Mekanika

Konsep Dasar Mekanika, Vektor

pertemuan 1

Joko Saefan[*]

Pendidikan Fisika Universitas PGRI Semarang

Abstract: Beberapa anggapan sebagai dasar prinsip mekanika bekerja akan dijelaskan sesuai kebutuhan. Vektor merupakan bagian yang penting dalam Mekanika. Review ulang tentang vektor akan diuraikan terkait dengan berbagai operasi vektor seperti hasil kali skalar, hasil kali vektor, dan turunan vektor serta beberapa contoh kasus terkait konsep tersebut.

Keywords: mekanika, vektor, hasil kali skalar, hasil kali vektor, turunan vektor

1. Pendahuluan

Dalam beberapa teori Fisika, dan khususnya Mekanika memerlukan beberapa pemahaman konsep yang sederhana yang mendasar. Selain itu, anggapan yang beralasan juga diperlukan dalam mempelajari Mekanika. Dua konsep paling dasar adalah *ruang* dan *waktu*. Dalam pembelajaran awal Mekanika ini, terkait gerak, lazim menganggap bahwa ruang fisis, dideskripsikan oleh ruang matematik tiga dimensi dalam koordinat kartesius. Lalu, terkait konsep waktu, lazim menganggap bahwa barisan urutan kejadian diukur dalam skala waktu mutlak seragam (waktu tidak negatif). Sementara, menurut teori relativitas, ruang dan waktu tidak mutlak dan tidak terikat dan lebih lazim disebut sebagai ruang-waktu. Bagaimanapun, teori reltivitas ini akan dipelajari setelah dasar mekanika dijelaskan.

Sistem referensi akan dipilih untuk mendefinisikan posisi benda dalam ruang. Dalam Mekanika, sistem yang dipilih adalah sistem koordinat. Jenis dasar sitem koordinat yang digunakan adalah koordinat kartesius tiga dimensi berupa himpunan tiga buah garis lurus yang saling tegak lurus, atau biasa disebut sumbu-sumbu koordinat. Posisi titik dalam koordinat semacam ini secara khusus dinyatakan oleh tiga bilangan atau koordinat x, y, dan z. Koordinat suatu muatan titik yang bergerak menurut waktu biasa dinyatakan dalam besaran fungsi waktu t, yang diukur pada skala waktu.

Salah satu konsep yang penting dalam Mekanika adalah *partikel* atau titik massa, suatu besaran yang memiliki massa tetapi tidak memiliki panjang keruangan. Mudahnya, partikel merupakan suatu idealisasi yang sebenarnya

[*] *E-mail: jokosaefan@gmail.com*

tidak ada, padahal elektron-pun memiliki panjang. Akan tetapi gagasan ini merupakan pendekatan benda kecil. Contohnya bumi merupakan partikel dalam tinjauan mekanika kelangitan.

2. Besaran Fisis dan Satuan

Pengamatan data fisis dinyatakan dalam suatu suku yang dasar yang lazim disebut *besaran fisis*. Contonya adalah panjang, waktu, gaya, dan seterusnya. Besaran fisis merupakan sesuatu yang dapat diukur secara kuantitatif dalam hubungan dengan satuan yang dipilih. Ketika suatu objek dikatakan memiliki panjang 7 m, berarti objek tersebut memiliki panjang 7 kali dengan ratio suatu objek yang memiliki nilai satu satuan (1 m).

3. Definisi Formal dan Aturan Vektor

Besaran vektor dicetak dengan menggunakan huruf tebal, contohnya $\mathbf{A}$, yang mana huruf dasarnya dutlis miring yang mewakili besaran skalar A. Sementara, untuk tulisan tangan, lazim dibedakan menggunakan tanda, seperti tanda panah atas seperti $\vec{A}$, untuk mencirikan bahwa tulisan tersebut adalah vektor.
Suatu vektor $\mathbf{A}$ memuat besar dan arah vektor tersebut relatif pada sistem referensi yang dipilih. Suatu vektor dapat ditulis dalam komponen-komponen koordinat yang dipilih misalnya $\mathbf{A}$ memiliki komponen-komponen $[A_x, A_y, A_z]$ pada koordinat katesius atau dapat ditulis menurut

$$\mathbf{A} = [A_x, A_y, A_z]. \tag{1}$$

Secara geometri vektor lazim digambar sebagai anak panah yang memiliki pangkal dan ujung. Pangkal panah nenandakan asal vektor dan ujung menandakan arah vektor. Lebih jauh, arah vektor juga dapat diwakili oleh sudut dengan anggapan bahwa arah mendatar berada pada sudut nol derajat lalu berputar berlawanan arah dengan arah jarum jam. Contohnya vektor dengan arah vertikal lurus ke atas dapat disebut memiliki arah 90^0.
Aljabar vektor akan ditinjau dengan beberapa penyataan formal terkait vektor.

1. *Penjumlahan vektor*

   Penjumlahan vektor didefinisikan menurut

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= [A_x, A_y, A_z] + [B_x, B_y, B_z] && (2)\\ &= [A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z]. && (3) \end{aligned}$$

   Penjumlahan vektor merupakan penjumlahan komponen-komponen vektor yang diberikan. Secara geometri penjumlahan vektor dapat dilakukan dengan mentranslasikan satu vektor sedemikian rupa sehingga pangkal vektor tersebut berada tepat pada ujung vektor lainnya. Lalu, membuat anak panah baru dari pangkal sampai ke ujung dua vektor tersebut yang masih bebas.

2. *Hukum komutatif penjumlahan*

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}, \tag{4}$$

   demikian pula $A_x + B_x = B_x + A_x$.

3. *Hukum asosiatif penjumlahan*

$$\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}. \tag{5}$$

4. *Vektor Nol*

   Vektor $\mathbf{O}=[0,0,0]$ disebut vektor nol yang arahnya takterdefinisi. Vektor nol mengikuti

$$\mathbf{A}+\mathbf{O}=\mathbf{O}+\mathbf{A}=\mathbf{A}. \tag{6}$$

5. *Invers*

   Setiap $\mathbf{A}$ memiliki jodoh $-\mathbf{A}$ sedemikian rupa sehingga

$$\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=(-\mathbf{A})+\mathbf{A}=\mathbf{O}. \tag{7}$$

6. *Perkalian vektor*

   Jika α merupakan skalar dan $\mathbf{A}$ adalah vektor, berlaku

$$\alpha\mathbf{A}=\alpha[A_x,A_y,A_z]=[\alpha A_x,\alpha A_y,\alpha A_z]. \tag{8}$$

7. *Hukum asosiatif vektor*

   Jika α,β merupakan skalar dan $\mathbf{A}$ adalah vektor, berlaku

$$\alpha(\beta\mathbf{A})=(\alpha\beta)\mathbf{A}. \tag{9}$$

8. *Hukum distributif penjumlahan vektor*

$$\alpha(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\alpha\mathbf{A}+\alpha\mathbf{B}. \tag{10}$$

9. *Hukum distributif penjumlahan skalar*

$$(\alpha+\beta)\mathbf{A}=\alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{A}. \tag{11}$$

10. *Satu*

$$1\mathbf{A}=\mathbf{A}. \tag{12}$$

Sebelum meninjau vektor lebih jauh akan diperkenalkan terlebih dahulu *Kesamaan vektor*. Persamaan $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ atau $[A_x, A_y, A_z] = [B_x, B_y, B_z]$ ekuivalen dengan tiga buah persamaan

$$A_x = B_x \qquad A_y = B_y \qquad A_z = B_z. \tag{13}$$

Dua buah vektor dikatakan sama jika dan hanya jika komponen-komponennya sama. Secara gemetri, dua buah vektor yang sejajar dan memiliki panjang yang sama dapat dikatakan sebagai vektor yang sama tetapi dengan posisi yang berbeda.

Vektor satuan merupakan vektor yang memiliki panjang satu satuan. Vektor satuan yang mashur dalam ruang tiga dimensi koordinat kartesius adalah $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ dengan $\mathbf{i}$ merupakan vektor satuan arah sumbu x, $\mathbf{j}$ vektor satuan arah sumbu y dan $\mathbf{k}$ vektor satuan arah sumbu z. Vektor satuan tersebut dapat digunakan sebagai *basis vektor* dalam ruang tiga dimensi (definisi basis dapat dipelajari lebih detail pada Aljabar Linier). Oleh karena itu, vektor-vektor dalam ruang tiga dimensi dapat dituliskan menurut

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}. \tag{14}$$

Dalam pekerjaan tulisan vektor satuan lazim ditulis dengan tanda $\hat{}$, contohnya $\hat{i}$.

4. Hasil Kali Skalar

Hasil kali skalar merupakan hasil perkalian dua buah vektor yang berupa skalar. Hasil kali ini lazim disebut *dot product*.

Misal diberikan dua buah vektor $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$, hasil kali skalar dua buah vektor dirumuskan menurut

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z. \tag{15}$$

Hasil kali skalar vektor memenuhi hukum komutatif dan distributif sehingga dapat disimpulkan

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \tag{16}$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}. \tag{17}$$

Kuadrat panjang suatu vektor didefinisikan menurut

$$A^2 = |A|^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2, \tag{18}$$

sehingga dapat disimpulkan bahwa panjang vektor adalah

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}. \tag{19}$$

Panjang suatu vektor $A \geq 0$, dengan $A = 0$ jika $\mathbf{A} = \mathbf{O}$. Secara geometri, sudut yang dibentuk oleh dua buah vektor dalam koordinat kartesius tiga dimensi dapat dirumuskan menurut

$$\cos\theta = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}} = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB} \tag{20}$$

atau

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta. \tag{21}$$

Dua buah vektor disebut *ortogonal* jika hasil kali skalar dua vektor tersebut sama dengan nol

$$\mathbf{A} \perp \mathbf{B} \quad \text{jika} \quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0. \tag{22}$$

Dua buah vektor disebut *ortonormal* jika vektor-vektor tersebut ortogonal dan memiliki panjang satu satuan. Contoh vektor ortonormal ini adalah basis vektor **i**,**j**,**k**, sehingga diperoleh

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} \;=\; \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1, \tag{23}$$

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} \;=\; \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0. \tag{24}$$

Salah satu contoh kasus Fisika yang menggunakan aturan ini adalah konsep usaha dW yang dirumuskan menurut

$$dW = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}. \tag{25}$$

5. Hasil Kali Silang

Hasil kali silang merupakan hasil perkalian dua buah vektor yang memiliki hasil berupa vektor dan arahnya tegak lurus kedua vektor asal. Secara geometri, suatu hasil kali vektor dapat dihitung menurut

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = AB\sin\theta\;\mathbf{n}, \tag{26}$$

dengan θ merupakan sudut antara **A** dengan **B**, **n** merupakan arah vektor hasil kali yang tegak lurus arah **A** dan **B** serta memenuhi kaidah tangan kanan.

Beberapa aturan dalam hasil kali silang ini adalah

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} \;=\; -\mathbf{B}\times\mathbf{A} \tag{27}$$

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C}) \;=\; \mathbf{A}\times\mathbf{B} + \mathbf{A}\times\mathbf{C}. \tag{28}$$

Hasil kali silang basis vektor dalam koordinat kartesius adalah

$$\begin{aligned}
\mathbf{i}\times\mathbf{i} &= \mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=0, && (29)\\
\mathbf{i}\times\mathbf{j} &= \mathbf{k}=-\mathbf{j}\times\mathbf{i} && (30)\\
\mathbf{j}\times\mathbf{k} &= \mathbf{i}=-\mathbf{k}\times\mathbf{j} && (31)\\
\mathbf{k}\times\mathbf{i} &= \mathbf{j}=-\mathbf{i}\times\mathbf{k}. && (32)
\end{aligned}$$

Salah satu contoh kasus Fisika yang menggunakan konsep ini adalah torsi $\mathbf{N}$ yang dirumuskan menurut

$$\mathbf{N}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}. \tag{33}$$

6. Turunan Vektor

Tinjau suatu vektor $\mathbf{A}$ yang hanya bergantung pada variabel u yang dapat dituliskan menurut

$$\mathbf{A}(u)=A_x(u)\mathbf{i}+A_y(u)\mathbf{j}+A_z(u)\mathbf{k}. \tag{34}$$

Turunan $\mathbf{A}$ terhadap variabel u dapat diuraikan menurut

$$\frac{d\mathbf{A}}{du}=\mathbf{i}\frac{dA_x}{du}+\mathbf{j}\frac{dA_y}{du}+\mathbf{k}\frac{dA_z}{du}. \tag{35}$$

Parameter u merupakan contoh sebarang parameter. Sementara itu, parameter yang sering muncul dalam kasus fisika adalah parameter waktu t.

Andaikan vektor posisi $\mathbf{r}$ partikel diketahui menurut

$$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k} \tag{36}$$

masing-masing x, y, z merupakan suatu fungsi yang bergantung menurut waktu. Turunan vektor tersebut dapat diuraikan menurut

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{i}\frac{dx}{dt}+\mathbf{j}\frac{dy}{dt}+\mathbf{k}\frac{dz}{dt} && (37)\\
\mathbf{v} &= \mathbf{i}\dot{x}+\mathbf{j}\dot{y}+\mathbf{k}\dot{z}, && (38)
\end{aligned}$$

dengan

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt},\quad \dot{x}=\frac{dx}{dt},\quad \dot{y}=\frac{dy}{dt},\quad \dot{z}=\frac{dz}{dt}. \tag{39}$$

Sementara, kelajuan v yang merupakan besar kecepatan dirumuskan menurut

$$v=|\mathbf{v}|=\sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}. \tag{40}$$

Percepatan benda **a** yang merupakan turunan dari kecepatan dirumuskan menurut

$$\mathbf{a} = \mathbf{i}\ddot{x} + \mathbf{j}\ddot{y} + \mathbf{k}\ddot{z} \tag{41}$$

dengan

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \quad \ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \ddot{z} = \frac{d\dot{z}}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \tag{42}$$

Salah satu contoh yang dapat ditinjau menggunakan turunan tersebut adalah gerak parabola yang dapat dirumuskan menurut

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}bt + \mathbf{j}\left(ct - \frac{gt^2}{2}\right) + \mathbf{k}d. \tag{43}$$

dengan b, c, g, d masing-masing merupakan konstanta.

7. Kecepatan dan Percepatan pada Koordinat Lengkung