berapakah banyaknya anggota himpunana kosong?. Oleh sebab itu diperlukan lambang bilangan baru untuk menunjukkan keanggotaan tersebut yaitu “0” (nol). Himpunan bilangan asli ditambah “0” ini disebut bilangan cacah yang ditulis dengan lambang C

Jadi $C = A \cup \{0\}$ atau $C = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Mengenai sifat-sifat bilangan cacah dikatakan sama dengan bilangan asli, kecuali sifat aditif. Disamping itu, pada bilangan cacah nol adalah elemen identitas pada penjumlahan. Sedangkan 1 adalah elemen identitas pada perkalian.

D. BILANGAN BULAT

Ternyata sampai sistem bilangan cacah kita masih tidak dapat menyelesaikan soal terutama operasi pengurangan atau menyelesaikan persamaan $x + 6 = 0$. Disini tidak ada bilangan cacah yang membuat kalimat terbuka itu menjadi benar. Oleh sebab itu diperlukan bilangan baru yaitu bilangan asli yang bertanda negatif.

Bilangan-bilangan baru ini disebut bilangan bulat negatif dan bilangan-bilangan asli disebut bilangan bulat positif. Sedangkan nol disebut bilangan tak negatif dan tak positif. Gabungan ini disebut sistem bilangan bulat yang diberi lambang B.

$B = \{\ldots\ldots\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots..\}$

Disini tepat bahwa bilangan asli maupun cacah merupakan bagian dari bilangan bulat atau $A \subset C \subset B$.

Mengenai sifat-sifat bilangan bulat, disamping sifat bilangan asli dan cacah masih ada sifat bahwa bilangan bulat mempunyai sifat invers untuk penjumlahan. Contoh: 5 inversnya -5 sebab 5 + (-5) = 0 dimana 0 adalah elemen identitas penjumlahan.

E. Bilangan Rasional

Dengan bilangan bulat saja, ternyata kebutuhan kita dalam operasi pembagian belum terpenuhi atau menyelesaikan soal 2.x + 1 = 4. Disini tidak ada bilangan bulat yang dapat membuat kalimat terbuka itu mejadi kalimat yang benar.

Sehingga terciptalah sistem bilangan baru yaitu bilangan yang merupakan gabungan dari bilangan bulat dan pecahan.

Secara definitif dikatakan "bilangan rasional adalah bilangan yang terbentuk dari $\frac{a}{b}$ dimana a, $b \in B$ dan $b \neq 0$. Bilangan rasional biasanya ditulis dengan lambang Q.

$$Q = \{x \text{ I } x = \frac{a}{b} \text{ ; a, } b \in B \text{ dan } b \neq 0\}$$

Contoh bilangan rasional : 2, -3, $-\frac{1}{3}$ dan sebagainya.

Bilangan rasional dapat juga ditulis dalam bentuk desimal. *Bentuk desimal ada dua macam yaitu desimal terbatas dan desimal tak terbatas.*

Contoh:

1. $\frac{1}{4} = 0{,}25$ desimal terbatas

   $\frac{1}{3} = 0{,}333...$ desimal tak terbatas

2. Buktikan bahwa 4, 5353… adalah bilangan rasional

   Bukti:

   x = 4,5353…
   <u>100x = 453,5353…</u> -
   -99x = -449
   $x = \frac{449}{99}$

ternyata 4, 5353… dapat ditulis sebagai $\frac{a}{b}$ dengan a = 449 dan b = 99.

Disamping sifat-sifat bilangan bulat, maka untuk bilangan rasional berlaku pula sifat adanya invers untuk perkalian.

Contoh:

4 inversnya $\frac{1}{4}$, sebab $4.\frac{1}{4}=1$

$-\frac{1}{2}$ inversnya -2, sebab $(-\frac{1}{2})(-2)=1$

dimana 1 adalah identitas perkalian.

F. Bilangan Irasional

Bilangan irasional adalah bilangan yang tak dapat dinyatakan dengan $\frac{a}{b}$ dimana a, b $\in$ B dan b $\neq$ 0. Atau dengan kata lain bilangan irasional adalah bilangan yang tidak rasional.

Contoh: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$, log 2, e.

Lambang bilangan irasional biasanya ditulis I.

Contoh1 :

Buktikan bahwa $\sqrt{2}$ bilangan irasional.

Bukti:

Dimisalkan $\sqrt{2}$ bilangan rasional, sehingga dapat ditulis dengan $\frac{a}{b}$; a, b $\in$ B dan b $\neq$ 0 dan tidak mempunyai faktor persekutuan.

$\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ maka $\quad 2=\frac{a^2}{b^2}$

$a^2 = 2.b^2$

$2.b^2$ genap, jadi a^2 genap. Kalau a^2 genap, maka a juga genap. a dapat dinyatakan sebagai 2p, p $\in$ B.

a = 2p

$a^2 = 4.p^2$

$2.b^2 = 4.p^2$,

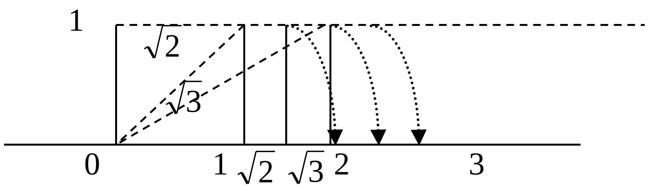
$b^2 = 2p^2$maka b^2 bilangan genap

Jika b^2 bilangan genap, maka b genap.

Ternyata a dan b genap, tentu a dan b mempunyai faktor persekutuan. Hal ini bertentangan dengan pengandaian di atas. Jadi pengandaian bahwa $\sqrt{2}$ rasional adalah salah, yang benar adalah $\sqrt{2}$ merupakan bilangan irasional.

Contoh 2:

Lukislah bilangan $\sqrt{2}$ dan $\sqrt{3}$ pada garis bilangan.



G. Bilangan Nyata (Real)

Gabungan himpunan rasional dan irasional membentuk suatu himpunan bilangan yang disebut himpunan bilangan nyata (real) yang dinyatakan dengan R.

Jadi $R = Q \cup I$

Dari uraian diatas maka dapat kita simpulkan bahwa:

$A \subset C \subset B \subset Q \subset R$ dan $I \subset R$

1 SISTEM BILANGAN REAL

Bilangan real sudah dikenal dengan baik sejak masih di sekolah menengah, bahkan sejak dari sekolah dasar. Namun untuk memulai mempelajari materi pada BAB ini anggaplah diri kita belum tahu apa-apa tentang bilangan real. Kita akan mempelajari bagaimana sistem bilangan real itu dibangun.

Pertama-tama kita hanya diberikan suatu himpunan bilangan tetapi belum tahu anggotanya seperti apa, belum aturan yang berlaku di dalamnya. Kemudian kedalam himpunan ini diberikan dua operasi binair, penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\cdot)$. Dengan dua operasi ini disusun beberapa aksioma. Dua aksioma penting adalah keujudan elemen 0 dan elemen 1. Inilah anggota bilangan real pertama yang kita ketahui. Selanjutnya dengan aksioma-aksioma ini didefinisikan anggota-anggota lainnya, seperti bilangan asli, bilangan bulat, bilangan rasional dan bilangan irrasional. Juga didefinisikan sifat-sifat yang mengatur hubungan antar anggota, seperti sifat urutan, sifat jarak, sifat kelengkapan dan sifat kepadatan.

1.1 Sifat aljabar bilangan real

Bilangan real dipandang sebagai suatu himpunan, seterusnya dilambangkan dengan $\mathbb{R}$. Selanjutnya, didefinisikan dua operasi binair '$+$' dan '$\cdot$' masing-masing disebut operasi penjumlahan dan operasi perkalian. Kedua operasi binair ini diterapkan pada $\mathbb{R}$ dan memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

(A1) $a + b = b + a$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$, yaitu **komutatif** terhadap penjumlahan.

(A2) $(a + b) + c = a + (b + a)$ untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{R}$, yaitu **asosiatif** terhadap penjumlahan.

(A3) Terdapat elemen $0 \in \mathbb{R}$ sehingga $a + 0 = 0 + a = a$ untuk setiap $a \in \mathbb{R}$. Elemen 0 ini disebut **elemen nol**.

(A4) Untuk setiap $a \in \mathbb{R}$ selalu terdapat $(-a) \in \mathbb{R}$ sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$. Elemen $(-a)$ ini disebut **negatif** dari a.

(M1) $a \cdot b = b \cdot a$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$, yaitu **komutatif** terhadap perkalian.

(M2) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{R}$, yaitu **asosiatif** terhadap perkalian.

(M3) Terdapat elemen $1 \in \mathbb{R}$ sehingga $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ untuk setiap $a \in \mathbb{R}$. Elemen 1 ini disebut **elemen satuan**.

(M4) Untuk setiap $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ selalu terdapat $(1/a) \in \mathbb{R}$ sehingga $a \cdot (1/a) = (1/a) \cdot a = 1$. Elemen $(1/a)$ ini disebut **kebalikan** dari a.

(D) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ dan $(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$ untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{R}$. Sifat ini disebut **distributif** perkalian terhadap penjumlahan.

Diperhatikan bahwa ada 4 sifat yang berkaitan dengan operasi penjumlahan yaitu A1, A2, A3 dan A4 (notasi A untuk Adisi, atau penjumlahan), 4 sifat yang berkaitan dengan perkalian yaitu M1, M2, M3 dan M4 (M untuk Multiplikasi, atau perkalian) dan 1 sifat yang menggabungkan keduanya yaitu D (D untuk Distributif). Kesembilan sifat ini disebut **sifat aljabar** atau **aksioma** bilangan real.

Sampai saat ini belum didefinisikan bilangan negatif dan operasi pengurangan. Notasi $(-a)$ dianggap satu elemen didalam $\mathbb{R}$. Begitu juga elemen kebalikan $(1/a)$ dianggap satu elemen dan operasi pembagian belum didefinisikan. Berikut diberikan beberapa teorema sederhana yang diturunkan langsung dari sifat-sifat aljabar ini.

Teorema 1.1. *Jika a bilangan real sebarang maka persamaan $a + x = b$ mempunyai penyelesaian tunggal, yaitu $x = (-a) + b$.*

Bukti. Pertama ditunjukkan eksistensi penyelesaiannya.

$$\begin{aligned}
a + x &= b \text{ (diketahui)} \\
(-a) + (a + x) &= (-a) + b \\
((-a) + a) + x &= (-a) + b \text{ (A2)} \\
0 + x &= (-a) + b \text{ (A4)} \\
x &= (-a) + b \text{ (A3)}
\end{aligned}$$

Selanjutnya ditunjukkan bahwa penyelesaian ini adalah tunggal. Misalkan x_1 penyelesaian lainnya maka dipenuhi $a + x_1 = b$. Jadi diperoleh hubungan $a + x_1 = a + x$. Berdasarkan langkah sebelumnya diperoleh $x_1 = (-a) + (a + x)$. Dengan menggunakan (A2) kemudian (A4) maka diperoleh $x_1 = x$ sehingga disimpulkan penyelesaiannya tunggal. ■

Exercise 1. Buktikan jika a bilangan real tidak nol maka persamaan $a \cdot x = b$ mempunyai penyelesaian tunggal, yaitu $x = (1/b)$.

Teorema 1.2. *Bila a suatu elemen pada $\mathbb{R}$ maka berlaku pernyataan berikut.*

1. $a \cdot 0 = 0$,
2. $(-1) \cdot a = -a$,
3. $-(-a) = a$,
4. $(-1) \cdot (-1) = 1$.

Bukti. 1) Berdasarkan (M3) kita mempunyai $a \cdot 1 = a$. Selanjutnya kedua ruas ini ditambahkan a, diperoleh

$$\begin{aligned} a + a \cdot 0 &= a \cdot 1 + a \cdot 0 \\ &= a \cdot (1 + 0) \text{ [menggunakan D]} \\ &= a \cdot 1 \text{ [menggunakan A3]} \\ &= a \text{ [menggunakan M3]} \end{aligned}$$

Selanjutnya dengan menggunakan Teorema 1.1 dengan menganggap x sebagai $a \cdot 0$ diperoleh

$$a \cdot 0 = (-a) + a = 0.$$

2) Dari (M3) kita mempunyai $a = 1 \cdot a$. Tambahkan pada kedua ruas dengan $(-1) \cdot a$, diperoleh

$$\begin{aligned} a + (-1) \cdot a &= 1 \cdot a + (-1) \cdot a \\ &= (1 + (-1)) \cdot a \text{ [menggunakan D]} \\ &= 0 \cdot a \text{ [menggunakan A4]} \\ &= 0 \text{ [menggunakan bagian } i\text{, setelah menerapkan (A1)]} \end{aligned}$$

Selanjutnya dengan menggunakan Teorema 1.1 dan menganggap x sebagai $(-1) \cdot a$, kemudian menggunakan (A3) diperoleh

$$(-1) \cdot a = (-a) + 0 = -a.$$

Exercise 2. Lanjutkan pembuktian Teorema 1.2 yang belum selesai.

Teorema 1.2 (1) mengatakan bahwa bilangan apapun jika dikalikan dengan nol maka hasilnya nol. Fakta ini merupakan teorema yang kebenarannya dapat dibuktikan, bukan suatu kesepakatan atau aksioma. Begitu juga dengan fakta lainnya pada teorema ini.

Teorema 1.3. *Misalkan a, b, c elemen pada $\mathbb{R}$. Maka pernyataan berikut berlaku*

1. *Jika $a \neq 0$ maka $1/a \neq 0$ dan $1/(1/a) = a$,*
2. *Jika $a \cdot b = a \cdot c$ dan $a \neq 0$ maka $b = c$,*
3. *Jika $a \cdot b = 0$ maka berlaku salah satu: $a = 0$ atau $b = 0$.*

Bukti. 1) Karena $a \neq 0$ maka menurut (M4) selalu ada $1/a \in \mathbb{R}$. Andaikan $1/a = 0$ maka diperoleh

$$1 = a \cdot (1/a) = a \cdot 0 = 0.$$

Hasil ini berlawanan atau kontradiksi dengan (M3). Jadi pengandaian ini salah, dan haruslah $1/a \neq 0$. Selanjutnya karena $1/a \neq 0$ dan karena $(1/a) \cdot a = 1$ maka dengan Latihan 1 dengan memandang a sebagai x maka diperoleh $a = 1/(1/a)$. 2) Kedua ruas pada $a \cdot b = a \cdot c$ dikalikan dengan $(1/a)$ disertai dengan menggunakan (M2), diperoleh

$$\begin{aligned} ((1/a) \cdot a) \cdot b &= ((1/a) \cdot a) \cdot c \\ \Leftrightarrow 1 \cdot b &= 1 \cdot c \text{ [menggunakan M4]} \\ \Leftrightarrow b &= c \text{ [menggunakan M3]} \end{aligned}$$

Exercise 3. Buktikan pernyataan 3 pada Teorema 1.3.

Beberapa operasi lainnya pada $\mathbb{R}$

Sejauh ini hanya ada dua operasi pada bilangan real. Melalui dua operasi ini diturunkan bebedapa operasi lainnya yang didefinisikan sebagai berikut :

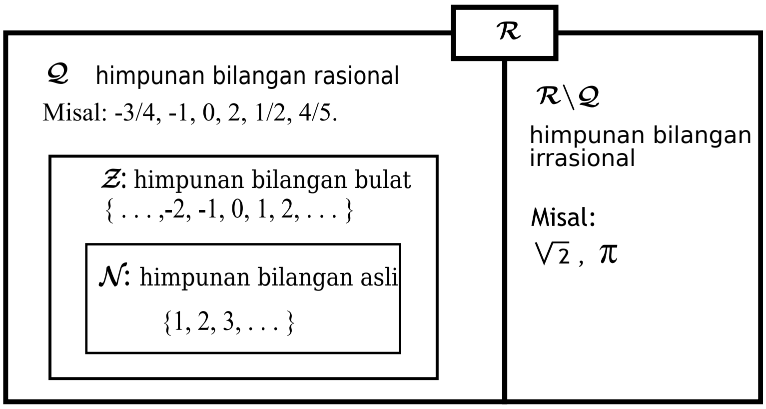
1. **Operasi pengurangan**. Bila $a, b \in \mathbb{R}$ maka notasi $a - b$ dibaca a dikurang dengan b dan didefinisikan oleh
$$a - b := a + (-b).$$

2. **Operasi pembagian**. Bila $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ maka notasi a/b atau $\frac{a}{b}$ dibaca a dibagi dengan b dan didefinisikan oleh
$$a/b := a \cdot (1/b).$$

3. **Operasi pangkat**. Bila $a \in \mathbb{R}$ maka notasi a^2 dibaca a dipangkatkan dengan dua atau a kuadarat dan didefinisikan sebagai $a^2 := a \cdot a$. Secara umum untuk n bilangan asli, a^n adalah a dipangkatkan dengan n didefinisikan oleh
$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{\text{sebanyak n faktor}}.$$
Untuk $a \neq 0$, notasi a^{-1} dimaksudkan untuk $1/a$ dan notasi a^{-n} untuk $(1/a)^n$.

Beberapa himpunan bagian penting pada $\mathbb{R}$

1. **Bilangan asli**. Himpunan bilangan asli dilambangkan dengan $\mathbb{N}$ dipandang sebagai himpunan bagian $\mathbb{R}$ dan $n \in \mathbb{N}$ didefinisikan sebagai
$$n := \underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{\text{sebanyak n suku}}.$$



Gambar 1.1: Struktur bilangan real

2. **Bilangan bulat**. Himpunan bilangan bulat dilambangkan dengan **Z** dan keanggotannya dapat didefinisikan sebagai berikut :

$$\mathbb{Z} := \{-n : n \in \mathbb{N}\} \cup \mathbb{N} \cup \{0\}$$

dengan $-n := \underbrace{(-1) + (-1) + (-1) + \cdots + (-1)}_{\text{sebanyak n suku}}$.

3. **Bilangan rasional dan irrasional**. Himpunan bilangan rasional dilambangkan dengan $\mathbb{Q}$ adalah elemen bilangan real yang dapat ditulis dalam bentuk pecahan. Jadi,

$$Q := \left\{ \frac{b}{a} : a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0 \right\}.$$

Bilangan real selain bilangan rasional disebut bilangan **irrasional** dan himpunan bilangan irrasional ini biasa dilambangkan dengan $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Notasi ":=" berarti "didefinisikan oleh" (*defined by*). Penggunaan notasi ini lebih tepat daripada menggunakan "=" karena tanda sama dengan seharusnya digunakan untuk menyatakan kesamaan kedua ruas.

Struktur bilangan real diberikan pada Gambar 1.1.

Teorema 1.4. *Tidak ada bilangan rasional r sehingga $r^2 = 2$.*

Proof. Andai ada bilangan rasional yang kuadratnya sama dengan dua. Untuk itu dapat ditulis $r = \frac{m}{n}$ dengan m dan n tidak mempunyai faktor persekutuan selain 1. Diperoleh

$$r^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2,$$

berarti m^2 bilangan genap. Karena itu m juga genap (lihat latihan berikut!). Karena m genap maka dapat ditulis $m = 2p$. Substitusi m ini ke kesamaan sebelumnya, diperoleh

$$(2p)^2 = 2n^2 \Rightarrow 4p^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2p^2.$$

Ini berarti n^2 bilangan genap, akibatnya n juga bilangan genap. Berangkat dari pengandaian tadi diperoleh dua pernyataan berikut

a. m dan n tidak mempunyai faktor persekutuan selain 1, berarti m dan n tidak mungkin keduanya genap.

b. m dan n bilangan genap.

Kedua pernyataan ini bertentangan (kontradiksi), sehingga pengandaian harus diingkari. Kesimpulannya Teorema terbukti. □

Beberapa soal yang dipecahkan

Contoh 1.1. Buktikan bahwa jika $z \in \mathbb{R}$ bilangan irrasioanl dan $r \neq 0$ bilangan rasional maka $r + z$ dan rz bilangan irrasional.

Penyelesaian.

Dibuktikan dengan kontradiksi. **Andai** $r + z$ rasional, maka dapat ditulis

$$r + z = \frac{m}{n} \text{ dan } r = \frac{p}{q},\ m, n, p, q \in \mathbb{Z}, n, q \neq 0.$$

Dari sini diperoleh

$$z = \frac{m}{n} - \frac{p}{q} = \frac{mq - np}{nq},$$

yaitu z rasional, sebab $mq - np, nq \in \mathbb{Z}, nq \neq 0$. Kontradiksi dengan z irrasional. Jadi pengandaian $r + z$ rasional salah, dan haruslah $r + z$ irrasional. Dengan argumen yang sama dapat dibuktikan sisanya.

Contoh 1.2. Buktikan bahwa jika $a, b \in \mathbb{R}$ maka

1. $-(a + b) = (-a) + (-b)$
2. $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$
3. $1/(-a) = -(1/a)$, $a \neq 0$
4. $-(a/b) = (-a)/b$, $b \neq 0$.

Bukti. 1). Dengan menggunakan Teorema 1.2(2) dan sifat distributif diperoleh

$$\begin{aligned} -(a + b) &= (-1) \cdot (a + b) \\ &= (-1) \cdot a + (-1) \cdot b \\ &= (-a) + (-b). \end{aligned}$$

2). Diperhatikan penjabaran berikut, coba justifikasi setiap langkah yang diberikan

$$\begin{aligned}
(-a)\cdot(-b) &= ((-1)\cdot a)\cdot((-1)\cdot b)\\
&= (a\cdot(-1))\cdot((-1)\cdot b)\\
&= a\cdot((-1)\cdot((-1)\cdot b))\\
&= a\cdot(((-1)\cdot(-1))\cdot b)\\
&= a\cdot(1\cdot b)\\
&= a\cdot b
\end{aligned}$$

Exercise 4. Kerjakan bagian 3 dan 4 pada Contoh 1.1.

Contoh 1.3. Bila bilangan real a memenuhi $a \cdot a = a$ maka salah satunya berlaku: $a = 0$ atau $a = 1$.

Bukti. Diketahui $a \cdot a = a$. Coba lengkapi justifikasi untuk tiap-tiap langkah berikut.

$$\begin{aligned}
a\cdot a+(-a) &= a+(-a)\\
a\cdot a+(-1)\cdot(a) &= 0\\
(a+(-1))\cdot a &= 0.
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan Teorema 1.3(iii) diperoleh $a + (-1) = 0$ atau $a = 0$. Lanjutkan langkah untuk menyimpulkan $a = 1$ dari $a + (-1) = 0$.

Contoh 1.4. Bila $a \neq 0$ dan $b \neq 0$, buktikan $1/(ab) = (1/a) \cdot (1/b)$.

Bukti. Karena $a \neq 0$ dan $b \neq 0$ maka $ab \neq 0$ sehingga berdasarkan Teorema 1.3 (i) diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1/ab)} &= a\cdot b\\
\frac{1}{(1/ab)}\cdot(1/b) &= a\cdot(b\cdot(1/b))\\
\frac{1}{(1/ab)}\cdot(1/b) &= a\\
\frac{1}{(1/ab)}\cdot((1/b)\cdot(1/a)) &= a\cdot(1/a)\\
\frac{1}{(1/ab)}\cdot((1/b)\cdot(1/a)) &= 1.
\end{aligned}$$

Dari baris terakhir dapat disimpulkan $(1/a)\cdot(1/b) = \frac{1}{(1/(1/ab))} = 1/(ab)$ karena $\frac{1}{(1/ab)}$ merupakan elemen kebalikan dari $(1/a)\cdot(1/b)$.

1.2 Sifat urutan bilangan real

Urutan pada bilangan real merujuk pada hubungan ketidaksamaan antara dua bilangan real. Sebelum didefinisikan urutan terlebih dulu didefinisikan bilangan positif.

Definisi 1.1. Pada $\mathbb{R}$ terdapat himpunan bagian takkosong $\mathbb{P}$ dengan sifat-sifat berikut

1. Jika $a, b \in \mathbb{P}$ maka $a + b \in \mathbb{P}$.
2. Jika $a, b \in \mathbb{P}$ maka $a \cdot b \in \mathbb{P}$.

Himpunan $\mathbb{P}$ ini selanjutnya disebut himpunan bilangan positif.

Selanjutnya diturunkan sifat **trikotomi** pada bilangan real, yaitu bila $a \in \mathbb{R}$ sebarang maka tepat satu pernyataan berikut dipenuhi, yaitu

$$a \in \mathbb{P}, \text{ atau } a = 0, \text{ atau } -a \in \mathbb{P}.$$

Selanjutnya himpunan **bilangan negatif** didefinisikan sebagai himpunan

$$\{-a : a \in \mathbb{P}\}.$$

Jadi himpunan bilangan real terbagi atas tiga himpunan saling asing yaitu bilangan positif, bilangan negatif dan nol. Selanjutnya urutan pada bilangan real didefinisikan sebagai berikut

Definisi 1.2. Berikut ini definisi ketidaksamaan antara elemen-elemen pada $\mathbb{R}$:

1. Bilangan $a \in \mathbb{P}$ disebut bilangan positif dan ditulis $a > 0$. Notasi $a \geq 0$ berarti $a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$, dan a disebut bilangan taknegatif.
2. Bilangan $a \in \mathbb{P}$ sehingga $-a \in \mathbb{P}$ disebut bilangan negatif, ditulis $a < 0$. Notasi $a \leq 0$ berarti $-a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$, dan a disebut bilangan takpositif.
3. Bilangan real a dikatakan lebih besar dari b, ditulis $a > b$ jika hanya jika $a - b \in \mathbb{P}$

Notasi $a < b < b$ dimaksudkan berlaku keduanya $a < b$ dan $b < c$. Bila $a \leq b$ dan $b < c$, maka ditulis $a \leq b < c$.

Teorema 1.5. *Misalkan a, b, c tiga bilangan real. Maka pernyataan berikut berlaku*

1. *Jika $a > b$ dan $b > c$ maka $a > c$,*
2. *Tepat satu pernyataan berikut memenuhi : $a > b$, $a = b$, $a < b$.*

Bukti. 1)Karena $a > b$ dan $b > c$ maka berdasarkan definisi berlaku $a - b \in \mathbb{P}$, dan $b - c \in \mathbb{P}$. Dengan sedikit trik diperoleh

$$a - c = (a - b) + (b - c) \in \mathbb{P}, \text{ yakni } a > c.$$

2) Terapkan sifat trikotomi pada $a - b$. ■

Teorema 1.6. *Misalkan a, b, c, d bilangan-bilangan real. Maka berlaku*

1. *Jika $a > b$ maka $a + c > b + c$.*
2. *Jika $a > b$, $c > d$ maka $a + c > b + d$.*
3. *Jika $a > b$ dan $c > 0$ maka $ca > cb$.*
4. *Jika $a > b$ dan $c < 0$ maka $ca < cb$.*

Bukti. 1) Karena diketahui $a-b \in \mathbb{P}$ maka $(a+c)-(b+c) = a-b \in \mathbb{P}$, yaitu $a+c > b+c$.
2) Karena diketahui $a-b \in \mathbb{P}$ dan $c-d \in \mathbb{P}$ maka $(a+c)-(b+d) = (a-b)+(c-d) \in \mathbb{P}$, yaitu $a + c > b + d$.
3) Karena diketahui $a - b \in \mathbb{P}$, $c \in \mathbb{P}$ maka $(a - b)c = ac - bc \in \mathbb{P}$, yaitu $ac > bc$.

Exercise 5. Buktikan bagian 4 pada Teorema 1.5.

Teorema 1.7. *Jika a dan b bilangan real dengan $a < b$ maka $a < \frac{1}{2}(a + b) < b$.*

Bukti. Karena $a < b$ maka $2a = a + a < a + b$. Dengan argumen yang sama diperoleh juga $a + b < b + b = 2b$. Dengan menggabungkan kedua hasil ini, diperoleh

$$2a < a + b < 2b \longleftrightarrow a < \frac{a + b}{2} < b. \quad \blacksquare$$

Exercise 6. Buktikan bahwa jika $a > 0$ maka $0 < \frac{1}{2}a < a$.

Teorema berikut menjamin bahwa suatu bilangan taknegatif yang kurang dari bilangan positif apapun adalah nol.

Teorema 1.8. *Bila $a \in \mathbb{R}$ dengan $0 \leq a < \epsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$ maka $a = 0$.*

Bukti. Bukti dengan kontradiksi. Andaikan $a > 0$. Berdasarkan Latihan sebelumnya, berlaku $0 < \frac{1}{2}a < a$. Sekarang ambil $\varepsilon_0 := \frac{1}{2}a > 0$, sehingga berlaku $0 < \varepsilon_0 < a$. Hal ini kontradiksi dengan hipotesis bahwa $0 \leq a < \epsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$. Jadi pengandai salah, dan haruslah $a = 0$. $\blacksquare$

Exercise 7. Bila a, b bilangan real dengan $a < b + \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$ maka $a \leq b$.

Berdasarkan definisi bilangan positif bahwa perkalian dua bilangan positif akan menghasilkan bilangan positif. Tetapi sebaliknya, bila hasil kali dua bilangan real adalah positif belum tentu kedua bilangan real tadi positif.

Teorema 1.9. *Jika $ab > 0$ maka berlaku salah satu dari dua kemungkinan berikut:*

$$a > 0 \text{ dan } b > 0 \text{ atau } a < 0 \text{ dan } b < 0.$$

Bukti. Karena $ab > 0$ maka $a \neq 0$ dan $b \neq 0$, sebab jika salah satu diantara a atau b bernilai nol maka $ab = 0$. Karena sifat trikotomi kemungkinnya $a > 0$ atau $a < 0$. Untuk $a > 0$ maka $1/a > 0$ dan

$$b = 1 \cdot b = ((1/a)a)\, b = \underbrace{(1/a)}_{>0}\underbrace{(ab)}_{>0} > 0.$$

Untuk kasus $a < 0$, diperoleh $-a > 0$ atau $1/(-a) > 0$ sehingga diperoleh

$$0 < (1/(-a))(ab) = -(1/a)(ab) = -\left((1/a) \cdot a\right) \cdot b = -1 \cdot b = -b.$$

Karena $-b > 0$ maka disimpulkan $b < 0$. ■

Exercise 8. Buktikan bahwa jika $ab < 0$ maka berlaku salah satu dari dua kemungkinan berikut:

$$a > 0 \text{ dan } b < 0 \text{ atau } a < 0 \text{ dan } b > 0.$$

Kedua hasil yang baru saja diberikan mengatakan bahwa jika hasil kali dua bilangan positif maka kedua bilangan itu bertanda sama. Sebaliknya, jika hasil kali kedua bilangan negatif maka kedua bilangan itu berlainan tanda.

Beberapa ketidaksamaan penting pada $\mathbb{R}$

Teorema 1.10. *Misalkan $a \geq 0$ dan $b \geq 0$. Maka pernyataan-pernyataan berikut adalah equivalen:*

1. $a < b$
2. $a^2 < b^2$
3. $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Bukti. Untuk $a = 0$ diperoleh pernyataan

$$b > 0 \longleftrightarrow b^2 > 0 \longleftrightarrow \sqrt{b} > 0.$$

Fakta ini mudah dibuktikan sendiri. Sekarang diasumsikan $a > 0$ dan $b > 0$, yaitu $a + b > 0$. (1) $\to$ (2): Diketahui $a < b$, atau $a - b < 0$. Jadi diperoleh

$$a^2 - b^2 = \underbrace{(a-b)}_{<0}\underbrace{(a+b)}_{>0} < 0$$

(2) $\to$ (1): Diketahui $a^2 - b^2 = \underbrace{(a-b)}_{<0}\underbrace{(a+b)}_{>0} < 0$. Karena diketahui pula $a + b > 0$ maka haruslah $a - b < 0$, atau $a < b$. (i) $\leftrightarrow$ (iii): Sebelumnya sudah dibuktikan bahwa jika $x, y > 0$ maka

$$x < y \longleftrightarrow x^2 < y^2.$$

Pada bagian ini diambil $x = \sqrt{a}$ dan $y = \sqrt{b}$ sehingga $x, y > 0$. Karena $a = (\sqrt{a})^2$ dan $b = \sqrt{b})^2$ maka diperoleh

$$\sqrt{a} < \sqrt{b} \longleftrightarrow (\sqrt{a})^2 = a < b = (\sqrt{b})^2.$$

Jadi lengkaplah bukti ini karena telah ditunjukkan berlakunya equivalensi (3) $\leftrightarrow$ (1) $\leftrightarrow$ (2).

Teorema 1.11. ***[Rata-rata aritmatika-geometri]*** *Bila a dan b bilangan positif maka berlaku*

$$\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b). \tag{RAG}$$

Bukti. Bila $a = b$ maka relasi pada (RAG) menjadi kesamaan. Sekarang diasumsikan $a \neq b$. Karena $a > 0$ dan $b > 0$ maka $\sqrt{a} > 0$ dan $\sqrt{b} > 0$. Diperhatikan bahwa

$$0 \neq a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})\underbrace{(\sqrt{a} + \sqrt{b})}_{>0}.$$

Jadi $(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \neq 0$, dan selanjutnya dikuadratkan diperoleh

$$0 < (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{ab} + b \Longleftrightarrow \sqrt{ab} > \frac{1}{2}(a+b).$$

Rata-rata aritmatika (RA) dari dua bilangan real a dan b adalah $\frac{a+b}{2}$, sedangkan rata-rata geometri (RG) dari a dan b adalah $\sqrt{ab}$. Biasanya dalam kehidupan sehari-hari, rata-rata aritmatika lebih sering digunakan daripada rata-rata geometri. Secara umum dua macam rata-rata ini didefinisikan sebagai berikut: Misalkan diketahui bilangan real atau data $a_1, a_2, \cdots, a_n$ maka

$$RA = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k, \quad RG = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n}$$

dengan notasi $\sum$ untuk penjumlahan dan $\prod$ untuk perkalian suku-suku. Masih tetap berlaku bahwa

$$RG \leq RA.$$

Teorema 1.12 (Ketidaksamaan Bernoulli)**.** *Jika $x > -1$ maka untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx. \tag{KB}$$

Bukti. Dibuktikan dengan induksi matematika. Untuk $n = 1$ kedua ruas pada (KB) menjadi kesamaan. Diasumsikan berlaku untuk $n = k$, yaitu berlaku $(1+x)^k \geq 1 + kx$. Untuk $n = k+1$, diperoleh

$$\begin{aligned} (1+x)^k &\geq 1 + kx \text{ [diketahui]} \\ (1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) &\geq (1+kx)(1+x) \\ &= 1 + (k+1)x + kx^2 \\ &\geq 1 + (k+1)x. \end{aligned}$$

Jadi berlaku untuk $n = k + 1$. Perhatikan pada baris kedua kedua ruas dikalikan dengan $(1 + x)$ suatu bilangan positif karena $x > -1$. ■

Teorema 1.13 (Ketidaksamaan Cauchy)**.** *Misalkan* $a_1, a_2, \cdots a_n$ *dan* $b_1, b_2, \cdots, b_n$ *bilangan real maka berlaku*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

Bukti. Didefinisikan fungsi $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan

$$F(t) := \sum_{k=1}^{n} (a_k - tb_k)^2.$$

Jelas F fungsi taknegatif, karena itu diperoleh

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{k=1}^{n} a_k^2 - 2ta_k b_k + t^2 b_k^2 \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) t^2 - 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right) t + \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) \geq 0. \end{aligned}$$

Jadi F merupakan fungsi kuadrat definit tak negatif, sehingga diskriminannya pun tak negatif, yaitu

$$4\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - 4\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) \leq 0.$$

Akhirnya dengan memindahkan ruas pada ketidaksamaan ini terbuktilah bahwa

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

■

Soal-soal yang dipecahkan

1. Diketahui $a, b \in \mathbb{R}$.Buktikan $a^2 + b^2 = 0 \longleftrightarrow a = 0$ dan $b = 0$.
2. Bila $0 \leq a < b$, buktikan $a^2 \leq ab < b^2$. Tunjukkan bahwa $a^2 < ab < b^2$ tidak selalu berlaku.
3. Buktikan jika $0 < a < b$ maka berlaku $a < \sqrt{ab} < b$ dan $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.
4. Buktikan untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$ berlaku $\left[\frac{1}{2}(a + b)\right]^2 \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$.

5. Buktikan kebenaran pernyataan berikut
   a) $0 < c < 1 \rightarrow 0 < c^2 < c < 1$
   b) $c > 1 \rightarrow 1 < c < c^2$.
6. Bila untuk sebarang $a, b \in \mathbb{R}$ berlaku $a \leq b + \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$ maka $a \leq b$.
7. Temukan himpunan penyelesaian yang memenuhi pertidaksamaan berikut
   a) $x^2 > 3x + 4$
   b) $1 < x^2 < 4$
   c) $\frac{1}{x} < x$
   d) $\frac{1}{x} < x^2$.

Operasi Hitung

A. PENJUMLAHAN

Definisi : Jika a dan b adalah banyaknya anggota himpunan A dan B sedangkan $A \cap B = \phi$ (saling lepas). Maka : $a + b = n(A \cup B)$

Jika a + b = c, mka a = bilangan yang ditambah

b = penambah

c = jumlah

Penjumlahan Berganda

Bentuk a + b + c + d disebut penjumlahan berganda. Bentuk ini belum mempunyai arti karena penjumlahan baru didefinisikan untuk dua bilangan. Untuk memberikan arti pada bentuk ini dapat dipakai dua cara:

a. mengembalikan kebentuk definisi penjumlahan sebagai berikut:
   $a + b + c + d = (a + b) + (c + d)$.
b. a + b + c + d didefinisikan sebagai benyaknya anggota dari $A \cup B \cup C \cup D$ dimana A, B, C dan D adalah himpunan yang masing-masing banyaknya anggota a, b, c dan d sedangkan himpunan-himpunan tersebut masing-masing saling lepas (disjungsi).

Sifat-sifat Penjumlahan

a. Komutatif: $a + b = b + a$
   Jumlah bilangan tidak berubah jika tertambah dan penambahan dipertukarkan.
   Bukti: dalam himpuan berlaku $A \cup B = B \cup A$
b. Asosiatif: $(a + b) + c = a + (b + c)$
   Bukti: dalam himpunan berlaku $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup A)$
   Contoh 1: tunjukkan bahwa $a + b + c + d + e + f = a + (b + c + d) + (e + f)$
   Bukti: $a + b + c + d + e + f = (a + b + c + d + e) + f$ def
   $= \{a + (b + c + d + e)\} + f$ def
   $= [a + \{(b + c + d) + e\}] + f$ def
   $= [a + (b + c + d)] + e + f$ ass
   $= a + (b + c + d) + (e + f)$ ass
   Contoh 2: Hitunglah 352 + 635
   Jawab: $352 + 635 = (300 + 50 + 2) + (600 + 30 + 5)$
   $= (300 + 600) + (50+ 30) + (5 + 2)$

= 900 + 80 + 7

= 987

c. Tertutup: Jika a, b $\in$ R, maka (a + b) $\in$ R.

d. Aditif: Jika a, b, c $\in$ R dan a = b, maka a + c = b + c

e. Penghapusan: Jika a, b, c $\in$ R dan a + c = b + c maka a = b.

f. Ketidaksamaan

i. jika a, b $\in$ R dan a < b jika dan hanya jika terdapat c $\in$ R sedemikian hingga berlaku a + c = b

ii. jika a, b $\in$ R dan a > b jika dan hanya jika terdapat c $\in$ R sedemikian hingga berlaku a = b + c

iii. i dan ii benar untuk c $\neq$ 0

g. Aditif ketidaksamaan

Jika a, b, c $\in$ R dan a < b maka a + c < b + c

Bukti: a < b $\Leftrightarrow$ a + d = b

(a + d) + c = b + c adtf

a + (d + c) = b + c ass

a + (c + d) = b + c komu

(a + c) + d = b + c ass

a + c < b + c ktdksmaan

h. Penghapusan Ketidaksamaan

Jika a, b, c $\in$ R dan a + c < b + c maka a < b

Bukti: a + c < b + c $\Leftrightarrow$ (a + c) + d = b + c add

a + (c + d) = b + c ass

a + (d + c) = b + c kom

(a + d) + c = b + c ass

a + d = b penghpusan

a < b ktdksmaan

B. PERKALIAN

Definisi 1: $a \times b = \underbrace{b + b + b + \ldots\ldots + b}_{\text{a suku}}$

Perkalian a dan b (a x b) adalah penjumlahan berganda yang mempunyai a suku dan tiap-tiap sukunya adalah b.

a x b = c: maka a = pengali

b = bilangan yang dikalikan

c = hasil kali

Misal: 6 x 7 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7

Definisi 2: jika a dan b meruakan banyaknya anggota himpunan A dan B, maka a x b = n(A x B)

Definisi 3 : a x b adalah banyaknya anggota gabungan a himpunan yang masing-masing saling lepas dan mempunayi b anggota.

Jadi a x b = n $(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots\ldots \cup A_a)$ dimana $n(A_1) = n(A_2) = n(A_3) = \ldots = n(A_n) = b$

Definisi 4: (digunakan di sekolah dasar)

Yaitu dengan menggunakan pembilang loncat.

Contoh: 3 x 4 = 12, hal ini dapat diragakan sebagai berikut:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

Sifat-sifat Perkalian.

1. Tertutup: Jika a, b $\in$ R, maka a x b= c, dimana c $\in$ R.
2. Komutatif: a x b = b x a

   Bukti: $n(H_1 \cup H_2 \cup \ldots. \cup H_a) = n(K_1 \cup K_2 \cup \ldots. \cup K_b)$

   Dimana: $n(H_1) = n(H_1) = \ldots. = n(H_a) = b$ dan,

   $n(K_1) = n(K_1) = \ldots. = n(K_b) = a$
3. Asosiatif: (a x b) x c = a x (b x c)

   Bukti:

   $$(a \times b) \times c = \underbrace{(a \times b) + (a \times b) + (a \times b) + \ldots\ldots + (a \times b)}_{\text{a suku}}$$

   $$= \underbrace{(\underbrace{c + c + \ldots + c}_{\text{b-suku}}) + (\underbrace{c + c + \ldots + c}_{\text{b-suku}}) + \ldots\ldots + (\underbrace{c + c + \ldots + c}_{\text{b-suku}})}_{\textit{a kelompok yang masing-masing mempunyai b-suku}}$$

   $$= \underbrace{c + c + c + \ldots. + c + c}_{\text{(a x b)-suku}}$$

   $$= (a \times b) \times c$$

   Pemakian: 28 x 29 = (7 x 4) x 25

   = 7 x (4 x 25)

   = 7 x 100

   = 700

4. Distributif: a x (b + c) = (a x b) + (b x c)

   Bukti: $a \times (b + c) = \underbrace{(b + c) + (b + c) + (b + c) + \ldots\ldots + (b + c)}_{\text{a suku}}$

   $= \underbrace{b + b + b + \ldots + b}_{\text{a-suku}} + \underbrace{c + c + c + \ldots + c}_{\text{a-suku}}$

   $= (a \times b) + (a \times c)$

5. Jika a, b, c $\in$ R dan a = b, maka ac = bc, ini berlaku untuk c $\neq$ 0
6. Jika a, b, c $\in$ R dan a < b, maka ac < bc, ini tidak berlaku untuk c = 0 dan c < 0

C. PEMANGKATAN

Definisi: $a^b = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{\text{b-faktor}}$

a^b dibaca "a dipangkatkan b" atau disingkat " a pangkat b".

Jika $a^b = c$ maka: a = bilangan pokok

b = pangkat atau eksponen

c = hasil perpangkatan

Sifat-sifat.

1. Distributif terhadap perkalian

   $(a \times b)^p = a^p \times b^p$

   Bukti: $(a \times b)^p = \underbrace{(a \times b) \times (a \times b) \times \ldots \times (a \times b)}_{\text{p-faktor}}$

   $= (\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{\text{p-faktor}}) \times (\underbrace{b \times b \times b \times \ldots \times b}_{\text{p-faktor}})$

   $= a^p \times b^p$

2. Distributif terhadap pembagian

   $(a : b)^p = a^p : b^p$

3. Sifat pangkat

   $a^p \times b^q = a^{p+q}$

   Bukti: $a^p \times b^q = (\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{\text{p-faktor}}) \times (\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{\text{q-faktor}})$

   $= \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{\text{(p + q) faktor}}$

   $= a^{p+q}$

4. Perpangkatan berganda

   $(a^p)^q = a^{pq}$

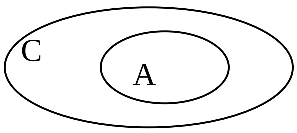
SOAL LATIHAN

1. Buktikan dengan induksi matematika:
   a. $(a^m)^n = a^{mn}$
   b. $(ab)^m = a^m .b^m$
2. Hitunglah dengan menggunakan sifat-sifat yang sudah diketahui. Sehingga lebih mudah:
   a. 9 x 74 c. 8 x 112 + 13 x 8
   b. 6 x 148 d. 155 x 414 + 48 x 95
3. Bagaimanakah perpangkatan dengan bilangan nol?
4. Buktikan bahwa:
   a. a x b x c x d x e = (a x b) x c x (d x e)
   b. a x b x c x d = (d x c) x (b x a)

D. PENGURANGAN

Definisi 1: Jika c dan a menyatakan banyaknya anggota himpunan C dan A, dan A subset dari C. maka c – a didefinisikan sebagai banyaknya anggota dari bimpunan C – A.

Jadi, jika n(C) = c, n(A) = a dan $A \subseteq C$, maka diperoleh: c – a = n(C – A)



Pada pengurangan c – a = b, maka: c disebut bilangan yang dikurangi

a disebut pengurang

d disebut hasil pengurangan

Definisi 2: apabila dari suatu penjumlahan salah satu sukunya a dan jumlahnya c diketahui, maka kalimat penjumlahan adalah

a + ….. = c.

Kalimat terbuka itu dapat disajikan sebagai c – a = ….

Apabila c – a = … disubtitusikan dalam a + … = c, didapat:

a + (c – a) = c atau (c – a) + a = c

Bentuk ini disebut *RUMUS DEFINISI*

Jika $c - a = b$, kemudian disubtitusikan kedalam rumus definisi, didapat:

$c - a = b \Leftrightarrow a + b = c$ ➔ arti pengurangan

operasi pengurangan disebut invers penjumlahan.

Contoh:

jika $a, b, c \in A$ dan $a \geq b$, maka $(a - b) + c = (a + c) - b$.

untuk membuktikan: $(a - b) + c = (a + c) - b$, diubah menjadi:

$(a + c) - b = (a - b) + c$	simetris
$b + (a - b) + c = a + c$	arti pengurangan
$\{b + (a - b)\} + c = a + c$	asosiatif
$\{(a - b) + b\} + c = a + c$	komutatif
$a + c = a + c$	definisi pengurangan

SOAL LATIHAN

Buktikan untuk $a, b, c, d \in A$:

1. Jika $b \geq c$ maka $(a - b) + c = a - (b - c)$
2. Jika $a \geq c$; $b \geq c$ dan $a - c = b - c$,maka $a = b$
3. Jika $a \geq b$; $c \geq d$, maka $(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d)$
4. Jika $a \geq b$ dan $a - b \geq c$, maka $(a - b) - c = (a - c) - b$
5. Jika $a \geq p$, $b \geq q$ dan $c \geq r$, maka:

   $(a + b + c) - (p + q + r) = (a - p) + (b - q) + (c - r)$

E. PEMBAGIAN

Dari suatu perkalian dapat pula hasil kali dan salah satu faktornya diketahui, sedang faktor yang lain harus dicari. Pencarian faktor yang belum diketahui ini disebut *OPERASI PEMBAGIAN*.

Apabila dari perkalian salah satu faktornya a dan hasilkalinya c sudah diketahui, maka $a \times \ldots = c$ dapat ditulis sebagai $c : a = \ldots$

Jika $c : a = \ldots$ disubstitusikan dalam kalimat $a \times \ldots = c$, maka didapat:

$a \times (c : a) = c$ disebut definisi pembagian

apabila $c : a = b$, maka $a \times b = c$.

Jadi, $c : a = b \Leftrightarrow a \times b = c$ arti pembagian

Sehingga operasi pembagian disebut *INVERS PERKALIAN*.

Pada c : a = b, maka c disebut terbagi
a disebut pembagi
b disebut hasil bagi

Contoh:

1. jika a, b, c $\in$ A, maka (a : b) x c = (a x c) : b.

   Bukti:

   (a : b) x c = (a x c) : b.

(a x c) : b = (a : b) x c	simetris
b x {(a : b) x c} = a x c	arti pembagian
{b x (a : b)} x c = a x c	asosiatif
a x c = a x c	definisi pengurangan

2. Buktikan (a : b) x c = a : (b : c)

Bukti: a : (b : c) = (a : b) x c	simetris
(b : c) x {(a : b) x c} = a	arti pembagian
(b : c) x {c x (a : b)} = a	komutatif
{(b : c) x c}x (a : b) = a	asosiatif
b x (a : b) = a	definisi pembagian
a = a	definisi pembagian

SOAL LATIHAN

Buktikan !

1. Jika a : c = b : c, maka a = b
2. Jika a : c < b : c, maka a < b
3. Jika a : c $\leq$ b : c, maka c : a $\geq$ c : b
4. (a + b) : c = (a : c) + (b : c)
5. (a - b) : c = (a : c) - (b : c)
6. (a x b x c) : (p x q x r) = (a : p) x (b : q) x (c : r)
7. a : b = (k x a) : (k x b)
8. (a : b) : k = a : (b x k)

F. PENARIKAN AKAR

Apabila dari perpangkatan $a^b = c$, yang diketahui hasil perpangkatan c dan eksponen b, sedang bilangan pokok a harus dicari, maka operasi hitungnyadisebut penarikan akar.

Kalimat terbuka $\ldots^b = c$, dapat ditulis $\sqrt[b]{c} = \ldots.$

Sehingga terdapat kalimat: $\left(\sqrt[b]{c}\right)^b = c$ rumus definisi penarikan akar.

Jika $\sqrt[b]{c} = a$ disubstitusikan ke rumus definisi didapat $a^b = c$.

Jadi $\sqrt[b]{c} = a \Leftrightarrow a^b = c$ arti penarikan akar

Pada $\sqrt[b]{c} = a$ c disebut bilangan pokok

b disebut eksponen akar atau indeks akar

$\sqrt[b]{c}$ dibaca " akar pangkat b dari c"

Catatan: khusus untuk akar pangkat dua biasanya tidak ditulis.

Jadi, $\sqrt[2]{5}$ ditulis $\sqrt{5}$ dibaca " akar lima".

Sifat-sifat penarikan akar:

1. $\sqrt[c]{a \times b} = \sqrt[c]{a} \times \sqrt[c]{b}$
2. $\sqrt[c]{a : b} = \sqrt[c]{a} : \sqrt[c]{b}$
3. $\sqrt[c]{a^b} = a^{(b:c)}$
4. $\sqrt[c]{a^b} = \sqrt[c:b]{a}$
5. $\sqrt[c]{\sqrt[b]{a}} = \sqrt[c \times b]{a}$

Bukti 1:

$\sqrt[c]{a \times b} = \sqrt[c]{a} \times \sqrt[c]{b}$

$\left(\sqrt[c]{a \times b}\right)^c = \left(\sqrt[c]{a} \times \sqrt[c]{b}\right)^c$ definisi penarikan akar

$a \times b = \left(\sqrt[c]{a}\right)^c \times \left(\sqrt[c]{b}\right)^c$ sifat perpangkatan

$a \times b = a \times b$ def penarikan akar

(yang lain untuk latihan)

G. PENARIKAN LOGARITMA

Andaikan dari $a^b = c$, yang diketahui bilangan pokok a dan hasil perpangkatan c, sedangkan yang harus dicari eksponennya b, maka operasi hitungnya disebut PENARIKAN LOGARITMA.

Kalimat $a^{\cdots} = c$, dapat ditulis sebagai $a^{{}^{a}\log c} = c$ disebut definisi penarikan logaritma.

Jika ${}^{a}\log c = b$ dan $a^{{}^{a}\log c} = c$, maka diperoleh $a^b = c$.

Jadi, ${}^{a}\log c = b \Leftrightarrow$ $a^b = c$ arti penarikan logaritma.

Pada ${}^{a}\log c = b$, a disebut bilangan pokok

c disebut bilangan yang ditarik logaritmanya.

Sifat-sifat logaritma:

1. ${}^{a}\log (b \cdot c) = {}^{a}\log b + {}^{a}\log c$
2. ${}^{a}\log \frac{b}{c} = {}^{a}\log b - {}^{a}\log c$
3. ${}^{a}\log b^n = n \cdot {}^{a}\log b$
4. ${}^{a}\log b = \frac{\log b}{\log a}$
5. ${}^{a^m}\log b^n = \frac{n}{m} \cdot {}^{a}\log b$

BAB I
INDUKSI MATEMATIKA

1.1 Induksi Matematika

Induksi matematika adalah suatu metode yang digunakan untuk memeriksa validasi suatu pernyataan yang diberikan dalam suku-suku bilangan asli. Dalam pembahasan ini, kita akan menyatakan Prinsip Induksi Matematika dan memberikan contoh-contoh untuk mengilustrasikan bagaimana proses pembuktian dengan menggunakan induksi matematika.

Kita akan menotasikan himpunan bilangan asli dengan

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\},$$

dengan operasi tambah dan perkalian seperti biasa. Bilangan Asli $\mathbb{N}$ ini memenuhi sifat terurut sempurna (Well-Ordering Property) yaitu,

1.2 Sifat Terurut Sempurna

Setiap himpunan bagian yang tidak kosong dari $\mathbb{N}$ *mempunyai bilangan terkecil.*

Sifat ini mengatakan bahwa jika S adalah himpunan bagian dari $\mathbb{N}$ dan $S \neq \phi$, maka ada bilangan $m \in S$ sehingga $m \leq k$ untuk setiap $k \in S$.

Catatan: Untuk dapat menerapkan sifat terurut sempurna (*WOP*) *ini, kita harus memiliki suatu himpunan yang tidak kosong.*

1.3 Prinsip Induksi Matematika

Misalkan S suatu himpunan bagian dari $\mathbb{N}$ *yang mempunyai sifat:*

(1) $1 \in S$

(2) *jika* $k \in S$ *maka* $k + 1 \in S$

Maka $S = N$

Prinsip Induksi Matematika ini mengatakan bahwa suatu himpunan bagian S dari bilangan asli $\mathbb{N}$ di mana sifat (1) dan (2) dimiliki oleh himpunan itu, maka himpunan bagian itu akan merupakan himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ atau $S = \mathbb{N}$.

Contoh 1 Buktikan $1 + 2 + 3 + . . . + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ untuk setiap n bilangan asli

Jawab

Pernyataan yang akan dibuktikan adalah

$$P_n : 1 + 2 + 3 + . . . + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

Dengan demikian, P_1 adalah $1 = \frac{1}{2}.1.(1+1)$, $P_2 = 1 + 2 = \frac{1}{2}.2.(2+1)$ dan seterusnya. Untuk membuktikan pernyataan itu, perhatikan bahwa P_1 adalah benar. Kemudian, misalkan bahwa

$$P_n : 1 + 2 + 3 + . . . + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

adalah benar, dan kita harus membuktikan bahwa P_{n+1} adalah benar. Untuk ini, kita tambahkan kedua ruas pernyataan P_n dengan $n + 1$ dan diperoleh

$$\begin{aligned} 1+ 2 + . . . + n + (n + 1) &= \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1) \\ &= \frac{1}{2}[n(n+1) + 2(n+1)] \\ &= \frac{1}{2}(n^2 + 3n + 2) \\ &= \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \\ &= \frac{1}{2}(n+1)[(n+1)+1] \end{aligned}$$

Dari sini kita peroleh bahwa P_{n+1} adalah benar. Hal ini menunjukkan bahwa pernyataan

$$P_n : 1 + 2 + 3 + . . . + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

adalah benar untuk setiap n bilangan asli

Contoh 2 Buktikan bahwa semua bilangan berbentuk $7^n - 2^n$ dapat dibagi oleh 5 untuk setiap n bilangan asli.

Jawab

Pernyataan yang akan dibuktikan adalah

$$P_n : 7^n - 2^n \text{ dapat dibagi oleh } 5$$

P_1 adalah benar sebab $7^1 - 2^1 = 5$. Selanjutnya, kita asumsikan bahwa P_n adalah benar. Dengan asumsi ini kita akan menyelidiki kebenaran pernyataan P_{n+1} . Untuk itu, kita perhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
7^{n+1} - 2^{n+1} &= 7.7^n - 7.2^n + 7.2^n - 2.2^n \\
&= 7[7^n - 2^n] + 5.2^n \\
&= 7(5m) + 5.\,2^n \qquad m \in \mathbb{N} \text{ (asumsi } P_n \text{ benar)} \\
&= 5(7m + 2^n)
\end{aligned}
$$

Karena $7m + 2^n$ bilangan asli, maka dari kesamaan terakhir kita dapat menyim-pulkan bahwa $7^{n+1} - 2^{n+1}$ dapat dibagi dengan 5. Dengan kata lain, pernyataan P_{n+1} adalah benar.

Dengan demikian, bilangan berbentuk $7^n - 2^n$ dapat dibagi oleh 5 untuk setiap n bilangan asli.

Latihan 1

1. Buktikanlah formula-formula di bawah ini dengan induksi matematika:
   a. $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ untuk semua $n \geq 1$
   b. $1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + n(n + 1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ untuk semua $n \geq 1$
   c. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n - 1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$ untuk semua $n \geq 1$
   d. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$ untuk semua $n \geq 1$
   e. $\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{3.4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$ untuk semua $n \geq 1$
2. Buktikan bahwa $n^3 + 5n$ dapat dibagi dengan 6 untuk semua $n \in \mathbb{N}$
3. Buktikan bahwa $5^{2n} - 1$ dapat dibagi dengan 8 untuk semua $n \in \mathbb{N}$
4. Buktikan bahwa $5^n - 4n - 1$ dapat dibagi dengan 16 untuk semua $n \in \mathbb{N}$
5. Buktikan bahwa jumlah pangkat tiga dari sembarang tiga bilangan asli yang berurutan, n, $n + 1$, $n + 2$ dapat dibagi dengan 9.
6. Tunjukkan ketidaksamaan Bernoulli: Jika $1 + a > 0$, maka
   $$(1 + a)^n \geq 1 + na$$
   untuk semua $n \in \mathbb{N}$
7. Untuk semua $n \in \mathbb{N}$, buktikan ketidaksamaan di bawah ini dengan induksi matematika:
   a. $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2} \leq 2 - \dfrac{1}{n}.$

b. $\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$ untuk semua $n \geq 2$

c. $2n - 3 \leq 2^{n-2}$ untuk semua $n \geq 5$

d. $2^n < n!$ untuk semua $n \geq 4$

e. $n! > n^2$ untuk semua $n \geq 4$, sedangkan $n! > n^3$ untuk semua $n \geq 6$

8. Buktikan bahwa pangkat tiga dari sembarang bilangan bulat dapat ditulis sebagai selisih dari dua bilangan kuadrat.

Petunjuk: Perhatikan bahwa

$$n^3 = (1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3) - (1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3$$

Bab 1

TEORI KETERBAGIAN

God created the natural numbers, and all the rest is the work of man.

Leopold KRONECKER

Numbers are intelectual witnesses that belong only to mankind.

Honore De BALZAC

1.1 Pendahuluan

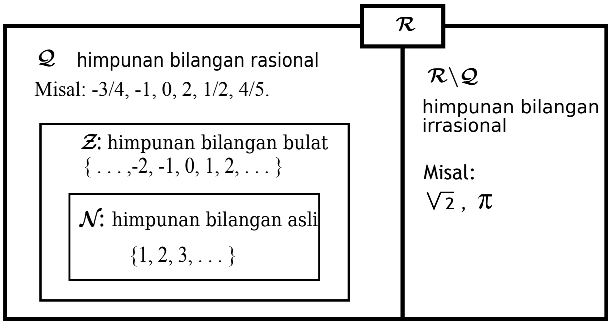
Bilangan 0 dan 1 adalah dua bilangan dasar yang digunakan dalam sistem bilangan real. Melalui dua operasi $+$ dan $\times$ maka bilangan-bilangan lainnya didefinisikan. Himpunan **bilangan asli** (*natural number*) $\mathbb{N}$ didefinisikan sebagai

$$n \in \mathbb{N} \leftrightarrow n := \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ suku}}.$$

Jadi himpunan bilangan asli dapat disajikan secara eksplisit $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$. Himpunan bilangan bulat (*integers*), dilambangkan dengan $\mathbb{Z}$ didefinisikan sebagai

$$\mathbb{Z} := -\mathbb{N} \cup \{0\}\mathbb{N}$$

dengan $-\mathbb{N} := \{-n : n \in \mathbb{N}\}$. Jadi himpunan bilangan bulat dapat ditulis secara eksplisit $\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$. Notasi $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ digunakan untuk menyatakan bilangan bulat taknegatif atau dikenal juga dengan **bilangan cacah** (*whole numbers*),



Gambar 1.1: Komposisi bilangan real

yaitu $\mathbb{Z}_{\geq 0} = \{0, 1, 2, \cdots\}$. Selanjutnya himpunan **bilangan rasional**, dilambangkan dengan $\mathbb{Q}$ didefinisikan sebagai

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, \, b \neq 0 \right\}.$$

Bilangan real yang bukan bilangan rasional disebut **bilangan irrasional**. Salah satu bilangan irrasional yang sangat dikenal adalah $\sqrt{2}$. Berdasarkan beberapa definisi tersebut maka kita dapat menyajikan komposisi himpunan bilangan real pada Gambar 1.1.

Teori bilangan adalah cabang ilmu matematika yang mempelajari sifat-sifat keterbagian bilangan bulat, khususnya himpunan bilangan asli. Himpunan bilangan asli memiliki keunikan tersendiri karena ia terdefinisi secara alami. Inilah barangkali alasan matematikawan Leopold Kronecker mengatakan bahwa *"God created the natural numbers, and all the rest is the work of man."* Artinya bilangan asli diciptakan oleh Tuhan, sedangkan jenis bilangan lainnya merupakan hasil karya manusia. Secara alami ciptaan Tuhan dikuantiti oleh bilangan asli, misalnya manusia mempunyai sebuah kepala, dua mata, dua tangan dengan masing-masing lima jari. Umumnya, tidak ada ciptaan Tuhan menggunakan bilangan pecahan, misalnya $1\frac{1}{3}$ pasang kaki, atau $\frac{1}{2}$ mata. Di pihak lain Honore De BALZAC mengatakan bahwa bilangan adalah saksi intelektual yang hanya dimiliki oleh umat manusia. Oleh karena itu, memahami sifat-sifat bilangan khususnya sifat keterbagian bilangan bulat adalah sangat diperlukan oleh kaum terpelajar terkhusus mahasiswa yang mendalami matematika.

1.2 Algoritma Pembagian

Sebelum kita membahas algoritma pembagian ada baiknya diperhatikan ilustrasi contoh berikut.

Contoh 1.1. Kita perhatikan pembagian sebuah bilangan bulat oleh bilangan bulat lain.

- ☛ Bila 9 dibagi oleh 4 maka hasilnya 2 dengan sisa 1. Fakta ini dapat ditulis $9 = 2 \times 4 + 1$.
- ☛ Bila -9 dibagi oleh 4 maka hasilnya -3 dengan sisa 3. Fakta ini dapat ditulis $-9 = -3 \times 4 + 3$.

Pada pembagian bilangan bulat tidak dibicarakan hasil bagi pecahan, misalnya 9 dibagi oleh 4 hasilnya adalah $2\frac{1}{4}$. Sisa pembagian tidak boleh negatif. Sisa selalu positif atau nol. Dalam kasus sisanya nol disebut habis dibagi dan akan dibahas lebih detail pada bagian berikutnya. Juga, sisa tidak boleh melebihi pembagi. Eksistensi dan ketunggalan hasil bagi dan sisa ini diungkapkan secara formal dalam teorema berikut.

Teorema 1.1. *Jika diberikan bilangan bulat a dan b, dengan $b > 0$ maka selalu terdapat dengan tunggal bilangan bulat q dan r yang memenuhi*

$$a = qb + r, \quad 0 \le r < b. \tag{1.1}$$

Contoh 1.2. Merujuk kepada contoh sebelmunya, bila $a = 9$ dan $b = 4$ maka diperoleh $9 = 2 \times 4 + 1$, jadi diperoleh $q = 2$ dan $r = 1$. Bila $a = -9$ dan $b = 4$ maka $-9 = -3 \times 4 + 3$, jadi diperoleh $q = -3$ dan $r = 3$.

Contoh 1.3. Diberikan $a = 12$ dan $b = 5$. Kita mempunyai beberapa representasi sebagai berikut

$$\begin{aligned} 12 &= 5 \times 2 + 2 \\ &= 5 \times 1 + 7 \\ &= 5 \times 3 + (-3). \end{aligned}$$

Ketiga representasi ini semuanya benar, tetapi hanya yang pertama memenuhi kondisi (1.1) karena disyaratkan $0 \le r < b$.

Pada persamaan (1.1) disepakati istilah sebagai berikut:

- a bilangan yang dibagi,
- b sebagai pembagi,
- q disebut **hasil bagi** dan
- r disebut **sisa** atau **residu**.

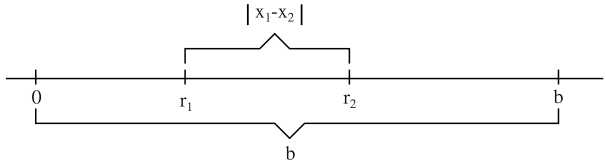
Bukti. Untuk membuktikan teorema ini digunakan prinsip urutan baik (*well-ordering principle*) atau WOP yang mengatakan bahwa setiap himpunan takkosong dari himpunan bilangan bulat taknegatif $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ selalu memuat anggota terkecil. Sebagai ilustrasi jika $A = \{1, 3, 5, 7, \cdots\}$ maka A himpuanan bagian takkosong dari $\mathbb{Z}_{\geq 0}$, dan anggota terkecilnya adalah 1. Kita bangun sebuah himpunan S dengan

$$S := \{a - nb \,|\, n \in \mathbb{Z} \,\mathrm{dan}\, a - nb \geq 0\} = \{a, a \pm b, a \pm 2b, \cdots\}.$$

Perhatikan bahwa himpunan S bergantung pada bilangan bulat a dan b. Untuk $a = 5$ dan $b = 3$, penyajian eksplisit himpunan ini adalah $S = \{5-3n : n \in \mathbb{Z}$ dan $5-3n \geq 0\} = \{2, 5, 8, 11, \cdots\}$, yaitu berkaitan dengan $n = 1, 0, -1, -2, \cdots$. Untuk $a = -4$ dan $b = 2$ maka $S = \{0, 2, 4, 6, \cdots\}$ (coba temukan n yang bersesuaian). Jelas himpunan S merupakan himpunan bagian dari $\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Sekarang dibuktikan S tidak kosong. Dengan mengambil $n := -|a| \in \mathbb{Z}$ maka diperoleh $t := a - (-|a|)(b) = a+|a|b \geq 0$ (coba berikan alasan mengapa ≥ 0), yaitu $t \in S$. Dengan demikian dapat dipastikan bahwa S himpunan bagian takkosong dari $\mathbb{Z}_{\geq 0}$, sehingga berdasarkan WOP himpunan S dipastikan memiliki anggota terkecil. Misalkan r anggota terkecil yang dimaksud maka ia mempunyai bentuk $r = a - qb \geq 0$ untuk suatu $q \in \mathbb{Z}$. Jadi $a = qb + r$ dengan $r \geq 0$. Selanjutnya dibuktikan $r < b$ agar persamaan (1.2) dipenuhi. Andaikan $r \geq b$. Ambil $r_1 \in S$ dengan $r_1 = a - (q + 1)b$. Ternyata $r_1 = a - (q + 1)b = (a - qb) - b = r - b < r$ (mengapa?). Fakta ini, yaitu $r_1 < r$ kontradiksi dengan pernyataan bahwa r anggota terkecil pada S. Terbuktilah $0 \leq r < b$. Selanjutnya, ditunjukkan bahwa q dan r ini tunggal. Andaikan ada q_1 dan r_1 yang bersifat seperti ini maka haruslah

$$a = qb + r = q_1 b + r_1, \;\; 0 \leq r, \, r_1 < b.$$

Keadaaan ini dapat ditulis sebagai $r-r_1 = (q_1-q)b$. Bila $q \neq q_1$ maka selisih jaraknya $|q - q_1| \geq 1$, sehingga $|r_1 - r| = |q - q_1|b \geq b$. Hal ini tidaklah mungkin karena kedua



Gambar 1.2: Ilustrasi garis bilangan ketaksamaan

r dan r_1 bilangan tak negatif yang terletak di kiri b. Perhatikan garis bilangan pada Gambar 1.2 untuk melihat fakta ini. Jadi disimpulkan $q = q_1$. Akibatnya diperoleh $r = r_1$. $\square$

Bila semua ruas pada persamaan (1.1) dibagi dengan b maka diperoleh

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}, \quad \text{dengan } 0 \leq \tfrac{r}{b} < 1.$$

Perhatikan bahwa $\frac{r}{b}$ bagian desimal dari pembagian $\frac{a}{b}$, sedangkan q adalah bagian bulatnya. Ini menujukkan bahwa $q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$ yaitu pembulatan ke bawah (*flooring*) dari $\frac{a}{b}$. Algoritma pembagian adalah algoritma untuk menentukan hasil bagi q dan sisa r dalam pembagian bilangan a oleh b. Algoritma ini dapat ditulis sebagai berikut:

Algoritma pembagian untuk pembagi positif

- ☛ Diberikan a bilangan bulat sebarang dan pembagi $b > 0$.
- ☛ Hitung hasil bagi q berdasarkan $q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$.
- ☛ Hitung sisa r dengan formula $r = a - qb$.

Contoh 1.4. Misalnya $a = -27$ dan $b = 12$ maka $q = \left\lfloor \frac{-27}{12} \right\rfloor = \left\lfloor -2\frac{1}{4} \right\rfloor = -3$ dan $r = a - qb = -27 - (-3)(12) = -27 + 36 = 9$.

Pada Teorema 1.1 disyaratkan bahwa $b > 0$. Sesungguhnya Teorema ini dapat diperluas juga untuk $b < 0$ seperti diungkapkan pada teorema berikut.

Teorema 1.2. *Jika diberikan bilangan bulat a dan b, dengan $b \neq 0$ maka selalu terdapat dengan tunggal bilangan bulat q dan r yang memenuhi*

$$a = qb + r, \quad 0 \leq r < |b|. \tag{1.2}$$

Bukti. Untuk $b > 0$ berlaku $|b| = b$ sehingga persamaan (1.1) otomatis dipenuhi oleh persamaan (1.2). Untuk $b < 0$, ambil $|b|$ sebagai pembagi pada Teorema 1.1.

Jadi terdapat q' dan r sehingga

$$a = q'|b| + r,\ 0 \le r < |b|.$$

Selanjutnya dengan mengambil $q = -q'$ dan karena $|b| = -b$ maka persamaan terakhir ini menjadi

$$a = q'|b| + r = -q(-b) + r = qb + r,\ 0 \le r < |b|.$$

Perhatikan untuk $b < 0$ berlaku $\frac{|b|}{b} = \frac{-b}{b} - 1$. Dengan membagi persamaan terakhir dengan b diperoleh

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b},\ -1 < \frac{r}{b} \le 0.$$

Perhatikan $\frac{r}{b}$ merupakan bagian desimal bernilai negatif, misalnya $\frac{r}{b} = -1/3$. Dengan demikian disimpulkan $q = \left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil$ yaitu pembulatan ke atas atau *ceiling* dari $\frac{a}{b}$. □

Algoritma pembagian untuk pembagi negatif

- ☛ Diberikan a bilangan bulat sebarang dan pembagi $b < 0$.
- ☛ Hitung hasil bagi q berdasarkan $q = \left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil$.
- ☛ Hitung sisa r dengan formula $r = a - qb$.

Contoh 1.5. Tentukan hasil bagi dan sisanya jika 1, -2, 61 dan -59 dibagi oleh -7.

Penyelesaian. Diketahui $b = -7 < 0$. Untuk $a = 1$ diperoleh $q = \left\lceil \frac{1}{-7} \right\rceil = 0$ dan $r = a - qb = 1 - 0 = 1$. Periksa bahwa $1 = (0)(-7) + 1$. Untuk $a = -2$ diperoleh $q = \left\lceil \frac{-2}{-7} \right\rceil = \left\lceil \frac{2}{7} \right\rceil = 1$ dan $r = -2 - (1)(-7) = 5$. Periksa bahwa $-2 = (1)(-7) + 5$. Untuk $a = 61$ diperoleh $q = \left\lceil \frac{61}{-7} \right\rceil = \left\lceil -8\frac{6}{7} \right\rceil = -8$ dan $r = 61 - (-8)(-7) = 5$. Periksa bahwa $61 = (-8)(-7) + 5$. Untuk $a = -59$ diperoleh $q = \left\lceil \frac{-59}{-7} \right\rceil = \left\lceil 8\frac{1}{7} \right\rceil = 9$ dan $r = -59 - (9)(-7) = 4$. Periksa bahwa $-59 = (9)(-7) + 4$. □

Dari penjelasan di atas disimpulkan bahwa pembagi b hanya dibatasi pada bilangan tidak nol. Ini berarti pembagian dengan bilangan nol tidak pernah didefinisikan. Tegasnya, $\frac{a}{0}$ tidak terdefinisi untuk setiap a.
Berikut diberikan beberapa contoh soal pembuktian sebagai penerapan langsung dari algoritma pembagian.

Contoh 1.6. Untuk setiap bilangan bulat a, buktikan $a(a^2 + 2)/3$ merupakan bilangan bulat.

Bukti. Ambil $b = 3$ sebagai pembagi dan a suatu bilangan yang dibagi. Dengan algoritma pembagian maka terdapat q dan r sehingga $a = 3q+r$, dengan sisa $r = 0, 1$ atau 2. Untuk $r = 0$, substitusi $a = 3q$ ke dalam $a(a^2+2)/3$ diperoleh $3q(9q^2+2)/3 = q(9q^2 + 2)$ yang merupakan bilangan bulat. Untuk $r = 1$, substitusi $a = 3q + 1$ ke dalam $a(a^2+2)/3$ diperoleh$(3q+1)(9q^2+6q+1+2)/3 = (3q+1)3(3q^2+2q+1)/3 = (3q + 1)(3q^2 + 2q + 1)$ yang merupakan bilangan bulat. Untuk $r = 2$, substitusi $a = 3q + 2$ ke dalam $a(a^2 + 2)/3$ diperoleh $(3q + 2)(9q^2 + 12q + 4 + 2)/3 = (3q + 2)3(3q^2+4q+2)/3 = (3q+2)(3q^2+4q+2)$ yang juga merupakan bilangan bulat. □

Untuk lebih meyakinkan, coba periksa untuk beberapa nilai $a = -1, 0, 1, 2, 3$.

Contoh 1.7. Buktikan sebarang bilangan kuadrat bila dibagi 4 selalu memberikan sisa 0 atau 1.

Bukti. Untuk bilangan bulat sebarang a, ambil $b = 4$ sebagai pembagi. Maka terdapat q dan r sehingga $a = 4q + r$ dengan $r = 0, 1, 2, 3$. Selanjutnya kita melihat bentuk $n := a^2$. Untuk $r = 0$ diperoleh $n = 4(4q^2)$ memberikan sisa 0. Untuk $r = 1$ diperoleh $n = 16q^2 + 8q + 1 = 4(4q^2 + 2q) + 1$ memberikan sisa 1. Untuk $r = 2$ diperoleh $n = 16q^2 + 16q + 4 = 4(4q^2 + 4q + 4)$ memberikan sisa 0. Terakhir, untuk $r = 3$ diperoleh $n = 16q^2 + 24q + 9 = 4(4q^2 + 6q + 2) + 1$ memberikan sisa 1. Jadi semua kasus memberikan sisa 0 atau 1. □

Coba cek sisanya jika beberapa bilangan kuadrat $1, 4, 9, 16, 25$ dibagi oleh 4!

Dengan menggunakan hasil ini kita dapat memahami contoh soal berikut.

Contoh 1.8. Tunjukkan bahwa bilangan yang berbentuk

$$11, 111, 1111, 11111, \cdots$$

tidak pernah merupakan kuadrat sempurna.

Bukti. Perhatikan pola berikut.

$$\begin{aligned} 11 &= 8 + 3 \\ 111 &= 108 + 3 \\ 1111 &= 1108 + 3 \\ 11111 &= 11108 + 3 \\ &\cdots \end{aligned}$$

Jadi dapat ditulis $1111\cdots111 = 1111\cdots08+3$. Karena bilangan $1111\cdots08$ selalu habis dibagi 4 maka sesungguhnya bilangan tersebut mempunyai bentuk $4k+3$. Dengan kata lain mereka selalu memberikan sisa 3 jika dibagi 4. Padahal bilangan kuadrat selalu memberikan sisa 0 atau 1 jika dibagi 4 sebagaimana terjelaskan pada contoh sbeelumnya. Karena itu bilangan dengan pola tersebut tidak mungkin merupakan bilangan kuadrat. □

Contoh 1.9. Buktikan bahwa kuadrat bilangan ganjil selalu berbentuk $8k+1$.

Sebagai ilustrasi, $3^2 = 9 = 8(2)+1$, $5^2 = 25 = 8(3)+1$, dan seterusnya.

Bukti. Gunakan pembagi $b = 4$ pada algoritma pembagian. Maka setiap bilangan bulat dapat disajikan dalam salah satu bentuk $4k$, $4k+1$, $4k+2$, atau $4k+3$. Diperhatikan hanya bentuk $4k+1$ dan $4k+3$ berupa bilangan ganjil. Untuk $4k+1$ diperoleh $(4k+1)^2 = 16k^2+8k+1 = 8(2k^2+k)+1 = 8k_1+1$, yaitu dengan mengambil $k_1 := 2k^2+k$. Untuk $4k+3$ akan diperoleh $(4k+3)^3 = 8k_2+1$. Silakan menemukan k_2 sendiri. □

Latihan 1.2.1. Terapkan algoritma pembagian untuk menjawab pertanyaan berikut.

1. Tentukan hasil bagi dan sisanya jika $a = -106$ dibagi oleh $b = 23$.
2. Tentukan hasil bagi dan sisanya jika $a = 230$ dibagi oleh $b = -17$.
3. Tentukan hasil bagi dan sisanya jika $a = -167$ dibagi oleh $b = -8$.

Latihan 1.2.2. Bila diberikan bilangan a dan pembaginya b maka hasil bagi q dan sisa r dapat ditemukan. Sebaliknya, apakah kita selalu dapat menemukan bilangan a dan pembaginya b jika hasil bagi q dan sisanya diketahui. Berikan contoh untuk menjelaskan jawaban Anda.

Latihan 1.2.3. Tunjukkan bahwa bilangan kubik (bilangan pangkat tiga) selalu berbentuk $7k$ atau $7k \pm 1$.

Latihan 1.2.4. Buktikan bahwa jika n ganjil maka n^4+4n^2+11 berbentuk $16k$.

Latihan 1.2.5. Untuk setiap $n \geq 1$ bulat, buktikan bilangan $n(n+1)(2n+1)/6$ juga merupakan bilangan bulat.

1.3 Faktor Persekutuan Terbesar

Suatu keadan khusus pada algoritma pembagian $a = qb + r$ adalah ketika sisa $r = 0$. Dalam kasus ini kita katakan a habis membagi b.

Definisi 1.1. Sebuah bilangan bulat b dikatakan **terbagi** atau **habis dibagi** oleh bilangan bulat $a \neq 0$ jika terdapat bilangan bulat c sehingga $b = ac$, ditulis $a|b$. Notasi $a \nmid b$ digunakan untuk menyatakan b tidak habis terbagi oleh a.

Jadi 12 terbagi oleh 4 sebab $12 = 4 \cdot 3$, tetapi 10 tidak terbagi oleh 3 sebab tidak ada bilangan bulat c sehingga $10 = 3c$, atau setiap bilangan bulat c berlaku $10 \neq 3c$. Dalam kasus ini ditulis $4|12$ dan $3 \nmid 10$.

Istilah lain untuk $a|b$ adalah a **faktor** dari b, a **pembagi** b atau b **kelipatan** dari a.

Bila a pembagi b maka $-a$ juga pembagi b, sehingga pembagi suatu bilangan selalu terjadi berpasangan. Jadi dalam menentukan semua faktor dari suatu bilangan bulat cukup ditentukan faktor-faktor positifnya saja, kemudian tinggal menggabungkan faktor negatifnya. Fakta sederhana yang diturunkan langsung dari definisi adalah sebagai berikut:

$$a|0, 1|a, \text{ dan } a|a.$$

Fakta $a|0$ dapat dijelaskan bahwa bilangan 0 selalu habis dibagi oleh bilangan apa pun yang tidak nol dengan hasil baginya a. Fakta $1|a$ mengatakan bahwa 1 merupakan faktor atau pembagi dari bilangan apapun termasuk bilangan 0. Fakta $a|a$ menyatakan bahwa bilangan tidak nol selalu habis membagi dirinya sendiri dengan hasil baginya adalah 1.

Teorema 1.3. *Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$ berlaku pernyataan berikut (bilangan pembagi disyaratkan tidak nol).*

1. *$a|1$ bila hanya bila $a = \pm 1$.*
2. *Jika $a|b$ dan $c|d$ maka $ac|bd$.*
3. *Jika $a|b$ dan $b|c$ maka $a|c$.*
4. *$a|b$ dan $b|a$ bila hanya bila $a = \pm b$.*
5. *Bila $a|b$ dan $b \neq 0$ maka $|a| < |b|$.*
6. *Bila $a|b$ dan $a|c$ maka $a|(bx + cy)$ untuk sebarang bilangan bulat x dan y.*

Bukti. 1) $(\rightarrow)$: $a = \pm 1 \rightarrow a|1$ jelas, sesuai penjelasan sebelumnya. $(\leftarrow)$: Sebaliknya, diketahui $a|1$ berarti ada $k \in \mathbb{Z}$ sehinga $1 = ka$. Persamaan ini hanya dipenuhi oleh dua kemungkinan berikut: $k = 1, a = 1$ atau $k = -1, a = -1$. Jadi berlaku $a|1 \rightarrow a = \pm 1$. Jadi $a|1 \leftrightarrow a = \pm 1$ terbukti.
2) Diketahui $a|b$ dan $c|d$ yaitu ada $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ sehingga $b = k_1 a$ dan $d = k_2 c$. Kedua persamaan ini dikalikan diperoleh

$$bd = (k_1 k_2)ac = kac, \text{ dengan } k := k_1 k_2 \in \mathbb{Z},$$

yaitu $ac|bd$.
3) Diketahui $a|b$ dan $b|c$ yaitu ada $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ sehingga $b = k_1 a$ dan $c = k_2 b$. Substitusi, diperoleh $c = k_2 b = k_2(k_1 a) = (k_1 k_2)a$, yaitu $a|c$.
4) $(\rightarrow)$: Diketahui $a = k_1 b$ dan $b = k_2 a$. Kedua persamaan dikalikan, diperoleh $ab = (k_1 k_2)(ab)$. Diperoleh $k_1 k_2 = 1$, yakni $k_1 = k_2 = 1$ atau $k_1 = k_2 = -1$. Terbukti $a = \pm b$. $(\rightarrow)$: Sebaliknya jika $a = \pm b$ maka jelas $a|b$ (bilangan tidak nol selalu membagi dirinya sendiri).
5) Oleh karena $a|b$ maka kita mempunyai $b = ac$ untuk suatu $c \in \mathbb{Z}$. Diambil nilai mutlaknya $|b| = |ac| = |a||c|$. Karena $b \neq 0$ maka $|c| \geq 1$, sebab bila tidak seperti ini maka $|c| = 0$ yang mengakibatkan $b = 0$ (kontradiksi). Karena itu diperoleh $|b| = |a||c| \geq |a|$.
6) Kita mempunyai relasi $b = k_1 a$ dan $c = k_2 a$. Untuk sebarang $x, y \in \mathbb{Z}$ berlaku

$$bx + cy = k_1 ax + k_2 ay = (k_1 x + k_2 y)a$$

yang berarti $a|(bx + cy)$. $\square$

Pernyataan terakhir teorema ini berlaku juga untuk berhingga banyak bilangan yang dibagi oleh a, yaitu jika $a|b_k, k = 1, \cdots, n$ maka

$$a|(b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_n x_n)$$

untuk sebarang bilangan bulat $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Selanjutnya kita bahas pengertian faktor persekutuan terbesar.

Definisi 1.2. Misalkan a dan b dua bilangan bulat dengan minimal salah satunya tidak nol. **Faktor persekutuan terbesar** (FPB) atau *greatest common divisor* (gcd) dari a dan b adalah bilangan bulat d yang memenuhi

1. $d|a$ dan $d|b$

2. Jika $c|a$ dan $c|b$ maka $c \leq d$

Pada definisi ini, kondisi 1 menyatakan bahwa d adalah faktor persekutuan dan kondisi 2 menyatakan bahwa d adalah faktor persekutuan terkecil di antara semua faktor persekutuan yang ada. Selanjutnya jika d faktor persekutuan terbesar dari a dan b akan ditulis

$$d = \gcd(a, b), \text{ atau } d = FPB(a, b).$$

Berdasarkan definisi FPB sesungguhnya kita cukup mengasumsikan bahwa a dan b positif, sebab berlaku

$$\gcd(a, b) = \gcd(a, -b) = \gcd(-a, b) = \gcd(-a, -b).$$

Penjelasannya, faktor atau pembagi suatu bilangan selalu terjadi secara berpasangan, satunya positif dan lainnya negatif. Jadi faktor persekutuan dua bilangan selalu sama tanpa melihat tanda positif atau negatif kedua bilangan tersebut. Akibatnya, faktor persekutuan terbesarnya juga sama. Jadi, walaupun faktor sebuah bilangan selalu terjadi secara berpasangan positif dan negatif, namun cukup diperhatikan faktor positifnya saja untuk menentukan faktor persekutuan terbesarnya.

Contoh 1.10. Faktor positif dari 12 adalah $1, 2, 3, 4, 6, 12$, sedangkan faktor positif dari 30 adalah $1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$. Jadi faktor persekutuaannya adalah $1, 2, 3, 6$. Karena itu disimpulkan $\gcd(12, 30) = 6$.

Identitas Bezout

Teorema 1.4. *Jika a dan b dua bilangan bulat yang keduanya taknol maka terdapat bilangan bulat x dan y sehingga*

$$\gcd(a, b) = ax + by. \tag{1.3}$$

Persamaan (1.3) disebut dengan **identitas Bezout**. Sebelum dibuktikan, perhatikan ilustrasi berikut

$$\begin{aligned} \gcd(-12, 30) &= 6 = (-12)2 + 30 \cdot 1, \text{ di sini } a = -12, b = 30, x = 2, y = 1. \\ \gcd(-8, -36) &= 4 = (-8)4 + (-36)(-1), \text{ di sini } a = -8, b = -36, x = -8, y = -1. \end{aligned}$$

Identitas Bezout menyatakan bahwa $d = \gcd(a, b)$ dapat disajikan dalam bentuk kombinasi linier atas a dan b. Ekspresi ruas kanan pada (1.3) disebut kombinasi linier dari a dan b. Pada Teorema ini keberadaan x dan y tidak harus tunggal.

Bukti. Bentuk S himpunan semua kombinasi linier taknegatif dari a dan b sebagai berikut.

$$S = \{\, au + bv \mid au + bv \geq 0, u, v \in \mathbb{Z}\,\}.$$

Dari kedua a dan b, minimal salah satunya tidak nol, misalkan $a \neq 0$. Ada dua kemungkinan untuk a, yaitu a positif atau a negatif. Untuk a positif, ambil $u = 1$ dan $v = 0$ sehingga $t := au + bv = a > 0$, yaitu $t \in S$. Bila a negatif, ambil $u = -1$ dan $v = 0$ sehingga $w := au + vb = -a > 0$, yaitu $w \in S$. Jadi himpunan S takkosong. Menurut sifat urutan baik, S terjamin memiliki anggota terkecil katakan saja d. Selanjutnya, dibuktikan $d = \gcd(a, b)$. Karena $d \in S$ maka terdapat $x, y \in \mathbb{Z}$ sehingga $d = ax + by$. Terapkan algoritma pembagian pada a dan d maka terdapat q dan r sehingga $a = qd + r$, $0 \leq r < d$. Selanjutnya ditunjukkan $r = 0$. Bila ini benar maka $d|a$. Andai $r > 0$ maka dapat ditulis

$$0 \;<\; r = a - qd = a - q(ax + by) = a(1 - qx) + b(-qy) \in S.$$

Fakta $r \in S$ dan syarat $r < d$ bertentangan dengan pernyataan bahwa d elemen terkecil S sehingga pengandaian $r > 0$ adalah salah. Disimpulkan $r = 0$ atau $d|a$. Argumen yang sama dapat dipakai dengan menerapkan algoritma pembagian pada b dan d untuk menunjukkan bahwa $d|b$. Dengan demikian terbukti bahwa d adalah faktor persekutuan dari a dan b. Selanjutnya ditunjukkan faktor persekutuan ini adalah yang terbesar. Misalkan c bulat positif dengan $c|a$ dan $c|b$, maka berdasarkan Teorema 1.3(6) berlaku $c|ax + b$ yaitu $c|d$. Oleh karena tidak mungkin pembagi lebih besar dari bilangan yang dibagi maka haruslah $c \leq d$. Terbukti bahwa $d = \gcd(a, b)$. □

Akibat 1.1. *Bila a dan b dua bilangan bulat yang keduanya tidak nol maka himpunan*

$$T = \{ax + by | x, y \in \mathbb{Z}\}$$

merupakan himpunan semua kelipatan dari $d = \gcd(a, b)$. Jelasnya, jika $W = \{nd \mid n \in \mathbb{Z}\}$ maka berlaku $T = W$.

Bukti. Karena $d|a$ dan $d|b$ maka $d|(ax + by)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}$. Ini berarti setiap elemen T merupakan kelipatan d. Sebaliknya dibuktikan setiap kelipatan d

adalah anggota T. Oleh karena $d = \gcd(a, b)$ maka berdasarkan identitas Bezout dapat ditulis $d = ax_0 + by_0$ untuk suatu $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$. Perhatikan kelipatan dari d, yaitu

$$nd = n(ax_0 + by_0) = a(nx_0) + b(ay_0) \in T.$$

Ini berarti setiap kelipatan d merupakan elemen T. $\square$

Selanjutnya diperkenalkan hubungan dua bilangan yang saling prima atau prima relatif.

Definisi 1.3. Dua bilangan a dan b (keduanya tidak nol) dikatakan **prima relatif** jika $\gcd(a, b) = 1$. Dengan kata lain, dua bilangan dikatakan prima relatif jika mereka tidak mempunyai faktor persekutuan selain dari 1.

Pasangan bilangan $(3, 5), (5, -9)$ dan $(-27, -35)$ adalah beberapa contoh pasangan bilangan prima relatif. Ingat prima relatif bukanlah bilangan prima. Bila keduanya prima maka pasti prima relatif. Sebagai contoh 3 dan 5. Ada kemungkinan keduanya tidak prima, tetapi prima relatif, misalnya 4 dan 21.

Teorema 1.5. *Bilangan a dan b prima relatif bila hanya bila terdapat bulat x, y sehingga $ax + by = 1$.*

Bukti. $(\rightarrow)$: Karena a dan b prima relatif maka $\gcd(a, b) = 1$. Identitas Bezout menjamin adanya bulat x, y sehingga $1 = ax + by$. $(\leftarrow)$: Sebaliknya, misalkan ada bilangan bulat x dan y sehingga $ax + by = 1$. Dibuktikan $\gcd(a, b) = d = 1$. Karena $d|a$ dan $d|b$ maka $d|(ax + by = 1)$, jadi $d|1$. Karena itu disimpulkan $d = 1$. $\square$

Akibat 1.2. *Bila $d = \gcd(a, b)$ maka $\gcd\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$.*

Bukti. Berdasarkan identitas Bezout selalu ada x dan y sehingga $ax + by = d$. Dengan membagi kedua ruas persamaan ini dengan d diperoleh $\left(\frac{a}{d}\right) x + \left(\frac{b}{d}\right) y = 1$. Menurut teorema sebelumnya disimpulkan $\frac{a}{d}$ dan $\frac{b}{d}$ prima relatif. $\square$

Pada penyederhanaan pecahan $\frac{a}{b}$ biasanya dilakukan dengan membagi kedua bilangan a dan b dengan FPBnya. Misalnya $\frac{8}{12}$ disederhanakan menjadi $\frac{2}{3}$. Dalam hal ini kita mempunyai $\gcd(8, 12) = 4 \rightarrow \gcd(2, 3) = 1$. Menyederhanakan pecahan berarti menyederhanakan keduanya (pembilang dan penyebut) sampai dalam bentuk prima relatif.

Teorema berikut memberikan sifat keterbagian yang melibatkan dua bilangan prima relatif.

Teorema 1.6. *Diketahui* $\gcd(a, b) = 1$. *Maka berlaku pernyataan berikut.*

1. *Jika* $a|c$ *dan* $b|c$ *maka* $ab|c$.
2. *Jika* $a|bc$ *maka* $a|c$.

Bukti. 1) Diketahui $a|c$ dan $b|c$, maka terdapat bilangan bulat r dan s sehingga $c = ar = bs$. Karena diketahui $\gcd(a, b) = 1$ maka dapat ditulis $1 = ax + by$ untuk suatu bilangan bulat x, y. Diperoleh

$$c = c \cdot 1 = c(ax + by) = acx + bcy = a(bs)x + b(ar)y = ab(sx + ry),$$

yaitu $ab|c$.
2) Kita dapat menulis

$$c = c \cdot 1 = c(ax + by) = acx + bcy.$$

Karena faktanya $a|ac$ dan diketahui $a|bc$ maka $a|(acx + bcy) = (ax + by)c$, yaitu terbukti $a|c$. □

Pernyataan pada Teorema 1.6 (2) biasanya dikenal sebagai Lemma Euclid.

Contoh 1.11. Untuk sebarang bilangan bulat a, buktikan salah satu dari a, $a + 2$, $a + 4$ habis dibagi oleh 3.

Bukti. Cara pertama dengan menggunakan algoritma pembagian. Ambil a sebagai bilangan yang dibagi dan 3 sebagai pembagi, maka ada q dan r sehingga $a = 3q + r$, $r = 0, 1, 2$. Bila $r = 0$ maka $a = 3q$ yaitu $a|3$. Bila $r = 1$ maka

$$\begin{aligned} a &= 3q + 1 \\ a + 2 &= 3q + 1 + 2 = 3(q + 1), \end{aligned}$$

yaitu $3|(a + 2)$. Bila $r = 2$ maka

$$\begin{aligned} a &= 3q + 2 \\ a + 4 &= 3q + 2 + 4 = 3(q + 2), \end{aligned}$$

yaitu $3|(a + 4)$. □

Perhatikan pada contoh berikut ditunjukkan bahwa perkalian dua bilangan bulat berurutan selalu habis dibagi 2.

Contoh 1.12. Untuk setiap bilangan bulat a, buktikan $2|a(a+1)$.

Bukti. Masih menggunakan algoritma pembagian dengan mengambil $b = 2$ sebagai pembagi. Terdapat $q \in \mathbb{Z}$ sehingga $a = 2q + r$ dimana $r = 0, 1$. Untuk $r = 0$ jelas $a = 2q$ habis dibagi 2 sehingga $a(a+1)$ juga habis dibagi 2. Untuk $k = 1$, $a(a+1) = (2q+1)(2q+2) = (2q+1)(q+1)2$ jelas habis dibagi 2. Cara lain pembuktian dapat dengan memberikan argumen logis berikut: salah satu diantara bilangan bulat a dan $a+1$ pasti ada bilangan genap. Jadi $2|a$ atau $2|(a+1)$. Berdasarkan fakta ini maka dapat disimpulkan bahwa $2|a(a+1)$. $\square$

Dengan argumen yang mirip, pembaca dapat mencoba buktikan kebenaran pernyataan $a|a(a+1)(a+2)$.

Contoh 1.13. Buktikan bahwa untuk setiap bulat positif n dan sebarang bilangan bulat a maka $\gcd(a, n+a)|n$.

Bukti. Misalkan $d = \gcd(a, a+n)$. Karena $d|a$ dan $d|(a+n)$ maka d membagi setiap kombinasi linear kedua bilangan ini, khususnya $d|\left((a)(-1) + (a+n)(1)\right) = n$. $\square$

Berdasarkan contoh ini secara khusus untuk $n = 1$ kita memperoleh $\gcd(a, a+1) = 1$. Dengan kata lain dua bilangan bulat berurutan selalu prima relatif.

Latihan 1.3.1. Buktikan kebenaran pernyataan berikut! Jika tidak benar, berikan contoh pengingkarnya.

1. $a|b \longleftrightarrow ac|bc$ dengan $c \neq 0$.
2. $a|b$ dan $c|d \longrightarrow ac|bd$.
3. $a|bc \rightarrow a|b$ atau $a|c$.

Latihan 1.3.2. Selidikilah apakah pernyataan berikut benar: $a|(b+c) \longrightarrow a|b$ atau $a|c$. Bila benar, buktikan!. Sebaliknya, bila tidak benar, berikan contoh pengingkarnya.

Latihan 1.3.3. Buktikan dengan induksi matematika kebenaran pernyataan berikut!

1. $8|5^{2n} + 7$.

2. $5|3^{3n+1} + 2^{n+1}$.

Latihan 1.3.4. Diberikan dua bilangan bulat a dan b berikut ini. Temukan bilangan bulat x dan y agar identitas Bezout dipenuhi, yaitu $d = ax+by$ dengan $d = \gcd(a,b)$.

1. $a = 12, b = 30$.
2. $a = 91, b = 56$.
3. $a = 27, b = 34$.

Latihan 1.3.5. Buktikan bahwa $\gcd(a,b) = \gcd(-a,b) = \gcd(a,-b) = \gcd(-a,-b)$.

Latihan 1.3.6. Buktikan bahwa jika a ganjil maka $3a$ dan $3a+2$ prima relatif. Apakah kesimpulan Anda jika a genap?

1.4 Algoritma Euclid

Algoritma Euclid merupakan metoda yang dapat digunakan untuk menentukan FPB dua bilangan besar dengan cara mereduksinya menjadi bilangan-bilangan lebih kecil. Algoritma ini bertumpu pada teorema berikut.

Teorema 1.7. *Jika* $a = qb + r$ *maka* $\gcd(a,b) = \gcd(b,r)$.

Bukti. Definisikan $F(a,b)$ himpunan semua faktor persekutuan dari a dan b, $F(b,r)$ himpunan semua faktor persekutuan dari b dan r. Misalkan $d \in F(b,r)$ maka d faktor dari b dan berdasarkan Teorema 1.3(6), d juga faktor dari $a = qb + r$. Jadi, $d \in F(a,b)$, yaitu $F(b,r) \subset F(a,b)$. Misalkan $t \in F(a,b)$ maka t faktor dari b dan berdasarkan Teorema 1.3(6), t juga faktor dari $r = a - qb$. Jadi, $t \in F(b,r)$, yaitu $F(a,b) \subset F(b,r)$. Oleh karena itu diperoleh $F(b,r) = F(a,b)$, yaitu pasangan bilangan a, b dan b, r memiliki faktor persekutuan yang sama sehingga mereka mempunyai FPB yang sama. □

Algoritma Euclid dapat disajikan sebagai berikut:

Misalkan a dan b dua bilangan yang akan ditentukan FPB nya. Cukup diasumsikan $a \geq b > 0$, karena tanda positif atau negatif bilangan a dan b tidak mempengaruhi nilai FPB nya. Dengan algoritma pembagian, diperoleh q_1 dan r_1 sehingga

$$a = q_1 b + r_1,\ 0 \leq r_1 < b.$$

Bila $r_1 = 0$ maka $\gcd(a, b) = b$, pekerjaan selesai. Bila $r_1 \neq 0$, bagilah b dengan r_1 untuk memperoleh q_2 dan r_2 yang memenuhi

$$b = q_2 r_1 + r_2,\ 0 \leq r_2 < r_1.$$

Bila $r_2 = 0$ maka $\gcd(a, b) = r_1$, pekerjaan selesai. Bila $r_2 \neq 0$, bagilah r_1 dengan r_2 untuk memperoleh q_3 dan r_3 yang memenuhi

$$r_1 = q_3 r_2 + r_3,\ 0 \leq r_3 < r_2.$$

Proses ini diteruskan sampai dicapai sisa nol. Bila dirangkum maka akan diperoleh bentuk berikut

$$\begin{aligned}
a &= q_1 b + r_1,\ 0 < r_1 < b \\
b &= q_2 r_1 + r_2,\ 0 < r_2 < r_1 \\
r_1 &= q_3 r_2 + r_3,\ 0 < r_3 < r_2 \\
&\vdots \\
r_{n-2} &= q_n r_{n-1} + r_n,\ 0 < r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} &= q_{n+1} r_n + 0.
\end{aligned}$$

Berdasarkan Teorema 1.7 sebelumnya maka diperoleh tahapan berikut.

$$\gcd(a, b) = \gcd(b, r_1) = \gcd(r_1, r_2) = \cdots = \gcd(r_{n-1}, r_n) = \gcd(r_n, 0) = r_n.$$

Contoh 1.14. Hitunglah FPB dari 1492 dan 1066.

Penyelesaian. Terapkan algoritma Euclid seperti dijelaskan sebelumnya dengan mengambil $a = 1492$ dan $b = 1066$, yaitu

$$\begin{aligned}
1492 &= 1 \cdot 1066 + 426 \\
1066 &= 2 \cdot 426 + 214 \\
426 &= 1 \cdot 214 + 212 \\
214 &= 1 \cdot 212 + 2 \\
212 &= 106 \cdot 2 + 0.
\end{aligned}$$

Sisa taknol yang terakhir adalah 2 sehingga $d = \gcd(1492, 1066) = 2$. $\square$

Amati proses reduksi pada algoritma Euclid membutuhkan cukup banyak langkah. Pada Teorema 1.7 tidak disyaratkan $0 \leq r < b$ sehingga kita dapat menemukan FPB lebih efisien jika kita dapat menemukan representasi seperti pada teorema ini.

Contoh 1.15. Temukan FPB dari 12378 dan 3054.

Penyelesaian. Pertama kita gunakan algoritma Euclid sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
12378 &= 4 \cdot 3054 + 162 \\
3054 &= 18 \cdot 162 + 138 \\
162 &= 1 \cdot 138 + 24 \\
138 &= 5 \cdot 24 + 18 \\
24 &= 1 \cdot 18 + 6 \\
18 &= 3 \cdot 6 + 0.
\end{aligned}$$

Jadi, gcd(12378,3054)=6. Ternyata dibutuhkan 6 langkah. Selanjutnya, kita lakukan reduksi berikut tanpa mengikuti algoritma Euclid.

$$\begin{aligned}
12378 &= 4 \cdot 3054 + 162 \\
3054 &= 19 \cdot 162 - 24 \\
162 &= 7 \cdot 24 - 6 \\
24 &= (-4) \cdot (-6) + 0.
\end{aligned}$$

Diperoleh, $\gcd(12378, 3054) = \gcd(24, -6) = 6$. Untuk cara kedua ini hanya dibutuhkan 4 langkah. $\square$

Latihan 1.4.1. Temukan $d = \gcd(a, b)$ untuk pasangan bilangan berikut. Kemudian temukan bilangan bulat x dan y sehingga dipenuhi $d = ax + by$.

1. $a = 153$ dan $b = 232$.
2. $a = 306$ dan $b = 464$. Adakah terlihat hubungan antara $\gcd(306, 464)$ dan $\gcd(153, 232)$.
3. $a = 544$ dan $b = 1479$.

Latihan 1.4.2. Buktikan jika k bilangan bulat maka berlaku $\gcd(ka, kb) = k\gcd(a, b)$. Ini adalah sifat perkalian skalar kelipatan persekutuan terbesar.

Latihan 1.4.3. Misalkan a dan b dua bilangan bulat yang prima relatif. Definisikan $x := a+b, y := a-b$. Buktikan $\gcd(x, y) = 1$ atau 2. Berikan contoh untuk masing-masing kemungkinan tersebut.

Latihan 1.4.4. Jika a dan b prima relatif, apakah a^n dan b^n $(n \geq 1)$ juga prima relatif. Buktikan!

Latihan 1.4.5. Jika a dan b prima relatif, buktikan $a+b$ dan ab juga prima relatif.

Latihan 1.4.6. Misalkan $a = 198, b = 288, c = 512$. Tentukan $d = \gcd(a, b, c)$. Kemudian, temukan bilangan bulat $x, y,$ dan z sehingga $d = ax + by + cz$.

1.5 Kelipatan Persekutuan Terkecil

Definisi 1.4. Misalkan a dan b dua bilangan bulat tidak nol. Kelipatan persekutuan terkecil (KPK) atau *least common divisor* (lcm) dari a dan b adalah bilangan bulat positif m yang memenuhi

1. $a|m$ dan $b|m$
2. Bila ada $c > 0$ dengan $a|c$ dan $b|c$ maka $m \leq c$.

Kondisi 1 menyatakan bahwa m adalah kelipatan bersama atau persekutuan dari a dan b. Kondisi 2 menyatakan bahwa m adalah kelipatan persekutan terkecil di antara semua kelipatan persekutuan yang ada. Selanjutnya, m adalah KPK dari a dan b akan ditulis

$$m = \operatorname{lcm}(a, b).$$

Sebagai contoh kelipatan persekutuan dari 12 dan 30 adalah $60, 120, 180, \ldots$ sehingga $\operatorname{lcm}(12, 30) = 60$.

Berikut diberikan hubungan antara FPB dan KPK.

Teorema 1.8. *Untuk dua bilangan positif a dan b berlaku* $\operatorname{lcm}(a, b) = \frac{ab}{\gcd(a,b)}$.

Bukti. Ambil $d = \gcd(a, b)$ maka dapat ditulis $a = dr$ dan $b = ds$ untuk suatu bilangan bulat r dan s. Perhatikan fakta berikut.

$$m = \frac{ab}{d} \to m = \frac{a(ds)}{d} = as \,\text{dan}\, m = \frac{(dr)b}{d} = rb,$$

yakni m kelipatan persekutuan dari a dan b. Selanjutnya ditunjukkan m ini adalah kelipatan persekutuan yang paling kecil. Misalkan c kelipatan persekutuan lainnya dari a dan b. Dapat ditulis $c = au$ dan $c = bv$ untuk suatu bilangan bulat u dan v. Dengan identitas Bezout terdapat bulat x dan y yang memenuhi $d = ax + by$. Substitusi $m = \frac{ab}{d}$ pada $\frac{c}{m}$, diperoleh

$$\frac{c}{m} = \frac{cd}{ab} = \frac{c(ax+by)}{ab} = \left(\frac{c}{b}\right)x + \left(\frac{c}{a}\right)y = vx + uy \in \mathbb{Z},$$

yang berarti $m|c$. Jadi haruslah $m \leq c$. Jadi, $m = \text{lcm}(a, b)$. □

Akibat berikut ini memberikan keadaan yang mana kelipatan persekutuan terkecil dua bilangan tidak lain adalah hasil kali keduanya.

Akibat 1.3. *Untuk setiap pasangan bilangan bulat a dan b berlaku lcm$(a, b) = ab$ bila hanya bila* $\gcd(a, b) = 1$.

Bukti. Langsung dari teorema sebelumnya. □

Teorema ini mengatakan bahwa kelipatan pesekutuan terkecil dua bilangan yang prima relatif adalah hasil kali keduanya. Sebagai contoh, oleh karena 3 dan 8 meruapakan pasangan yang prima relatif maka $\text{lcm}(3, 8) = 24$.

Contoh 1.16. Tentukan KPK dari 3054 dan 12378

Penyelesaian. Dihitung dulu FPB dari kedua bilangan ini dengan menggunakan algoritma Euclid

$$\begin{aligned}
12378 &= 4{\cdot}3054 + 162\\
3054 &= 18 \cdot 162 + 138\\
162 &= 1 \cdot 138 + 24\\
138 &= 5 \cdot 24 + 18\\
24 &= 1 \cdot 18 + 6\\
18 &= 3 \cdot 6 + 0
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh $\gcd(3054, 12378) = 6$. Berdasarkan Teorema 1.8 maka diperoleh

$$\text{lcm}(3054, 12378) = \frac{3054 \cdot 12378}{6} = 6300402.$$

□

Setelah melihat pengertian dan sifat-sifat FPB dari dua bilangan maka kita dapat memperluasnya untuk lebih dari dua bilangan. Prinsipnya sama, yaitu d dikatakan FPB dari a, b dan c, ditulis $d = \gcd(a, b, c)$ jika $d|a$, $d|b$ dan $d|c$ dan jika d_1 faktor persekutuan selain dari d maka $d_1 \leq d$. Sebagai ilustrasi diperhatikan contoh berikut ini.

Contoh 1.17. Dapat diperiksa bahwa $\gcd(39, 42, 54) = 3$ dan $\gcd(49, 210, 350) = 7$.

Untuk memudahkan menghitung FPB beberapa bilangan dapat dilakukan dengan metoda reduksi bertahap seperti diungkapkan pada teorema berikut.

Teorema 1.9. *Untuk beberapa bilangan $a_1, \cdots a_k$ berlaku*

$$\gcd(a_1, a_2, \cdots, a_k) = \gcd\left(\gcd\left(a_1, a_2\right), a_3, \cdots, a_k\right).$$

Bukti. Hanya akan dibuktikan untuk tiga bilangan bulat, yaitu

$$\gcd(a_1, a_2, a_3) = \gcd\left(a_1, \gcd(a_2, a_3)\right).$$

Misalkan $d = \gcd(a_1, a_2, a_3)$ maka $d|a_1, d|a_2$ dan $d|a_3$. Oleh karena $d|(a_2x + a_3y)$ untuk setiap bulat x dan y sedangkan $d_1 = \gcd(a_2, a_3)$ dapat dinyatakan sebagai salah satu bentuk kombinasi linier ini, maka $d|\gcd(a_2, a_3) := d_1$. Jadi $d|a_1$ dan $d|d_1$. Ditunjukkan d faktor persekutuan terbesar dari a_1 dan d_1. Misalkan ada c dengan $c|a_1$ dan $c|d_1$. Oleh karena $c|d_1$ dan ($d_1|a_2$ dan $d_1|a_3$) maka $c|a_2$ dan $c|a_3$. Jadi c faktor persekutuan dari a_1, a_2 dan a_3. Karena $d = \gcd(a_1, a_2, a_3)$ maka haruslah $c \leq d$. Jadi d adalah FPB dari a_1 dan d_1, yaitu $d = \gcd(a_1, d_1) = \gcd\left(a_1, \gcd(a_2, a_3)\right)$. □

Untuk sejumlah berhingga banyak bilangan dapat dibuktikan dengan menggunakan prinsip induksi matematika.

Dengan teorema ini, $d = \gcd(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ dapat direduksi sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
d_2 &= \gcd(a_1, a_2) \\
d_3 &= \gcd(d_1, a_3) \\
d_4 &= \gcd(d_2, a_4) \\
&\vdots \\
d_k &= \gcd(d_{k-2}, a_k)
\end{aligned}$$

dan diperoleh $d = d_k$.

Contoh 1.18. Untuk menghitung $d = \gcd(36, 24, 54, 27)$ dihitung dulu $d_2 = \gcd(36, 24) = 12$, kemudian $d_3 = \gcd(12, 54) = 6$, dan akhirnya $d = d_4 = \gcd(6, 27) = 3$.

Latihan 1.5.1. Temukan kelipatan persekutuan terekecil pasangan bilangan berikut denga dua cara, yaitu langsung melalui definisi dan menggunaan Teorema 1.8.

1. 306 dan 507.
2. 272 dan 1479.

Latihan 1.5.2. Diberikan bilangan bulat taknol a dan b. Buktikan kebenaran pernyataan berikut

1. $\gcd(a, b) = \mathrm{lcm}(a, b)$ bila hanya bila $a = \pm b$.
2. Jika $k > 0$ maka $\mathrm{lcm}(ka, kb) = k\mathrm{lcm}(a, b)$.
3. Jika m kelipatan persekutuan dari a dan b maka $\mathrm{lcm}(a, b)|m$.

Latihan 1.5.3. Seperti pengembangan konsep pada FPB, apakah pernyataan berikut berlaku. Jika berlaku, buktikan dan jika tidak berlaku, berikan contoh pengigkarnya.

1. $\mathrm{lcm}(a, b, c) = \mathrm{lcm}(\mathrm{lcm}(a, b), c)$.
2. $\mathrm{lcm}(a, b, c) = \frac{abc}{\gcd(a,b,c)}$.

1.6 Persamaan Diophantine

Persamaan ini pertama kali dipelajari oleh seseorang yang bernama Diophantus yang menghabiskan hidupnya di Alexandria, Mesir sekitar tahun 250 Masehi. Persamaan Diophantine adalah persamaan linier yang memuat beberapa variabel, namun harus diselesaikan dalam bilangan bulat. Tidak seperti sistem persamaan linier biasa, persamaan Diophantine variabelnya lebih banyak daripada persamaannya. Bentuk paling sederhananya diberikan oleh

$$ax + by = c \tag{1.4}$$

denga a, b dan c bilangan bulat yang diberikan. Penyelesaian persamaan Diophantine (1.4) adalah semua pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi persamaan ini.

Contoh 1.19. Untuk persamaan $3x + 6y = 18$ kita dapat menulis dalam beberapa bentuk berikut

$$\begin{aligned} 3 \cdot 4 + 6 \cdot 1 &= 18 \\ 3 \cdot (-6) + 6 \cdot 6 &= 18 \\ 3 \cdot 10 + 6 \cdot (-2) &= 18 \end{aligned}$$

sehingga $(4, 1), (-6, 6), (10, -2)$ merupakan penyelesaiannya. Masih banyak penyelesaian lainnya, coba temukan! Diperhatikan persamaan $2x + 10y = 17$. Adakah bilangan bulat (x, y) yang memenuhi persamaan ini? Dalam kasus tidak ada x dan y bulat yang memenuhi persaman ini maka persamaan $2x + 10y = 17$ dikatakan tidak mempunyai penyelesaian.

Berdasarkan contoh ini persamaan Diophantine dapat mempunyai atau tidak mempunyai penyelesaian. Dalam kasus ia mempunyai penyelesaian maka penyelesaiannya banyak bahkan takberhingga banyak. Teorema berikut memberikan syarat perlu dan cukup persamaan Diophantine mempunyai penyelesaian.

Teorema 1.10. *Misalkan a, b dan c bilangan bulat dengan a dan b tidak keduanya nol dan $d = \gcd(a, b)$. Maka persamaan Diophantine*

$$ax + by = c$$

mempunyai penyelesaian jika hanya jika $d|c$ dan dalam kasus ini terdapat takberhingga banyak penyelesaian. Penyelesaian-penyelesaian ini diberikan oleh

$$x = x_0 + \frac{b}{d}n, \;\; y = y_0 - \frac{a}{d}n, \;\; n \in \mathbb{Z} \tag{1.5}$$

dengan (x_0, y_0) merupakan penyelesaian khusus.

Penyelesaian khusus adalah penyelesaian yang ditemukan pertama kali, kadangkala disebut penyelesaian awal.

Bukti. Perhatikan kembali akibat (1.1), setiap anggota himpunan $T = \{ax + by | x, y \in \mathbb{Z}\}$ merupakan kelipatan dari $d = \gcd(a, b)$. Sebaliknya setiap anggota $K = \{kd | k \in \mathbb{Z}\}$ yaitu himpunan kelipatan d merupakan anggota T. Dengan kata lain dapat ditulis $K = T$. Oleh karena diketahui $d|c$ maka berlaku $c = kd \in K$ sehingga $c \in T$. Ini berarti ada $x, y \in \mathbb{Z}$ sehingga $ax + by = c$. Misalkan (x_0, y_0)

penyelesaian tertentu atau khusus, maka mesti berlaku

$$ax_0 + by_0 = c.$$

Bila diambil $x = x_0 + \frac{b}{d}n,\ y = y_0 - \frac{a}{d}n,\ \ n \in \mathbb{Z}$ maka

$$a\left(x_0 + \frac{b}{d}n\right) + b\left(y_0 - \frac{a}{d}n\right) = ax_0 + by_0 + \frac{ab}{d}n - \frac{ab}{d}n = ax_0 + by_0 = c,$$

yakni (x, y) juga penyelesaian untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$. Selanjutnya ditunjukkan bahwa hanya (x, y) pada (1.5) yang menjadi penyelesaian persamaan Diophantine. Diperhatikan, karena $ax + by = c = ax_0 + by_0$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} a(x - x_0) &= -b(y - y_0) \\ \frac{a}{d}(x - x_0) &= -\frac{b}{d}(y - y_0). \end{aligned}$$

Mengingat a dan b tidak keduanya nol, cukup diasumsikan $b \neq 0$. Diperhatikan $\frac{b}{d} \neq 0$, ia membagi $\frac{a}{d}(x - x_0)$. Oleh karena $\gcd(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$ dan $\left(\frac{b}{d}\right) \mid \left(\frac{a}{d}\right)(x - x_0)$, maka $\left(\frac{b}{d}\right) |(x - x_0)$ dengan lemma Euclid. Jadi, $x - x_0 = \frac{b}{d}n \to x = x_0 + \frac{b}{d}n$ untuk suatu $n \in \mathbb{Z}$. Substitusi mundur $(x - x_0)$ ke persamaan sebelumnya, diperoleh $-\frac{b}{d}(y - y_0) = \frac{a}{d} \cdot \frac{b}{d}n \to y = y_0 - \frac{a}{d}n.$ □

Keadaan khusus ketika a dan b prima relatif maka persamaan Diophantine selalu mempunyai penyelesaian yang diberikan oleh

$$x = x_0 + bn,\ y = y_0 - an,\ \ n \in \mathbb{Z} \tag{1.6}$$

dengan (x_0, y_0) penyelesaian khususnya.

Algoritma untuk menentukan penyelesaian persamaan Diophantine.

1. Hitung $d = \gcd(a, b)$; dengan cara langsung atau menggunakan algoritma Euclid.

2. Bila $d \nmid c$ maka persamaan Diophantine tidak mempunyai penyelesaian, stop.

3. Temukan bilangan bulat v dan w sehingga $av + bw = d$. Kedua ruas dikalikan

k diperoleh

$$\begin{aligned} akv + bkw &= kd \\ a(kv) + b(kw) &= c. \end{aligned}$$

Diambil $x_0 = kv$ dan $y_0 = kw$ sebagai penyelesaian khususnya.

4. Gunakan formula (1.5) untuk membangun himpunan semua penyelesaian.

Contoh 1.20. Diberikan persamaan Diophantine

$$172x + 20y = 1000.$$

1. Selidikilah apakah persamaan ini mempunyai penyelesaian.
2. Bila ia mempunyai, tentukan semua penyelesaian tersebut.
3. Tentukan penyelesaian yang bernilai positif.

PENYELESAIAN. Temukan dulu $\gcd(172, 20)$. Kali ini digunakan algoritma Euclid berikut.

$$\begin{aligned} 172 &= 8 \cdot 20 + 12 \\ 20 &= 1 \cdot 12 + 8 \\ 12 &= 1 \cdot 8 + 4 \\ 8 &= 2 \cdot 4 + 0 \end{aligned}$$

Jadi, $\gcd(172, 20) = 4$. Mengingat $4|1000$ maka persamaan Diophantine ini dipastkan mempunyai penyelesaian. (3) Untuk menemukan v dan w pada langkah 3 algoritma, lakukan proses berjalan mundur pada algoritma Euclid di atas untuk membentuk identitas Bezout berikut.

$$\begin{aligned} 4 &= 12 - 8 \\ &= 12 - (20 - 1 \cdot 12) \\ &= 2 \cdot 12 - 20 \\ &= 2(172 - 8 \cdot 20) - 20 \\ &= 2 \cdot 172 + (-17) \cdot 20. \end{aligned}$$

Jadi dengan mengalikan kedua ruas dengan 250 diperoleh

$$500 \cdot 172 + (-4250) \cdot 20 = 1000.$$

Dari sini diambil $x_0 = 500$ dan $y_0 = -4250$ sebagai penyelesaian khususnya. Selanjutnya bentuk umum penyelesaian persamaan ini diperoleh dengan menerapkan formula pada (1.5), diperoleh

$$\begin{aligned} x &= 500 + \frac{20}{4}t = 500 + 5t \\ y &= -4250 - \frac{172}{4}t = -4250 - 43t \end{aligned}$$

dengan t bilangan bulat sebarang. Terakhir, untuk memilih penyelesaian ini yang bernilai positif, kita perlu memberikan syarat berikut.

$$\begin{aligned} 500 + 5t &> 0 \text{ dan} \\ -4250 - 43t &> 0 \end{aligned}$$

Berdasarkan syarat ini diperoleh $t > -\frac{500}{5} = -100$ untuk syarat pertama (mengapa?) dan $t < -\frac{4250}{43} = -98\frac{36}{43}$ untuk syarat kedua (mengapa?). Jadi t yang memenuhi kedua syarat ini adalah $t = -99$ dan penyelesaian positif yang dimaksud adalah

$$\begin{aligned} x &= 500 + 5(-99) = 5 \\ y &= -4250 - 43(-99) = 7. \end{aligned}$$

□

Persamaan Diophantine banyak diterapkan dalam kehidupan sehari-hari. Contoh berikut adalah salah satunya.

Contoh 1.21. Seorang nenek meminta cucunya membeli dua macam buah, yaitu mangga dan jeruk. Sang nenek memberikan uang 100 ribu rupiah kepada sang cucu untuk mendapatkan sebanyak mungkin buah tetapi jeruk lebih banyak dari mangga. Bila harga mangga 700 rupiah per biji dan jeruk 1300 rupiah per biji, tentukan banyak buah yang harus dibeli oleh sang cucu.

Penyelesaian. Pertama, susun model matematika untuk permasalahan di atas. Misalkan x menyatakan banyak mangga dan y banyak jeruk yang harus dibeli.

- ☛ Diketahui setiap 1 mangga harganya 700 dan setiap satu jeruk harganya 300, dan uang yang akan dibelanjakan sebesar 100 ribu maka diperoleh $700x + 1300y = 100000$. Disederhanakan menjadi $7x + 13y = 1000$.
- ☛ Oleh karena banyak mangga dan banyak jeruk yang akan dibeli tidak mungkin negtaif, maka haruslah $x \geq 0$ dan $y \geq 0$.
- ☛ Oleh karena disyaratkan banyak jeruk lebih dari banyak mangga maka haruslah $y > x$.

Berdasarkan tahapan di atas, maka disusun model matematikan berikut.

$$\begin{aligned} 7x + 13y &= 1000 \\ x \geq 0 \quad &\& \quad y \geq 0 \\ y &> x \end{aligned}$$

Karena $\gcd(7, 13) = 1|1000$ maka dipastikan persamaan ini mempunyai penyelesaian. Secara kasat mata kita langsung dapat membentuk identitas Bezout berikut

$$1 = 7 \cdot 2 + 13 \cdot (-1).$$

Kedua ruas dikalikan dengan 1000 diperoleh $1000 = 7 \cdot 2000 + 13 \cdot (-1000)$ sehingga diambil penyelesaian khusus

$$x_0 = 2000 \text{ dan } y_0 = -1000.$$

Penyelesaian umum persamaan ini diberikan oleh

$$\begin{aligned} x &= 2000 + 13n \\ y &= -1000 - 7n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Oleh karena disyaratkan $x \geq 0$ maka diperoleh

$$2000 + 13n \geq 0 \to n \geq -\frac{2000}{13} \approx -153.84 \to n = \{-153, -152, -151, \cdots\}.$$

Syarat pada $y \geq 0$ menghasilkan batasan n berikut

$$-1000 - 7n \geq 0 \to n \leq -\frac{1000}{7} \approx -142.85 \to n = \{\cdots, -145, -144, -143\}.$$

Syarat $y > x$ memberikan hasil berikut

$$-1000 - 7n > 2000 + 13n \rightarrow n < -150 \rightarrow n = \{\cdots, -153, -152, -151\}.$$

Nilai n yang memenuhi ketiga syarat ini adalah

$$n = \{-153, -152, -151\}$$

Penyelesaian yang bersesuaian dengan n ini akan bernilai positif, tetapi kita perlu memilih n yang membuat nilai $x + y$ terbesar. Perhatikan tabel berikut

n	x	y	$x+y$
-153	11	71	82
-152	24	64	88
-151	37	57	94

Jadi sang cucu harus membeli 37 biji mangga dan 57 biji jeruk. □

Ada metoda lain untuk menyelesaikan persamaan Diophantine, yaitu metoda Reduksi Euclid.

Metoda Reduksi Euclid

Metoda ini didasarkan pada penyajian penyelesaian persamaan Diophantine dalam bentuk

$$\begin{aligned} x &= i + jt \\ y &= k + mt \end{aligned}$$

dengan $i, j, k, m \in \mathbb{Z}$. Untuk jelasnya kita perhatikan contoh berikut.

Contoh 1.22. Selesaikan persamaan Diphantine $6x + 5y = 171$, $x, y > 0$.

Penyelesaian. Karena $\gcd(6, 5) = 1$ maka persamaan ini dipastikan mempunyai penyelesaian. Pertama, nyatakan x secara eksplisit

$$x = \frac{171 - 5y}{6} = 28 + \underbrace{\frac{3 - 5y}{6}}_{p}.$$

Ambil $p = \frac{3-5y}{6} \in \mathbb{Z}$ sehingga dapat ditulis: $x = 28 + p$. Variabel y juga dinyatakan secara eksplisit dalam p, yaitu

$$y = \frac{3-6p}{5} = -p + \underbrace{\frac{3-p}{5}}_{q}.$$

Ambil $q = \frac{3-p}{5} \in \mathbb{Z}$ sehingga dapat ditulis: $y = -p + q$ dan $p = 3 - 5q$. Dengan menggunakan hasil ini diperoleh penyelesaian yang dimaksud

$$\begin{aligned} x &= 28 + (3 - 5q) = 31 - 5q \\ y &= -(3 - 5q) + q = 6q - 3. \end{aligned}$$

Syarat $x > 0$ memberikan $31 - 5q > 0 \to q < \frac{31}{5} = 6\frac{1}{5}$, sedangkan syarat $y > 0$ memberikan $6q - 3 > 0 \to q > \frac{1}{2}$. Jadi dipenuhi oleh $q \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Silahkan dihitung sendiri penyelesaian positif yag dimaksud. □

Perhatikan semakin banyak syarat yang dikenakan pada penyelesaian semakin berkurang banyaknya penyelesaian yang memenuhi.

Sesungguhnya persamaan Diophantine dapat diperluas dengan melibatkan lebih dari 2 variabel (multivariable). Bentuk umum persamaan Diopanthine n-variabel adalah sebagai berikut.

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c. \tag{1.7}$$

Contoh 1.23. Persamaan Diophantine 3 variabel $3x + 2y - 5z = 7$ mempunyai penyelesaian $(5, 1, 2)$, sebab $3(5) + 2(1) - 5(2) = 7$. Sedangkan, persamaan $2x + 3y + 9z = 4$ tidak mempunyai penyelesaian. Coba dicek!

Berdasarkan contoh ini, perasamaan Diophantine multivariabel dapat saja tidak memiliki penyelesaian. Dalam kasus ia mempunyai penyelesaian, maka banyaknya penyelesaian adalah tekberhingga.

Teorema 1.11. *Jika $a_1, a_2, \cdots, a_n$ bilangan bulat taknol, maka persamaan Diophantine $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$ mempunyai penyelesaian bila hanya bila $d := gcd(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ membagi a_k untuk setiap $k = 1, 2, \cdots, n$. Dalam kasus ini, banyaknya penyelesaian adalah takberhingga.*

Bukti. $(\to)$: Diketahui persamaan Diophantine ini mempunyai penyelesaian, yakni ada bilangan bulat $x_1, x_2, \cdots, x_n$ yang memenuhi $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$.

Karena $d|a_k$ untuk setiap $k = 1, 2, \cdots, n$ maka d membagi kombinasi linear para a_k ini, khususnya $d|(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n =: c)$. Jadi, $d|c$. ($\leftarrow$): Kita gunakan metode induksi pada $n \geq 2$. Langkah basis, misalkan $n = 2$ maka pernyataan ini benar menurut Teorema 1.10. Langkah induktif, andaikan berlaku untuk $n = k$, yaitu persamaan Diophantine $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_kx_k = c$ mempunyai penyelesaian bila hanya bila $d = \gcd(a_1, a_2, \cdots, a_k)|c$. Untuk $n = k + 1$, perhatikan akibat teorema Bezout, yaitu himpunan semua kombinasi linear x_n dan x_{n+1}, yaitu $a_nx_n + a_{n+1}x_{n+1}$ merupakan himpunan kelipatan dari $\gcd(x_nx_{n+1})$. Jadi, persamaan $a_nx_n + a_{n+1}x_{n+1} = \gcd(a_n, a_{n+1})y$ mempunyai takberhingga banyak penyelesaian. Selanjutnya persamaan dalam n variabel direduksi menjadi persamaan n variabel sebagai berikut.

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + \underbrace{a_nx_n + a_{n+1}x_{n+1}} &= c \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1} + \gcd(a_n, a_{n+1})y &= c. \end{aligned}$$

Perhatikan bentuk terakhir ini merupakan persamaan Diophantine dalam n variabel. Berdasarkan hipotesis induksi, disimpulkan persamaan ini mempunyai takberhingga banyak penyelesaian bila hanya bila $c|\gcd(a_1, a_2, \cdots, \gcd(a_n, a_{n+1}))$. Faktanya,

$$\gcd(a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}) = \gcd(a_1, a_2, \cdots, \gcd(a_n, a_{n+1})).$$

Dengan demikian $c|\gcd(a_1, a_2, \cdots, a_{n+1})$. Akhirnya, disimpulkan bahwa persamaan Diophantine ini mempunyai takberhingga banyak penyelesaian. □

Contoh 1.24. Selesaikan persamaan Diophantine $2x + 3y + 4z = 5$.

Bukti. Persamaan ini dipastikan mempunyai penyelesaian karena $d = \gcd(2, 3, 4) = 1|5$. Perhatikan bahwa $\gcd(2, 3) = 1$ sehingga persamaan $2x + 3y = 5 - 4z$ dipastikan mempunyai penyelesaian untuk setiap $z \in \mathbb{Z}$. Tetapkan $z := t$ sebarang bilangan bulat. Selesaikan persamaan $2x + 3y = 5 - 4t$. Dengan metoda reduksi Euclid, kita peroleh penjabaran berikut.

$$x = \frac{5 - 4t - 3y}{2} = 2 - 2t + \underbrace{\frac{1 - 3y}{2}}_{:=p} = 2 - 2t + p,$$

yakni dengan mengambil $\frac{1-3y}{2} = p$. Nyatakan y dalam p, diperoleh

$$y = \frac{1-2p}{3} = \frac{1-3p+p}{3} = -p + \underbrace{\frac{1+p}{3}}_{:=s} = -p + s.$$

Dengan menetapkan $s = \frac{1+p}{3}$ diperoleh $p = 3s - 1$. Substitusi parameter s ke dalam variabel y dan x, diperoleh bentuk umum penyelesaian persamaan Diophantine sebagai berikut.

$$\begin{aligned} y &= -(3s-1) + s = -2s + 1, \\ x &= 2 - 2t + 3s - 1 = 1 - 2t + 3s, \\ z &= t, \end{aligned}$$

dengan s, t bilangan bulat sebarang. Untuk lebih meyakinkan, kita lakukan verifikasi sebagai berikut.

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 5z &= 2(1 - 2t + 3s) + 3(-2s + 1) + 4t \\ &= 2 - 4t + 6s - 6s + 3 + 4t \\ &= 5. \end{aligned}$$

Ternyata jawabannya benar. □

Latihan 1.6.1. Selesaikan persamaan Diophantine berikut (bila ada).

1. $12x + 18y = 50$
2. $33x + 14y = 115$
3. $221x + 35y = 11$.

Latihan 1.6.2. Selesaikan persamaan Diophantine berikut (bila ada).

1. $7x + 21y + 35z = 8$
2. $101x + 102y + 103z = 1$
3. $15x + 12y + 30z = 24$
4. $2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 5$.

Latihan 1.6.3. Sebuah bilangan yang terdiri dari angka 6 dan angka 9. Bila semua angkanya dijumlahkan diperoleh bilangan 126. Bila angka 6 dan angka 9 dipertukarkan, diperoleh jumlah 114. Berapa banyak masing-masing kedua jenis angka tersebut. (Contoh: 66999 bila dijumlahkan menghasilkan $6+6+9+9+9 = 39$. Hasil pertukarannya adalah 99666, setelah dijumlahkan diperoleh $9 + 9 + 6 + 6 + 6 = 36$. Dalam kasus ini kita mempunyai 2 angka 9 dan 3 angka 6).

Latihan 1.6.4. Seorang profesor kembali ke rumahnya di USA setelah menghadiri konferensi di Paris dan London dengan memilki sisa uang di dalam bentuk euro (sisa dari Paris) dan mata uang pound (sisa dari London). Dia menukar kedua mata menjadi dollar US. Total, ia menerima \$117.98 dengan kurs 1 euro = \$11.1 dan 1 pound = \$1.69. Berapa nominal euro dan pound yang telah dia tukarkan.

Latihan 1.6.5. Sebuah perusahaan penerbangan menawarkan 3 jenis tiket untuk penerbangan rute Boston - New York. Kelas 1 dengan harga \$140 per tiket, kelas dua \$110 per tiket, dan kelas tiga \$78 per tiket. Jika dari 69 penumpang diperoleh total penjualan tiket \$6548, berapa banyak masing-masing tiket terjual.

Latihan 1.6.6. Seorang peternak membeli 100 hewan ternak senilai \$4000. Harga per ekor: anak sapi \$150, kambing \$50, dan domba \$25. Jika sang peternak ternyata memiliki semua jenis hewan, berapa banyak masing-masing hewan yang dia miliki.

BARISAN DAN DERET

BARISAN DAN DERET DI SMA:
BARISAN & DERET ARITMETIKA DAN GEOMETRI

A. Kompetensi yang diharapkan

1. Menentukan suku ke-n (atau pola) suatu barisan bilangan
2. Menentukan suku ke-n suatu barisan aritmatika dan jumlah n suku pertama suatu deret aritmatika
3. Menentukan suku ke-n suatu barisan geometri dan jumlah n suku pertama suatu deret geometri
4. Menghitung jumlah deret geometri tak hingga
5. Menuliskan suatu deret aritmetika dan suatu deret geometri dengan notasi sigma
6. Menyelesaikan masalah matematika yang berkaitan dengan barisan dan deret

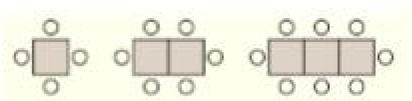
B. Indikator

1. Menentukan pola atau rumus suku ke-n suatu barisan bilangan
2. Menjelaskan pengertian suatu barisan bilangan
3. Menjelaskan cara-cara menuliskan suatu barisan bilangan
4. Menjelaskan pengertian barisan aritmetika dan barisan geometri
5. Menentukan rumus suku ke-n suatu barisan aritmetika
6. Menentukan rumus suku ke-n suatu barisan geometri
7. Menjelaskan pengertian suatu deret bilangan
8. Menuliskan deret aritmetika dan deret geometri dengan notasi sigma
9. Menentukan rumus jumlah n suku pertama suatu deret aritmetika
10. Menentukan rumus jumlah n suku pertama suatu deret geometri
11. Menghitung jumlah deret geometri tak hingga yang konvergen
12. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan barisan dan deret.

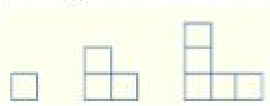
C. Pola Bilangan dan Barisan Bilangan

Untuk membahas tentang barisan dan deret bilangan kita mulai dengan permasalahan-permasalahan sebagai berikut.

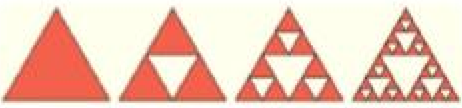
1. Menata tempat duduk. Di sekeliling sebuah meja persegi dapat ditem-patkan empat kursi. Di sekeliling dua meja persegi yang dijajarkan merapat dapat ditempatkan enam kursi, dan seterusnya seperti terlihat pada gambar di bawah ini. Ada berapa kursi yang dapat ditata jika terdapat 10 meja?



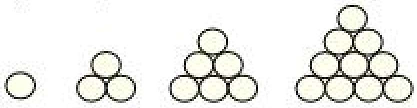
2. Perhatikan pola pada gambar di bawah ini yang masing-masing disusun dengan meng-gunakan beberapa persegi berukuran $1 \times 1\ cm^2$. Apabila gambar tersebut dilanjutkan, pada gambar ke berapakah yang mempu-nyai keliling 40 cm?



3. Perhatikan pola geometri di bawah ini. Apabila pola tersebut dilanjut-kan tanpa berakhir akan dihasilkan sebuah *fraktal* yang disebut segitiga Sierpinski. Apabila gambar tersebut dilanjutkan, terdapat berapa segi-tiga berwarna pada gambar ke-10?



4. Berikut adalah gambar beberapa lingkaran yang disusun dengan mengi-kuti pola tertentu. Apabila gambar tersebut dilanjutkan, berapakah banyaknya lingkaran pada gambar ke-10?



Marilah kita bahas satu per satu permasalahan-permasalahan di atas. Untuk menjawab setiap masalah, kita dapat membuat tabel yang sesuai.

1. Untuk masalah pertama, kita buat tabel sebagai berikut.

Banyaknya meja	1	2	3	...	n
Banyaknya kursi	4	6=2x2+2	8=2x3+2	...	$2 \times n + 2$

Dengan memperhatikan pola susunan meja dan kursi, ternyata terdapat hubungan antara banyaknya meja dan banyaknya kursi, yakni jika terdapat n meja, maka terdapat $2 \times n + 2$ kursi. Jadi, jika terdapat 10 meja, maka terdapat 22 kursi.

2. Untuk masalah kedua juga kita buat tabel sebagai berikut.

Gambar ke	1	2	3	...	n
Banyaknya persegi	1	3	5	...	$2n-1$
Keliling bangun	4=4x1	8=4x3-2x2	12=4x5-2x4		$4 \times (2n-1) - 2 \times (2n-2)$

Dengan memperhatikan pola gambar dan tabel di atas, dapat disimpulkan bahwa keliling gambar ke-n adalah $4 \times (2n-1) - 2 \times (2n-2) = 4n$. Jadi, bangun yang mempunyai keliling 40 adalah gambar ke-10.

<u>**Catatan**</u>: *Perhitungan keliling di atas diperoleh dari menjumlahkan keliling semua persegi dikurangi panjang sisi-sisi yang tidak dihitung. Anda mungkin dapat langsung menyim-pulkan rumus keliling bangun dengan memperhatikan pola bilangan pada baris ketiga pada tabel di atas.*

3. Lagi-lagi, untuk menyelesaikan soal nomor tiga kita juga dapat membuat tabel sebagai berikut.

Gambar ke	1	2	3	4	...	n
Banyaknya setitiga berwarna	$1=3^0$	$3=3^1$	$9=3^2$	$27=3^3$	...	3^{n-1}

Perhatikan bahwa bilangan-bilangan pada baris kedua membentuk suatu pola tertentu, yakni pada gambar ke-n banyaknya segitiga berwarna adalah 3^{n-1}. Jadi, pada gambar ke-10 terdapat 3^9 segitiga berwarna.

4. Sekali lagi, untuk menyelesaikan soal nomor 4 kita dapat membuat tabel sebagai berikut.

Gambar ke	1	2	3	4	...	n
Banyaknya lingkaran	$1=\frac{1\times2}{2}$	$3=\frac{2\times3}{2}$	$6=\frac{3\times4}{2}$	$10=\frac{4\times5}{2}$	...	$\frac{n\times(n+1)}{2}$

Dengan demikian, banyaknya lingkaran pada gambar ke-10 adalah 55.

Dari contoh-contoh soal di atas kita dapat menuliskan **barisan** bilangan yang sesuai sebagai berikut.

1. Banyaknya kursi : 4, 6, 8, ...
2. Keliling bangun : 4, 8, 12, ...
3. Banyaknya segitiga berwarna : 1, 3, 9, 27, ...
4. Banyaknya lingkaran : 1, 3, 6, 10, ...

Bilangan-bilangan pada masing-masing contoh tersebut membentuk suatu **barisan** bilangan dengan pola tertentu. Tanda tiga titik (...) menunjukkan adanya bilangan-bilangan berikutnya, sebanyak tak hingga. Selain itu, setiap bilangan pada masing-masing barisan selalu dikaitkan dengan suatu **bilangan asli** yang menunjukkan **posisi** bilangan tersebut (dalam konteks contoh-contoh di atas, posisi menunjukkan gambar ke-*n*). Jadi, kita dapat meman-dang suatu barisan sebagai suatu fungsi yang domainnya berupa himpunan bilangan-bilangan asli.

Definisi:
Suatu barisan bilangan adalah suatu fungsi yang mempunyai domain (daerah asal) himpunan bilangan-bilangan asli berturuan mulai dari 1.

Barisan yang mempunyai domain himpunan bilangan asli berhingga $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, untuk suatu bilangan asli n, disebut **barisan berhingga**.

Barisan yang mempunyai domain himpunan semua bilangan asli $\{1, 2, 3, \ldots\}$ disebut **barisan tak berhingga**.

Setiap bilangan (kawan suatu bilangan asli) dalam suatu barisan disebut **suku** barisan tersebut. Suku ke-n (sering disebut juga **suku umum**) suatu barisan adalah kawan bilangan asli n, dan biasa ditulis dengan simbol a_n, u_n, s_n, t_n dan sebagainya, sehingga suatu barisan biasa dinyatakan dengan simbol seperti $\{a_n\}$. Apabila rentang nilai n tidak ditulis, dianggap barisannya tak berhingga.

Suatu barisan dapat ditulis dengan berbagai cara, yakni sebagai berikut.

1. Dengan menuliskan **semua** sukunya (khusus untuk barisan berhingga), misalnya:
   a. 1, 2, 3, 2, 4, 5, 6, 7, 5, 10.
   b. 1, -1, 2, -2, 3, 4, 5, -5, 1.
   c. 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 5, 6, 7.
2. Dengan menuliskan beberapa suku pertama, seperti contoh-contoh sebelumnya. Contoh yang lain adalah sebagai berikut:
   a. 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...
   b. 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...
   c. 1, 1/2, 1/3, 1/4, ...
   d. 1, 2, 4, 8, 16, ...
3. Dengan menuliskan rumus suku ke-n (suku umumnya), misalnya:
   a. $a_n = 2(n+1), n = 1, 2, 3, \ldots$
   b. $a_n = 4n, n = 1, 2, 3, \ldots$
   c. $a_n = 3^{n-1}, n = 1, 2, 3, \ldots$
   d. $a_n = \frac{n \times (n+1)}{2}, n = 1, 2, 3, \ldots$

4. Dengan menuliskan hubungan antara dua suku berturuan (hubungan **rekursif)**, asalkan salah satu suku diketahui, misalnya:
   a. $a_1 = 4;\ a_n = a_{n-1} + 2, n = 2, 3, 4, \ldots$
   b. $a_1 = 4; a_n = a_{n-1} + 4, n = 2, 3, 4, \ldots$
   c. $a_1 = 1; a_n = 3a_{n-1}, n = 2, 3, 4, \ldots$
   d. $a_1 = 1; a_n = a_{n-1} + n, n = 2, 3, 4, \ldots$
5. Dengan menyebutkan sifat-sifat bilangan pada barisan, misalnya:
   a. Barisan bilangan genap positif: 2, 4, 6, 8, ...
   b. Barisan bilangan ganjil positif: 1, 3, 5, 7, ...
   c. Barisan bilangan prima kurang dari 20: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.
   d. Barisan bilangan kuadrat: 1, 4, 9, 14, 25, ...
   e. Barisan bilangan segitiga: 1, 3, 6, 10, 15, ...

Dari contoh-contoh di atas dapat diketahui bahwa terdapat barisan bilangan yang tidak berpola dan terdapat barisan bilangan yang mempunyai pola. Barisan yang tidak berpola hanya dapat diketahui dengan menuliskan semua sukunya, sedangkan barisan yang bepola dapat diketahui dengan berbagai cara seperti dijelaskan di atas. Pola bilangan dalam suatu barisan juga menunjukkan aturan pembentukan barisan tersebut. Selanjutnya kita hanya akan membahas barisan dengan pola tertentu, yakni **barisan aritmetika** dan **barisan geometri**. Sebelum berlanjut, silakan Anda kerjakan soal-soal latihan di bawah ini.

Latihan 1:
Nyatakan setiap barisan di bawah ini dengan cara:
a) menuliskan rumus suku ke-n
b) menuliskan hubungan antar dua suku berturutan
c) dengan menyebutkan sifat-sifat bilangannya

1. $1, 4, 7, 10, \ldots$
2. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$
3. $4, 7, 10, 13, \ldots$
4. $1, -3,\ 5, -7, 11, \ldots$
5. $11, 14, 17, 20, \ldots$
6. $4, 6, 8, 10, \ldots$
7. $-2, 7, 22, 43, 70, \ldots$
8. $3, 12, 25, 42, 63, \ldots$
9. $1, 26, 99, 244, \ldots$
10. $\sqrt{2}, 2, \sqrt{6}, 2\sqrt{2}, \sqrt{10}, \ldots$

D. Barisan dan Deret Aritmetika

Definisi:

Barisan aritmetika adalah barisan bilangan yang mempunyai suatu pola tertentu, yakni selisih setiap dua suku berturutan sama atau tetap. Dengan kata lain, setiap suku kecuali suku pertama pada barisan aritmetika diperoleh dari suku sebelumnya dengan cara menambah/ menguranginya dengan suatu bilangan tetap. Bilangan tetap tersebut dinamakan **beda** atau **selisih** (biasanya disimbolkan dengan *b).* Jadi, jika a_n adalah suku ke-n suatu barisan aritmetika, maka $a_{n+1} - a_n = b$ atau $a_{n+1} = a_n + b$ untuk $n = 1, 2, 3, \ldots$ dengan b suatu bilangan (konstanta) tertentu.

Suatu ***deret*** adalah jumlah suku-suku suatu barisan. Apabila barisan yang dijumlahkan mempunyai tak berhingga banyak suku, maka deretnya disebut **deret tak hingga.** Jika banyaknya suku berhingga, maka deretnya disebut **deret berhingga.** Hasil jumlahan suatu deret berhingga yang terdiri atas n suku biasanya dituliskan dengan simbol S_n, yakni

$$\boldsymbol{S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}.$$

Deret berhingga tersebut juga dapat dipandang sebagai(dinamakan) **jumlah parsial ke-$\boldsymbol{n}$** dari deret tak hingga

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots,$$

karena merupakan jumlah n suku pertamanya saja.

Deret aritmetika adalah jumlah suku-suku suatu barisan aritmetika.

Latihan 2:
Dari contoh-contoh dan soal-soal tentang barisan di atas, manakah yang merupakan barisan aritmetika? Jelaskan!

Kapan suatu barisan aritmetika dapat ditentukan? Pada bagian sebelumnya, kita sudah membahas bahwa suatu barisan dapat dinyatakan dengan berbagai cara. Apa saja?

Suatu barisan aritmetika dapat diketahui (atau ditentukan) oleh dua hal, yakni:
1) dua suku barisan tersebut, atau
2) salah satu suku dan bedanya, atau
3) salah satu suku dan jumlah beberapa suku pertama yang memuat suku yang diketahui tersebut, atau
4) jumlah beberapa suku pertama dan bedanya.

Hal itu berarti:

1) Apabila diketahui dua suku, maka beda dan jumlah n suku pertama barisan aritmetika dapat dihitung;
2) Jika diketahui salah satu suku dan beda, maka suku ke-n dan jumlah n suku pertama dapat dihitung;
3) Jika diketahui satu suku dan jumlah beberapa suku pertama yang memuat suku yang diketahui tersebut, maka suku ke-n dan beda dapat dihitung;
4) Jika diketahui jumlah n suku pertama dan beda, maka suku ke-n dapat diketahui.

1. **Kasus I: diketahui dua suku barisan aritmetika**

   Misalkan diketahui a_m dan a_k adalah dua suku suatu barisan aritmetika dengan $k > m$. Selanjutnya, misalkan b adalah beda barisan aritmetika tersebut. Menurut definisi barisan aritmetika, berlaku:

   $$a_{m+1} = a_m + b, a_{m+2} = a_{m+1} + b = a_m + 2b, \ldots, a_k = a_m + (k-m)b,$$

   sehingga diperoleh:

   $$b = \frac{a_k - a_m}{k - m}.$$

   Suku ke-n barisan aritmetika tersebut adalah:

   $$a_n = a_k + (n-k)b, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Khususnya, $a_1 = a_k + (1-k)b$ atau $a_k = a_1 + (k-1)b$. Apabila hasil terakhir dimasukkan ke dalam rumus a_n, maka diperoleh hubungan antara suku pertama (a_1), suku ke-n (a_n), dan beda (b) suatu barisan aritmetika sebagai berikut:

$$a_n = a_1 + (n-1)b, n = 2, 3, 4, \ldots$$

Contoh 1:

Jika diketahui suku ke-2 dan ke-3 suatu barisan aritmetika berturut-turut adalah 2 dan 5, maka bedanya adalah 3, dan barisan aritmetikanya adalah:

$$-1, 2, 5, 8, 11, \ldots$$

atau

$$a_n = 2 + 3(n-2) = (-1 + 3 \times 1) + 3(n-2) = -1 + 3(n-1).$$

Contoh 2:

Jika diketahui suku ke-5 dan suku ke-10 suatu barisan aritmetika berturut-turut adalah 3 dan 28, maka beda barisan aritmetika tersebut adalah $\frac{28-3}{10-5} = \frac{25}{5} = 5$, sehingga barisan aritmetikanya adalah:

$$-17, -12, -7, -2, 3, 8, 13, 18, 23, 28, \ldots$$

atau

$a_n = 3 + (n-5)5 = (-17 + 4 \times 5) + (n-5)5 = -17 + (n-1)5.$

Contoh 3 (Sifat suku tengah pada barisan aritmetika):

Misalkan suku-suku a_m dan a_k (dengan $k > m$) mengapit sebanyak ganjil suku-suku lain pada suatu barisan aritmetika. Jadi, $(k-m)$ dan $(k+m)$ merupakan bilangan-bilangan genap (habis dibagi 2). Suku yang terletak di tengah-tengah antara a_m dan a_k adalah:

$a_{\frac{m+k}{2}} = a_m + \left(\frac{m+k}{2} - m\right) b$ dengan $b = \frac{a_k - a_m}{k-m}$, atau

$$a_{\frac{m+k}{2}} = a_m + \left(\frac{k-m}{2}\right)\left(\frac{a_k - a_m}{k-m}\right) = \frac{a_m + a_k}{2}.$$

Jadi, *pada barisan aritmetika, nilai suku yang terletak* ***di tengah-tengah antara dua suku*** *yang mengapit sebanyak ganjil suku-suku lain sama dengan* ***rata-rata kedua suku*** *tersebut. Suku tengah merupakan* ***rata-rata aritmetika*** *kedua suku yang mengapitnya.*

2. **Kasus II: diketahui salah satu suku dan beda**

   Misalkan diketahui a_k adalah suku ke-k suatu barisan aritmetika yang mempunyai beda b. Misalkan a_n adalah suku ke-n. Dari hasil pada kasus I diperoleh bahwa:

   $$a_n = a_k + (n-k)b, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

   Khususnya juga, $a_1 = a_k + (1-k)b$ atau $a_k = a_1 + (k-1)b$. Persis seperti hasil sebelumnya pada kasus I, diperoleh hubungan antara suku pertama (a_1), suku ke-n (a_n), dan beda (b) suatu barisan aritmetika sebagai berikut:

   $$a_n = a_1 + (n-1)b, n = 2, 3, 4, \ldots$$

   Contoh 4:

   Diketahui suatu barisan aritmetika mempunyai suku ke-5 adalah 10 dan beda 3. Tentukan suku ke 15!

   Jawab:

   Diketahui $a_5 = 10, b = 3$. *Menurut rumus yang sudah diperoleh,* $a_{15} = a_5 + (15-5)b = 10 + 30 = 40$.

3. **Kasus III: diketahui salah satu suku dan jumlah n suku pertama**

Sebelum membahas kasus ketiga, kita cari jumlah n suku pertama barisan aritmetika. Sebelumnya sudah diperkenalkan notasi S_n yang menyatakan jumlah n suku pertama suatu barisan, yakni

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

Untuk barisan aritmetika sudah diketahui rumus suku ke-n dapat dinyatakan dengan suku pertama (a_1) dan beda (b), yakni:

$$a_n = a_1 + (n-1)b \text{ untuk } n = 2, 3, 4, \ldots.$$

Dengan demikian jumlah n suku pertama suatu barisan aritmetika dengan suku pertama (a_1) dan beda (b) adalah:

$$S_n = a_1 + (a_1 + b) + (a_1 + 2b) + \cdots + (a_1 + [n-1]b).$$

Untuk mendapatkan nilai deret tersebut, suku-sukunya kita tulis dari suku terakhir ke suku pertama sebagai berikut:

$$S_n = (a_1 + [n-1]b) + (a_1 + [n-2)b) + (a_1 + [n-3]b) + \cdots + a_1$$

Selanjutnya, jika keduanya dijumlahkan hasil adalah:

$$2S_n = \{2a_1 + [n-1]b\} + \{2a_1 + [n-1]b\} + \cdots + \{2a_1 + [n-1]b\}$$

dengan ruas kanan terdiri atas n suku bernilai sama dalam tanda {}, sehingga

$$2S_n = n \times \{2a_1 + [n-1]b\}$$

atau

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + [n-1]b\} = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Jadi, *jumlah n suku pertama suatu barisan aritmetika dapat dinyatakan dengan salah satu suku dan beda atau suku pertama dan suku ke-n.*

Sekarang misalkan suatu barisan aritmetika diketahui suku ke-k adalah a_k dan jumlah n suku pertama adalah S_n. Dari hasil sebelumnya diketahui bahwa $a_1 = a_k + (1-k)b$, sehingga

$$S_n = \frac{n}{2}\{2(a_k + (1-k)b) + [n-1]b\} = n \times a_k + \frac{n}{2}(n - 2k + 1)b.$$

Dari persamaan terakhir dapat dicari nilai b dan selanjutnya rumus suku ke-n barisan aritmetikanya.

Contoh 5:

Jika diketahui suku ke-2 dan ke-3 suatu barisan aritmetika berturut-turut adalah 2 dan 5, tentukan jumlah 10 suku pertama.

***Jawab*:**

Dari data yang diketahui, diperoleh beda barisan aritmetika tersebut adalah $b = 5 - 2 = 3$, *sehingga* $a_1 = 2 - 3 = -1$ *dan* $a_{10} = -1 + 3 \times 9 = 26$. *Jadi,* $S_{10} = 5 \times (-1 + 26) = 125.$

Contoh 6:

Jika diketahui suku ke-5 dan suku ke-10 suatu barisan aritmetika berturut-turut adalah 3 dan 28, tentukan jumlah 15 suku pertamanya.

Jawab:

Barisan aritmetika tersebut mempunyai beda $b = 5$ *(lihat Contoh 2), sehingga* $a_1 = 3 + (-4)5 = -17$ *dan* $a_{15} = -17 + 14 \times 5 = 53$. *Jadi,* $S_{15} = \frac{15}{2}(-17 + 53) = 240$.

Contoh 7:

Diketahui suatu barisan aritmetika mempunyai suku ke-5 adalah 10 dan beda 3. Tentukan jumlah 15 suku pertama!

Jawab:

Dari data tersebut dapat dicari $a_1 = 10 - 4 \times 3 = -2$ dan $a_{15} = -2 + 14 \times 3 = 40$, sehingga $S_{15} = \frac{15}{2}(-2 + 40) = 285$.

Contoh 8:

Tentukan barisan aritmetika yang mempunyai suku ke-5 adalah 10 dan jumlah 50 suku pertamanya adalah 2550.

Jawab:

Dengan menggunakan rumus pada hasil terakhir diperoleh persamaan $2550 = S_{50} = 50 \times a_5 + \frac{50}{2}(50 - 9)b = 50 \times 10 + 25 \times 41 \times b$, *sehingga* $b = \frac{2550-500}{1025} = 2$. *Jadi,* $a_n = 10 + 2(n - 5) = 2n$, *yakni*

2, 4, 6, 8, 10, ...

4. Kasus IV: diketahui jumlah n suku pertama dan beda

Dari hasil pada kasus III diperoleh hubungan antara jumlah n suku pertama, salah satu suku, dan beda suatu barisan aritmetika. Dengan demikian, apabila diketahui jumlah n suku pertama dan beda, maka dapat dicari salah satu sukunya (misalnya suku pertama). Setelah diperoleh salah satu suku, maka suku ke-n dapat ditentukan untuk setiap n bilangan asli.

Contoh 9:

Jika suatu barisan aritmetika mempunyai beda 4 dan jumlah 16 suku pertama adalah 528, tentukan barisan aritmetika tersebut.

Jawab:

Diketahui $S_{16} = 528$ *dan* $b = 4$. *Dengan menggunakan rumus terakhir pada hasil kasus III, diperoleh persamaan*

$$528 = S_{16} = 16a_1 + 8(16 - 1)b = 16a_1 + 8 \times 15 \times 4,$$

sehingga $a_1 = \frac{528-480}{16} = 3$. *Jadi,* $a_n = 3 + 4(n - 1) = 4n - 1$, *yakni*

$$3, 7, 11, 15, 19, \dots$$

Contoh 10:

Misalkan jumlah 8 suku pertama suatu barisan aritmetika adalah 74 sedangkan jumlah 24 suku pertama adalah 702. Tentukan barisan aritmetika tersebut.

Jawab:

Diketahui $S_8 = 74$ *dan* $S_{24} = 702$. *Untuk mengetahui barisannya, kita perlu mencari nilai beda. Dengan menggunakan rumus* S_n *diperoleh dua persamaan:*

(1) $74 = S_8 = \frac{8}{2}(2a_1 + 7b) = 8a_1 + 28b$

(2) $702 = S_{24} = \frac{24}{2}(2a_1 + 23b) = 24a_1 + 276b$.

Selanjutnya, eliminir a_1 *dari kedua persamaan tersebut untuk mendapatkan b, yakni (2)-3(1):* $480 = 192b$ *atau* $b = \frac{5}{2}$,*sehingga* $a_1 = \frac{74-70}{8} = \frac{1}{2}$. *Jadi*

$$a_n = \frac{1}{2} + (n - 1)\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5n}{2} - 2,$$

atau

$$\frac{1}{2}, 3, 5\frac{1}{2}, 8, 10\frac{1}{2}, \dots$$

Latihan 3:
1. Diketahui suku ke-n suatu barisan adalah $a_n = 3n - 2$. a) Tunjukkan bahwa barisan tersebut merupakan barisan aritmetika. b) Tentukan suku terkecil pada barisan tersebut yang nilainya lebih besar daripada 450. c) Tentukan jumlah n suku pertama barisan tersebut.

2. Tentukan nilai k pada setiap barisan aritmetika yang terdiri atas tiga bilangan sebagai berikut:
   a) $3,\ k,\ 32$ b) $k+1,\ 2k+1,\ 13$ c) $5,\ k,\ k^2-8$
3. Tentukan suku ke-n dalam bentuk yang paling sederhana jika diketahui dua suku barisan aritmetika:
   a) $a_7=41,\ a_{13}=77$ b) $a_5=-2,\ a_{13}=77$ c) $a_7=1, a_{15}=-39$
4. Tentukan (tulis suku-suku) barisan aritmetika dengan cara:
   a) Menyisipkan tiga bilangan antara 5 dan 10.
   b) Menyisipkan enam bilangan antara -1 dan 32.
5. Jumlah 5 buah bilangan yang membentuk barisan aritmetika adalah 75. Jika hasil kali bilangan terkecil dan terbesar adalah 161, tentukan selisih bilangan terbesar dan bilangan terkecil.
6. Suku pertama suatu deret aritmetika adalah 5, suku terakhirnya adalah 23, dan selisih suku ke-8 dengan suku ke-3 adalah 10. Tentukan banyak suku dalam deret itu.
7. Jumlah n suku pertama suatu deret aritmetika adalah $S_n=2n^2-6n$. Tentukan suku ke-n deret tersebut.
8. Jumlah dari 33 suku pertama dari deret aritmetika adalah 891. Jika suku pertama deret tersebut adalah 7, tentukan suku ke-33.
9. Lima belas bilangan membentuk deret aritmetika dengan beda positif. Jika jumlah suku ke-13 dan ke-15 sama dengan 188 dan selisih suku ke-13 dan ke-15 sama dengan 14, tentukan jumlah lima suku terakhir.
10. Tentukan jumlah bilangan di antara 5 dan 100 yang habis dibagi 7 tetapi tidak habis dibagi 4.
11. Suku tengah suatu deret aritmetika adalah 25. Jika bedanya adalah 4 dan suku ke-5 adalah 21, tentukan jumlah semua suku barisan tersebut.
12. Sebuah deret aritmetika mempunyai suku ketiga -11 dan jumlah dua puluh suku yang pertama 230, tentukan jumlah sepuluh suku pertama deret tersebut.
13. Pada barisan aritmetika 1, 3, 5, 7, ...
    a) Tentukan suku ke-n
    b) Buktikan bahwa $S_n=n^2$
    c) Periksa hasil tersebut dengan menghitung $S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4$.
14. Sisipkan sejumlah bilangan antara 1 dan 50 sehingga membentuk barisan aritmetika yang jumlahnya 459.
15. Akar-akar persamaan $x^4+4x^3-84x^2-176x+640=0$ membentuk suatu barisan aritmetika. Tentukan akar-akar tersebut.
16. Suatu deret aritmetika mempunyai jumlah parsial ke-n $S_n=\frac{n}{2}(7n+5)$. Tentukan: a) jumlah parsial ke berapa yang nilainya 425, b) suku ke-6.
17. Suatu deret aritmetika mempunyai jumlah parsial ke-n $100a_1$dan suku ke-n $9a_1$ dengan $a_1\neq 0$. Tentukan nilai n.
18. Suatu deret aritmetika mempunyai beda 3, suku ke-n 93 dan jumlah parsial ke-n 975. Tentukan nilai n.
19. Jumlah parsial ke-n suatu deret aritmetika adalah $S_n=5n^2-11n$. Tentukan beda barisan aritmetika tersebut.
20. Suatu deret aritmetika mempuyai suku ke-3 sama dengan -7 dan suku ke-7 sama dengan 9. Tentukan jumlah parsial ke-51.
21. Berapakah hasil penjumlahan $4+7+10+\cdots+901$?

E. Barisan dan Deret Geometri

Definisi:

Suatu **barisan geometri** adalah suatu barisan bilangan yang mempunyai pola tertentu, yakni tiap suku (kecuali suku pertama) diperoleh dengan cara mengalikan suku sebelumnya dengan dengan suatu bilangan tetap selain nol. Dengan kata lain, pada suatu barisan geometri hasil bagi atau rasio setiap suku dengan suku sebelumnya selalu sama. Bilangan pengali atau hasil bagi tersebut dinamakan **pembanding** atau **rasio** atau ada yang menyebut **rasio bersama** dan biasanya disimbolkan dengan huruf r.

Jadi, barisan $a_1, a_2, a_3, \ldots$ merupakan suatu barisan geometri apabila terdapat $r \neq 0$ sedemikian hingga:

$$a_{n+1} = a_n r \text{ atau } \frac{a_{n+1}}{a_n} = r \text{ untuk } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Sutau **deret geometri** adalah jumlah suku-suku barisan geometri.

1. Rumus Suku ke-n Barisan Geometri

Misalkan barisan $a_1, a_2, a_3, \ldots$ merupakan suatu barisan geometri. Menurut definisi, berarti terdapat $r \neq 0$ sedemikian hingga:

$$\begin{aligned}
&a_2 = a_1 r \\
&a_3 = a_2 r = a_1 r^2 \\
&a_4 = a_3 r = a_1 r^3 \\
&\vdots \\
&a_n = a_{n-1} r = a_1 r^{n-1}.
\end{aligned}$$

Jadi, apabila suku pertama suatu barisan geometri adalah a dan rasionya r, maka suku ke-n adalah

$$a_n = ar^{n-1}.$$

Bagaimana jika yang diketahui dua suku yang tidak berturutan? Misalkan a_m dan a_k adalah berturut-turut suku ke-m dan suku ke-k suatu barisan geometri. Anggap $m > k$. Misalkan suku pertamanya adalah a dan rasionya adalah r. Dari hasil di atas diperoleh:

(1) $a_k = ar^{k-1}$

(2) $a_m = ar^{m-1} = ar^{k-1}r^{m-k} = a_k r^{m-k}$

Dari (2) dapat dihitung r, kemudian dari (1) dapat dihitung a, dan barisan geometrinya dapat ditentukan.

Contoh 11:

Jika suku ke-1 satu barisan geometri adalah 27 dan suku ke-4 sama dengan 1, tentukan barisan geometri tersebut.

Jawab:

Diketahui $a_1 = 27$ dan $a_4 = 1$. Menurut rumus suku ke-n barisan geometri diperoleh $1 = a_4 = a_1 r^3 = 27r^3$, sehingga $r = \frac{1}{3}$. Jadi, barisan geometri yang dimaksud adalah

$$27, 9, 3, 1, \frac{1}{3}, \ldots \text{ atau } a_n = 27r^{n-1}, n = 1, 2, 3, \ldots$$

Contoh 12 (Hubungan barisan geometri dan barisan aritmetika):

Perhatikan barisan geometri

$$a, ar, ar^2, ar^3, ...$$

yang mempunyai suku pertama a dan rasio r. Logaritma suku-suku barisan geometri tersebut membentuk barisan

$$\log a, \log ar, \log ar^2, \log ar^3, ...$$

atau

$$\log a, (\log a + \log r), (\log a + 2\log r), (\log a + 3\log r), ...$$

yang ternyata membentuk barisan aritmetika dengan suku pertama $\log a$ dan beda $\log r$. Jadi, logaritma suku-suku barisan geometri membentuk barisan aritmetika.

Latihan 4

1. Dalam suatu kejuaraan basket, setiap tim pertanding melawan salah satu tim lain pada setiap putaran. Tim yang kalah bertanding tidak maju pada babak berikutnya. Apabila pada babak pertama terdapat 128 tim. Tentukan banyaknya pertandingan sampai kejuaraan tersebut selesai.
2. Tentukan rasio, suku umum, dan suku ke-10 barisan geometri yang diketahui:
   a) suku pertama 8 dan suku ke-6 adalah $\frac{1}{4}$
   b) suku pertama 3 dan suku ke-5 adalah 243
   c) suku ke-3 adalah 12 dan suku ke-6 adalah 96
   d) suku ke-4 adalah 16 dan suku ke-6 adalah 64
3. Tiga bilangan membentuk barisan geometri. Jika hasilkalinya adalah 216 dan jumlahnya 26, tentukan rasio deret tersebut.
4. Suku pertama dan suku kedua suatu deret geometri berturut-turut adalah r^2 dan r^x. Jika suku ke-5 deret tersebut adalah r^{18}, tentukan nilai x.
5. Diketahui x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + ax + b = 0$. Jika tiga bilangan 12, x_1, x_2 membentuk suatu barisan aritmetika dan tiga bilangan x_1, x_2, 4 membentuk suatu barisan geometri, tentukan diskriminan persamaan kuadrat tersebut.

2. Jumlah n suku pertama barisan geometri

Jumlah n suku pertama suatu barisan geometri merupakan deret geometri, yakni $S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + \cdots + a_1r^{n-1}$ dengan a_1 suku pertama dan $r \neq 1$ adalah rasionya. Jika kedua ruas dikalikan r, maka diperoleh $rS_n = a_1r + a_1r^2 + \cdots + a_1r^{n-1} + a_1r^n$, sehingga:

$$S_n - rS_n = a_1 - a_1r^n \text{ atau } (1-r)S_n = a_1(1-r^n).$$

(1) Apabila $r \neq 1$, maka diperoleh $\boxed{S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}.}$

(2) Untuk $r = 1$, $a_1 = a_2 = a_2 = \cdots = a_n$ sehingga $S_n = na_1$.

Komentar:

Ada yang mengatakan/menuliskan bahwa rumus $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ berlaku untuk $0 < r < 1$ dan rumus $S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$ berlaku untuk nilai r yang lain. Hal ini tidak sepenuhnya benar, karena kedua rumus adalah identik dan berlaku untuk semua $r \neq 1$. (Apakah rumus tersebut berlaku untuk $r = 0$?)

Contoh 13:

Diketahui deret geometri $2 + 6 + 18 + 54 + \ldots$

1. Tentukan rasio deret tersebut
2. Tentukan suku ke-21

3. Tentukan jumlah 9 suku pertama pada deret tersebut

Jawab:

a. Rasio deret tersebut adalah: $\frac{6}{2} = \frac{18}{6} = \frac{54}{18} = 3$

b. Karena suku pertama $a = 2$ *dan rasionya* $r = 3$*, maka suku ke-*n *adalah* $a_n = 2 \times 3^{n-1}$*, sehingga suku ke-21 adalah* $a_{21} = 2 \times 3^{20}$.

c. $S_9 = \frac{2(3^9-1)}{3-1} = 3^9 - 1 = 19682$.

Latihan 5:

1. Tiga bilangan merupakan suku-suku berturutan suatu deret aritmetika. Selisih bilangan ketiga dengan bilangan pertama adalah 6. Jika bilangan ketiga ditambah 3 maka ketiga bilangan tersebut merupakan deret geometri. Tentukan jumlah dari kuadrat bilangan tersebut.
2. Persamaan $2x^2 + x + k = 0$ mempunyai akar-akar x_1 dan x_2. Apabila bilangan-bilangan x_1, x_2, $\frac{1}{2}(x_1x_2)$ membentuk suatu barisan geometri, tentukan suku keempat deret tersebut.
3. Suatu deret geometri terdiri atas 7 suku dengan suku tengah dan terakhir masing-masing adalah 240 dan 1920. Tentukan jumlah deret geometri tersebut.
4. Tiga bilangan membentuk suatu deret geometri. Jika hasil kalinya adalah 216 dan jumlahnya 26, tentukan rasio deret tersebut.
5. Jika rasio deret geometri adalah 3 dan suku ke-8 adalah 10935, tentukan suku ke-5 deret tersebut.
6. Hitunglah jumlah parsial ke-11 pada deret geometri $6 + 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \cdots$.
7. Tunjukan bahwa $54 + 18 + 6 + \cdots + 5\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 81 - 3^{4-n}$.
8. Suatu deret geometri mempunyai suku ke-8 sama dengan 640 dan suku ke-3 sama dengan 20. Hitunglah jumlah parsial ke-7.
9. Perbandingan jumlah tiga suku pertama suatu deret geometri dan jumlah suku-suku ke-4, ke-5, dan ke-6 adalah 8:27. Apabila suku ke-3 sama dengan 8, tentukan rasio deret geometri tersebut.

3. Deret Geometri Tak Berhingga

Berpakah jumlah deret geometri $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$ sampai tak berhingga suku?

Sebenarnya tidaklah mungkin menghitung deret tak berhingga tersebut, karena kita tidak tahu berapa suku terakhirnya. Akan tetapi dalam matematika kita dapat menggunakan konsep **limit**. Sebelumnya kita sudah mendapatkan rumus jumlah n suku pertama suatu deret geometri yang rasionya selain 1, yakni $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$. Apabila nilai n mendekati tak berhingga berarti kita menjumlahkan deret tak berhingga, dan ini biasanya dituliskan sebagai:

$$\begin{aligned} S_\infty &= a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \cdots. \\ &= \lim_{n\to\infty} S_n \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{1(1-r^n)}}{1-r} \\ &= \left(\frac{a_1}{1-r}\right) \lim_{n\to\infty}(1-r^n) \\ &= \left(\frac{a_1}{1-r}\right)\left(1 - \lim_{n\to\infty} r^n\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{a_1}{1-r}(1-0), \text{ jika } |r| < 1$$
$$= \frac{a_1}{1-r}, \text{ jika } |r| < 1.$$

Perhatikan bahwa keberadaan nilai jumlah tak berhingga suatu deret geometri sangat tergantung pada nilai rasionya, yakni r.

(1) Untuk $|r| > 1$, $\lim_{n\to\infty} r^n$ tidak mempunyai nilai (hasilnya $\pm\infty$), sehingga S_∞ tidak dapat dihitung. Dalam hal deret geometri tersebut dikatakan **divergen**.

(2) Untuk $-1 < r < 1, \lim_{n\to\infty} r^n = 0$, sehingga

Contoh 14:

Suatu deret geometri tak berhingga mempunyai suku pertama 1 dan jumlah suku-suku yang bernomor ganjil adalah 2. Apabila deret tersebut mempunayi rasio positif, tentukan jumlah deret tersebut.

Jawab:

Misalkan deret geometrinya adalah: $1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \cdots$

Jumlah suku-suku bernomor ganjil adalah: $1 + r^2 + r^4 + \cdots$ *merupakan suatu deret geometri dengan suku pertama 1 dan rasio* r^2. *Karena diketahui* $2 = 1 + r^2 + r^4 + r^6 + \cdots = \frac{1}{1-r^2}$, *maka* $1 - r^2 = \frac{1}{2}$ *atau* $r^2 = \frac{1}{2}$. *Karena diketahui* $r > 0$, *maka* $r = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. *Jadi, jumlah deret semula adalah* $S_\infty = 1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \cdots = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{2}{2-\sqrt{2}}$

Latihan 6:

1. Suku-suku suatu barisan geometri tak berhingga adalah positif, jumlah suku pertama dan kedua adalah 45 dan jumlah suku ketiga dan keempat adalah 20. Tentukan jumlah suku-suku barisan tersebut.
2. Suatu deret geometri tak berhingga mempunyai rasio ${}^7\log(3x-2)$. Jika deret ini mempunyai jumlah (konvergen), tentukan nilai x.
3. Tentukan jumlah deret tak berhingga:
$$1 - \tan^2 30^o + \tan^4 30^o - \tan^6 30^o + \cdots + (-1)^n \tan^{2n} 30^o + \cdots.$$
4. Suatu deret geometri konvergen mempunyai limit (jumlah tak berhingga) $\frac{1}{2}$, sedangkan suku ke-2 dan ke-4 berturut-turut adalah 2 dan $\frac{8}{3}$. Tentukan suku pertamanya.
5. Suatu deret geometri tak berhingga mempnyai suku-suku positif, jumlah suku-suku $a_1 + a_2 = 45$ dan $a_3 + a_4 = 20$. Tentukan jumlah deret tersebut.
6. Jika jumlah semua suku deret geometri tak hingga adalah 96 dan jumlah semua sukunya yang berindeks ganjil adalah 64, tentukan suku ke-4 deret tersebut.
7. Hitunglah $3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots$
8. Tentukan nilai x agar deret geometri $2 + \frac{2}{3}(x+1) + \frac{2}{9}(x+1)^2 + \cdots$ konvergen
9. Suatu deret geometri yang suku-sukunya positif mempunyai jumlah tak berhingga sama dengan $4\frac{1}{6}$. Apabila suku ke-2 sama dengan $2\frac{2}{3}$ tentukan suku pertama dan rasio deret tersebut.
10. Tunjukkan bahwa deret geometri $2(5)^5 + 2(5)^4 + 2(5)^3 + 2(5)^2 + \cdots$ konvergen, kemudian tentukan jumlah parsial ke-n.

F. Notasi Sigma ($\sum$)

Di dalam matematika banyak digunakan berbagai simbol untuk menyingkat dan menye-derhanakan penulisan ekspresi-ekspresi yang panjang dan rumit. Demikian juga, untuk menuliskan suatu deret dapat digunakan notasi **sigma** ($\sum$) yang merupakan huruf besar "S" dalam alfabet Yunani, yang berarti "jumlah". Deret $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ dapat disingkat menjadi $\sum_{k=1}^{n} a_k$. Jadi,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

Pada notasi sigma, kita menjumlahkan ekspresi yang tertulis disebelah kanan $\sum$ untuk semua nilai indeks mulai nilai indeks yang tertulis di bawah tanda $\sum$ sampai nilai indeks yang tertulis di atas tanda $\sum$. Apabila notasi sigma ditulis di tengah suatu kalimat, biasanya rentang nilai indeks ditulis bukan di bawah dan di atasnya, tapi di pojok kanan bawah dan kanan atas. Hal ini bertujuan untuk menghindari spasi kosong yang terlalu lebar antar baris (lihat contoh-contoh tampilan di atas).

Berikut adalah contoh-contoh penggunaan notasi sigma.

Contoh 15:

1. $\sum_{i=5}^{10} i = 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = \frac{6}{3}(5 + 10) = 45.$
2. $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n}{2}(1 + n)$ (Mengapa?)
3. $\sum_{k=1}^{10} 2 = \underbrace{2 + 2 + 2 + \cdots + 2}_{10\ \text{suku}} = 10 \times 2 = 20.$
4. $\sum_{k=1}^{10} 3x^k = 3x + 3x^2 + 3x^3 + \cdots + 3x^{10}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$

Berikut adalah beberapa sifat aljabar yang berlaku untuk notasi sigma.

1. Untuk setiap barisan $\{a_k\}$ dan $\{b_k\}$ berlaku

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

2. Untuk setiap konstanta p yang tidak tergantung nilainya pada indeks i, berlaku

$$\sum_{i=1}^{n} pa_i = p \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

<u>Pertanyaan</u>: Apakah berlaku $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} b_k$? Mengapa?

Dengan menggunakan hasil-hasil dan sifat-sifat di atas, kita dapat menemu-kan rumus jumlah parsial deret aritmetika. Seperti sudah diketahui, suku ke-k deret aritmetika yang mempunyai suku pertama a dan beda b adalah $a_k = a + (k-1)b$. Dengan demikian kita dapat menuliskan deret aritmetika dengan menggunakan notasi sigma sebagai berikut.

$$\begin{aligned} a + (a+b) + (a+2b) + \cdots + (a + [n-1]b) &= \sum_{k=1}^{n} (a + [k-1]b) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a + \sum_{k=1}^{n} (k-1)b \\ &= na + b\sum_{k=1}^{n} (k-1) \\ &= na + b\sum_{k=1}^{n} k - b\sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= na + b\left(\frac{n}{2}\right)(1+n) - bn \\ &= \frac{n}{2}[2a + (b(1+n) - 2b] \\ &= \frac{n}{2}[2a + (n-1)b] \\ &= S_n. \end{aligned}$$

Demikian pula, deret geometri dapat dinyatakan dengan menggunakan notasi sigma sebagai berikut:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} ar^k = a\sum_{k=0}^{n-1} r^k$$

Latihan 7:

1. Nyatakan 20 suku pertama deret $6 + 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \ldots$ dengan mengguna-kan notasi $\sum$.
2. Hitunglah:
   a. $\sum_{n=1}^{4} 3(2)^{n-1}$
   b. $\sum_{k=2}^{6} 3\left(\frac{1}{3}\right)^{k+2}$
   c. $\sum_{k=1}^{\infty} 12\left(\frac{1}{5}\right)^{k-1}$
3. Tentukan nilai n jika diketahui $\sum_{k=1}^{n} 8\left(\frac{1}{2}\right)^{k} = 15\frac{3}{4}$.

G. Aplikasi Barisan dan Deret

Barisan dan deret mempunyai penerapan dalam berbagai persoalan dalam matematika. Berikut adalah beberapa contoh soal yang penyelesaiannya menggunakan barisan/deret aritmetika dan geometri.

Contoh 16 (Banyak jabatan tangan):

Dalam sebuah pertemuan setiap tamu laki-laki berjabat tangan dengan setiap tamu laki-laki lain, dan setiap tamu perempuan berjabat tangan dengan setiap tamu perempuan lain.

a. Apabila terdapat 10 tamu laki-laki dan 7 tamu perempuan, berapakah banyak jabatan tangan?

b. Apabila terdapat n tamu laki-laki dan m tamu perempuan, berpakah banyak jabatan tangan?

Jawab:

a. Banyak jabatan tangan di antara 10 tamu laki-laki adalah

$$9+8+7+6+5+4+3+2+1=\frac{9}{2}(9+1)=45.$$

Banyaknya jabat tangan di antara 7 tamu perempuan adalah

$$6+5+4+3+2+1=\frac{6}{2}(6+1)=21.$$

Jadi, total banyaknya jabat tangan adalah 45+21=66.

b. Dari hasil a) dapat disimpulkan bahwa banyaknya jabat tangan di anatara n tamu laki-laki adalah $\frac{(n-1)n}{2}$, dan banyaknya jabat tangan di antara m tamu perempuan adalah $\frac{(m-1)m}{2}$. Jadi total banyaknya jabat tangan adalah $\frac{1}{2}[(n-1)n+(m-1)m]$.

Contoh 17:

Diketahui sebuah persegi berukuran $4 \times 4\ cm^2$. Setiap titik tengah suatu sisi dihubungkan dengan titik tengah sisi-sisi yang berdekatan sehingga terbentuk persegi baru. Proses ini dilanjutkan terus.

a. Apabila proses dilanjutkan 9 kali, berapakah jumlah semua persegi yang terbentuk?
b. Apabila proses dilanjutkan tanpa berhenti, berapakah jumlah semua persegi yang terbentuk?

Jawab:

Proses tersebut menghasilkan barisan persegi yang luasnya

$$16, 8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \dots$$

dan merupakan barisan geometri dengan suku pertama 16 dan rasio ½ . Jadi,

a. Jika prosesnya 9 kali, maka jumlah luas persegi yang terbentuk adalah

$$16+8+4+2+1+\frac{1}{2}+\ \dots+16\left(\frac{1}{2}\right)^9=\frac{16\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1023}{32}\ cm^2.$$

b. Jika prosesnya tanpa berhenti,maka julmlah luas persegi yang terbentuk adalah

$$16+8+4+2+1+\frac{1}{2}+\ \dots=\frac{16}{1-\frac{1}{2}}=32\ cm^2.$$

Contoh 18 (menabung sekali):

Pada awal bulan seseorang menabung sejumlah A di salah satu bank. Bank memberikan bunga p per bulan (bersih sudah dipotong pajak dan bea administrasi) yang dibayar setiap awal bulan, mulai bulan berikutnya. Maka:

1. Pada awal bulan ke-2, jumlah tabungan adalah: $A_2=A+pA=A(1+p)$.

2. Pada awal bulan ke-3, jumlah tabungan adalah:

$$A_3=A_2+pA_2$$

$$
\begin{aligned}
&= A(1+p) + pA(1+p) \\
&= A(1+p)(1+p) \\
&= A(1+p)^2
\end{aligned}
$$

3. Secara umum, apabila tidak pernah diambil, jumlah tabungan pada awal bukan ke-n adalah

$$A_n = A(1+p)^{n-1}, \qquad n \geq 2$$

Contoh 19 (menabung rutin):

Setiap awal bulan seseorang menabung sejumlah A di salah satu bank. Bank memberikan bunga p per bulan (bersih sudah dipotong pajak dan bea administrasi) yang dibayar setiap awal bulan, mulai bulan berikutnya. Maka:

1. Pada awal bulan ke-2, jumlah tabungan adalah:

$$A_2 = A + (A + pA) = A + A(1+p).$$

2. Pada awal bulan ke-3, jumlah tabungan adalah:

$$
\begin{aligned}
A_3 &= A + (A_2 + pA_2) \\
&= A + [A + A(1+p) + p(A + A(1+p))] \\
&= A + [A + A(1+p) + pA + pA(1+p)] \\
&= A + A(1+p) + A(1+p)^2
\end{aligned}
$$

3. Secara umum, apabila tidak pernah diambil, jumlah tabungan pada awal bukan ke-n adalah

$$A_n = A[1 + (1+p) + (1+p)^2 + \ldots + (1+p)^{n-1}] = A\sum_{k=0}^{n-1}(1+p)^k$$

Latihan 8:
1. Sebuah bola jatuh dari ketinggian 10 m dan memantul kembali dengan ketinggian $\frac{3}{4}$ kali tinggi sebelumnya. Pemantulan ini berlangsung terus menerus hingga berhenti. Tentukan jumlah seluruh lintasan bola. 2. Seorang karyawan menabung dengan teratur setiap bulan. Uang yang ditabung setiap bulan selalu lebih besar dari bulan sebelumnya dengan selisih yang sama. Jika jumlah seluruh tabungannya selama 12 bulan pertama adalah 192 ribu rupiah dan selama 20 bulan pertama adalah 480 ribu rupiah, tentukan besar uang yang ditabung pada bulan kesepuluh. 3. Tingkat pertumbuhan penduduk di suatu daerah pemukiman baru adalah 10% per tahun. Tentukan kenaikan jumlah penduduk dalam waktu 4 tahun. 4. Jumlah penduduk kota A selama lima bulan berturut-turut membentuk sutu deret geometri. Pada tahun terakhir jumlah penduduknya 4 juta, sedangkan jumlah tahun pertama dan ketiga sama dengan $1\frac{1}{4}$ juta. Tentukan jumlah penduduk kota A pada tahun keempat. 5. Keuntungan seorang pedagang bertambah setiap bulan dengan jumlah yang sama. Jika keuntungan sampai bulan keempat 30 ribu rupiah, dan sampai bulan kedelapan 172 ribu rupiah, tentukan keuntungan sampai bulan ke-18.

I. Rangkuman

1. Barisan, Deret, dan Notasi Sigma

a. Barisan adalah fungsi yang domainnya himpunan bilangan asli.
b. Setiap bilangan dalam suatu barisan merupakan kawan suatu bilangan asli dan dinamakan **suku**.
c. Jumlah suku-suku suatu barisan disebut **barisan**.

d. Jumlah n suku pertama suatu barisan disebut **jumlah umum** atau **jumlah parsial ke-n,** biasanya dinyatkan dengan S_n.
e. Setiap deret dapat dinyatakan dengan menggunakan notasi sigma ($\sum$): $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$
f. Notasi sigma mempunyai sifat:
   i. $\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$
   ii. $\sum_{k=1}^{n} pa_k = p\sum_{k=1}^{n} a_k$

2. Barisan dan Deret Aritmetika

a. Barisan bilangan $a_1, a_2, a_3, \ldots$ merupakan barisan aritmetika jika terdapat suatu bilangan b sedemikian hingga $a_n - a_{n-1} = b$ untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$. Bilangan b disebut **beda** atau selisih.
b. Suku umum barisan aritmetika yang mempunyai suku pertama a dan beda b adalah $a_n = a + (n-1)b$ untuk setiap $n \geq 1$.
c. Suku tengah suatu barisan aritmetika merupakan rata-rata dua suku yang mengapit-nya, yakni $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-k} + a_{n+k})$ untuk setiap bilangan-bilangan asli $n > k \geq 1$.
d. Jumlah parsial ke-n deret aritmetika yang mempunyai suku pertama a dan beda b adalah

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a + (k-1)b = \frac{n}{2}[2a + (n-1)b] = \frac{n}{2}(a + a_n).$$

e. Suatu barisan aritmetika dapat diketahui (atau ditentukan) oleh dua hal, yakni:
   1) dua suku barisan tersebut: $b = \frac{(a_n - a_m)}{(n-m)}$, untuk $n > m \geq 1$
   2) salah satu suku dan bedanya: $a_n = a_k + (n-k)b,\ n \geq 1$
   3) salah satu suku dan jumlah beberapa suku pertama yang memuat suku yang diketahui tersebut:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}\{2(a_k + (1-k)b) + [n-1]b\} \\ &= n \times a_k + \frac{n}{2}(n - 2k + 1)b, \quad n > k \geq 1. \end{aligned}$$

   4) jumlah beberapa suku pertama dan bedanya.

3. Barisan dan Deret Geometri

a. Barisan bilangan $a_1, a_2, a_3, \ldots$ merupakan barisan geometri jika terdapat suatu bilangan $r \neq 0$ sedemikian hingga $\frac{a_n}{a_{n-1}} = r$ untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$. Bilanganr r disebut **rasio.**
b. Suku umum barisan geometri yang mempunyai suku pertama a dan rasio r adalah $a_n = ar^{n-1}$ untuk setiap $n \geq 1$.
c. Jumlah parsial ke-n deret geometri yang mempunyai suku pertama a dan rasio r adalah

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} ar^{(k-1)} = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)} = \frac{a(r^n - 1)}{(r-1)}, \qquad r \neq 1.$$

d. Apabila suatu deret geometri mempunyai rasio r dengan $|r| < 1$, maka deretnya **konvergen** dan mempunyai jumlah tak berhingga

$$S_\infty = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}, \text{ dengan } a \text{ adalah suku pertama.}$$