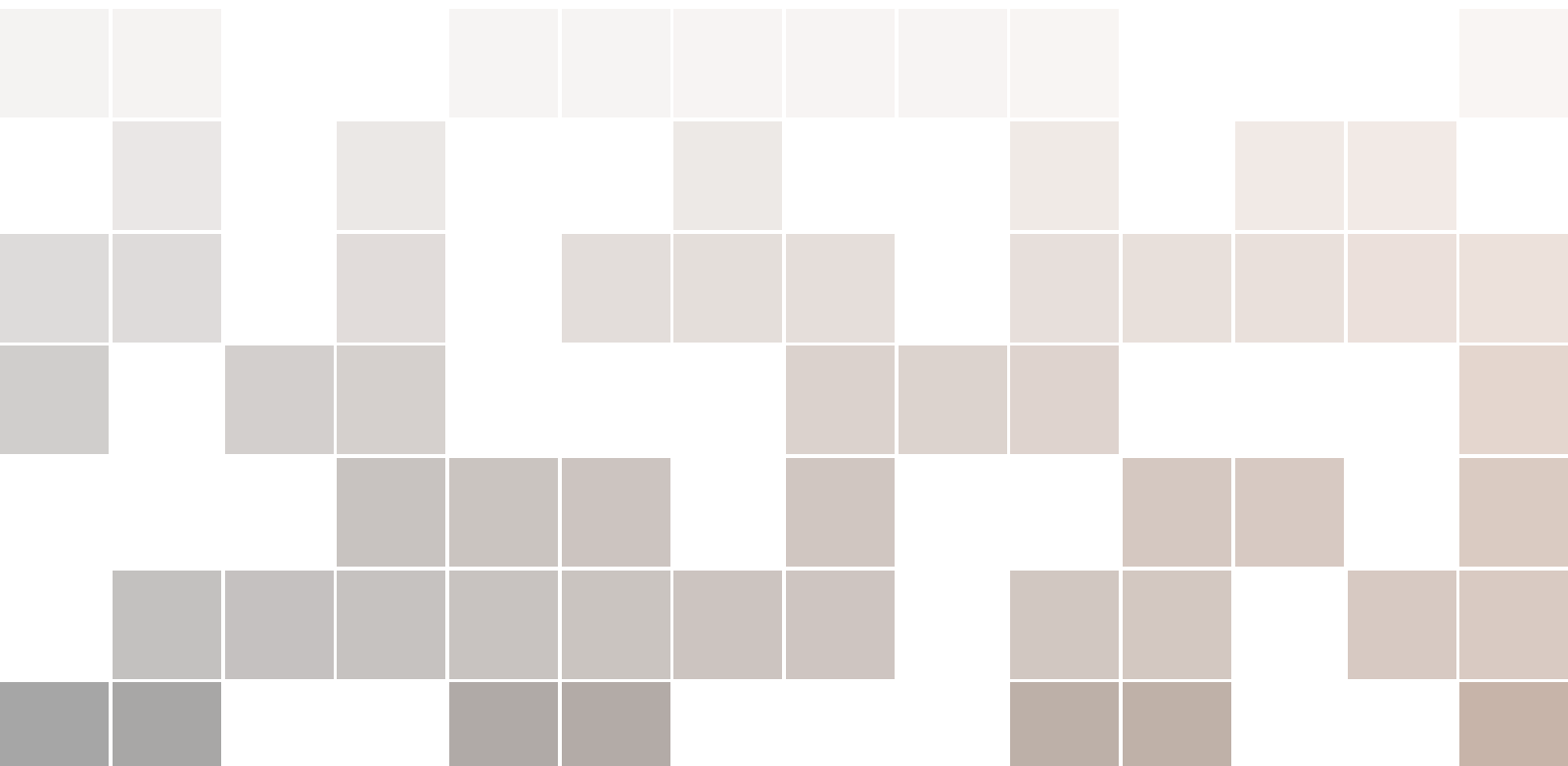


Matematika Fisika

Metode Matematika untuk Fisikawan

Joko Saefan



Copyright © 2015 Joko Saefan

PUBLISHED BY PENDIDIKAN FISIKA UNIVERSITAS PGRI SEMARANG

JOKOSAEFAN@YAHOO.COM

Licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License (the “License”). You may not use this file except in compliance with the License. You may obtain a copy of the License at <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>. Unless required by applicable law or agreed to in writing, software distributed under the License is distributed on an “AS IS” BASIS, WITHOUT WARRANTIES OR CONDITIONS OF ANY KIND, either express or implied. See the License for the specific language governing permissions and limitations under the License.

First printing, March 2015

Daftar Isi

I	Bagian I	
1	Deret Tak Hingga dan Deret Pangkat	11
1.1	Pendahuluan	11
1.2	Uji Konvergensi	13
1.2.1	Uji Perbandingan	14
1.2.2	Uji Integral	14
1.2.3	Uji Rasio	15
1.3	Deret Bolak-balik	17
1.4	Deret Pangkat	17
1.5	Perluasan Fungsi ke Deret Pangkat	20
1.6	Soal-soal Latihan	21
2	Bilangan Kompleks	23
2.1	Pendahuluan	23
2.1.1	Komponen Real dan Imajiner	24
2.1.2	Bidang Kompleks	24
2.1.3	Terminologi dan Notasi	25
2.2	Aljabar Kompleks	27
2.2.1	Bentuk Sederhana	27
2.2.2	Konjugat Kompleks	28
2.2.3	Nilai Mutlak	28
2.2.4	Persamaan Kompleks	29

2.3	Deret Kompleks Tak Hingga	30
2.3.1	Uji Konvergensi	30
2.3.2	Lingkaran Konvergen	30
2.4	Rumusan Euler	32
2.5	Akar dan Pangkat Bilangan Kompleks	35
2.6	Fungsi Eksponensial dan Trigonometri	37
2.7	Fungsi Hiperbolik	38
2.8	Logaritma	39
2.9	Akar dan Pangkat Bentuk Kompleks	40
2.10	Invers Fungsi Trigonometri dan Hiperbolik	40
2.11	Soal-soal Latihan	42
3	Aljabar Linier	45
3.1	Himpunan Persamaan Linier	46
3.1.1	Reduksi Baris	46
3.1.2	Determinan dan Aturan Cramer	48
3.2	Vektor	51
3.2.1	Notasi	51
3.2.2	Besar suatu Vektor	51
3.2.3	Penjumlahan Vektor	52
3.2.4	Perkalian Vektor	55
3.3	Garis dan Bidang	59
3.4	Operasi Matriks	64
3.4.1	Persamaan Matriks	64
3.4.2	Perkalian Matriks dengan Bilangan	64
3.4.3	Penjumlahan Matriks	65
3.4.4	Perkalian Matriks	65
3.4.5	Matriks Null	67
3.4.6	Matriks Identitas	67
3.4.7	Operasi Determinan	67
3.4.8	Terapan Perkalian Matriks	67
3.4.9	Invers Matriks	68
3.5	Matrik Khusus	68
3.6	Ruang Vektor Linier	69
3.6.1	Subruang	71
3.6.2	Kombinasi Linier	71
3.6.3	Bentangan	71
3.6.4	Bebas Linier	71
3.6.5	Himpunan Membangun	72
3.6.6	Basis	72
3.6.7	Dimensi	72
3.7	Soal-soal Latihan	72
4	Diferensial Parsial	73
4.1	Definisi dan Notasi	73
4.2	Diferensial Total	75

4.3	Pendekatan Perhitungan Menggunakan Diferensial	77
4.4	Diferensial Implisit	78
4.5	Dalil Rantai lain	80
4.6	Penerapan	82
4.6.1	Masalah Nilai Maksimum dan Minimum	82
4.6.2	Faktor kendala	83
4.6.3	Masalah Titik Batas	86
4.7	Perubahan Variabel	89
4.7.1	Persamaan Gelombang	89
4.7.2	Transformasi Legendre	90
4.8	Turunan Integral; Aturan Leibneiz'	90
4.9	Soal-soal Latihan	90
5	Integral Lipat	93
5.1	Beberapa Integral Dasar	93
5.2	Integral dua kali dan tiga kali	93
5.3	Beberapa Penerapan	98
5.4	Jacobian	101
5.5	Integral Permukaan	108

II

Bagian II

6	Analisis Vektor	113
6.1	Pendahuluan	113
6.2	Contoh Perkalian Vektor	113
6.2.1	Perkalian rangkap tiga	115
6.3	Turunan Vektor	119
6.4	Turunan Berarah	122
6.5	Beberapa Ungkapan Terkait ∇	124
6.6	Integral Garis	126
6.7	Divergensi dan Teorema Green	131
6.7.1	Teorema Green dalam Bidang	131
6.7.2	Teorema Divergensi	136
6.8	Curl dan Teorema Stokes	142
6.8.1	Teorema Stokes	142
6.8.2	Hukum Ampere	143
7	Persamaan Diferensial Biasa	145
7.1	Pemisahan Variabel	147
7.2	Persamaan Diferensial Orde Pertama	149
7.3	Teknik lain Persamaan Linier Orde Pertama	152
7.3.1	Persamaan Bernoulli	152
7.3.2	Persamaan Eksak	153

7.3.3	Persamaan Homogen	154
7.4	Persamaan Linier Orde Kedua	154
8	Kalkulus Variasi	157
8.1	Geodesik	157
8.2	Persamaan Euler	158
8.3	Persamaan Euler-Lagrange	159
9	Fungsi Khas	161
9.1	Fungsi Faktorial	161
9.2	Fungsi Gamma	162
9.2.1	Definisi Fungsi Gamma	162
9.2.2	Fungsi Gamma Negatif	163
9.2.3	Rumusan Penting terkait Fungsi Gamma	164
9.2.4	Rumusan Stirling	164
9.3	Fungsi Beta	165
9.4	Fungsi Error	169
9.5	Integral dan Fungsi Eliptik	170

III

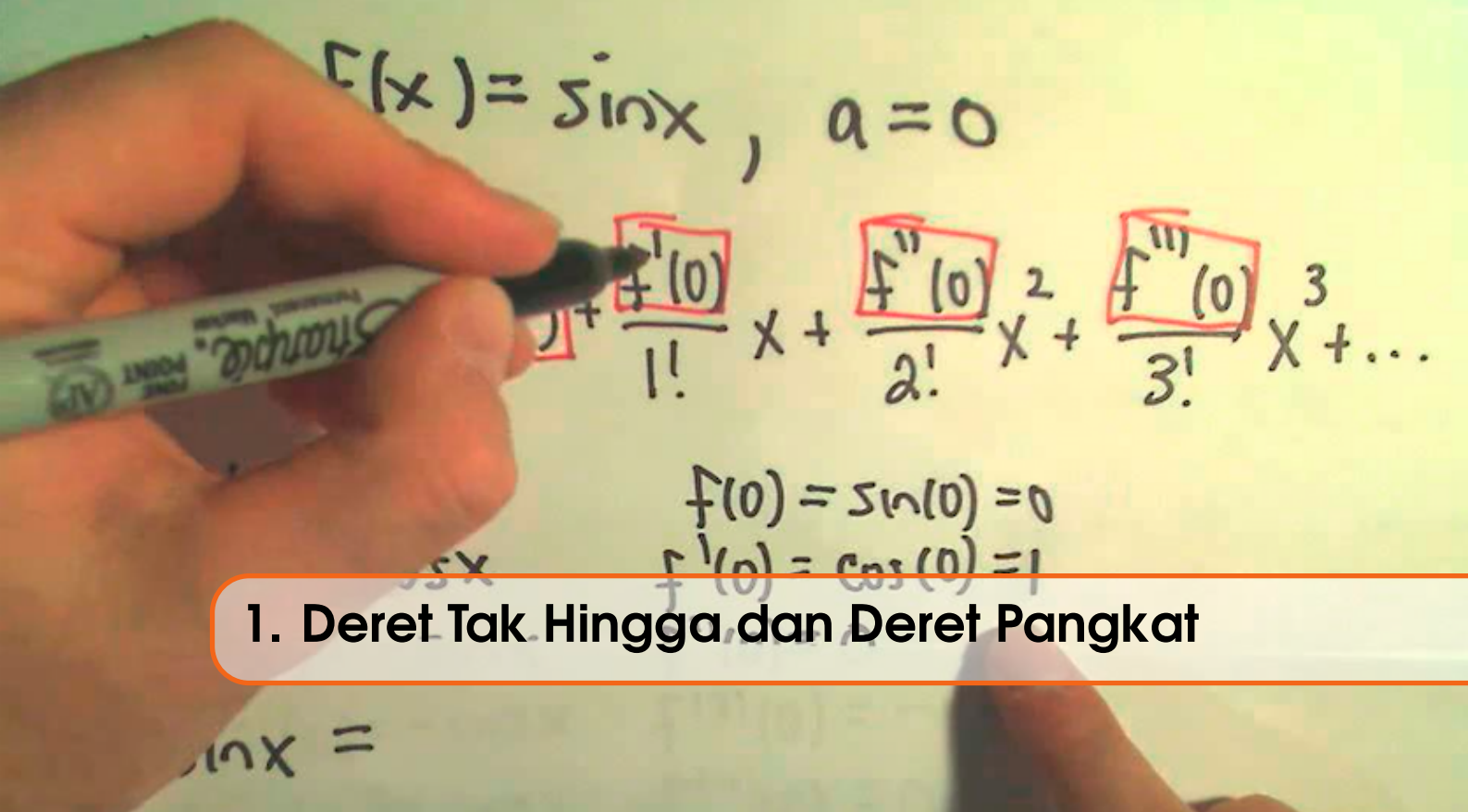
Bagian III

10	Deret Fourier	175
10.1	Fungsi Periodik	175
10.2	Koefisien Fourier	178
10.3	Deret Fourier Bentuk Kompleks	181
10.4	Interval lain	182
10.5	Fungsi Ganjil dan Genap	184
11	Jawaban Deret Persamaan Diferensial	187
11.1	Persamaan Legendre	188
11.1.1	Aturan Leibniz' untuk Hasil Diferensial	191
11.1.2	Rumusan Rodrigues	191
11.2	Persamaan Bessel	192
11.2.1	Jawaban kedua Persamaan Bessel	194
12	Persamaan Diferensial Parsial	197
12.1	Persamaan Laplace: Suhu Keadaan Tunak	198
12.2	Persamaan Difusi	202
12.3	Persamaan Gelombang	205
13	Transformasi Koordinat dan Pengenalan Tensor	209
13.1	Pendahuluan	209
13.2	Transformasi Linier	210

13.3	Transformasi Ortogonal	212
13.4	Swanilai dan Swavektor	212
13.5	Diagonalisasi Matriks	214
13.6	Penerapan Diagonalisasi	215
13.7	Koordinat Lengkung	216
13.7.1	Faktor Skala dan Vektor Basis	217
13.7.2	Koordinat Lengkung Umum	217
13.8	Operator Vektor dalam Koordinat Lengkung	218
13.9	Tensor	218
13.9.1	Pengantar	218
13.9.2	Tensor Kartesian	218
13.9.3	Sistem koordinat umum	218
	Index	221

Bagian I

1	Deret Tak Hingga dan Deret Pangkat	11
1.1	Pendahuluan	
1.2	Uji Konvergensi	
1.3	Deret Bolak-balik	
1.4	Deret Pangkat	
1.5	Perluasan Fungsi ke Deret Pangkat	
1.6	Soal-soal Latihan	
2	Bilangan Kompleks	23
2.1	Pendahuluan	
2.2	Aljabar Kompleks	
2.3	Deret Kompleks Tak Hingga	
2.4	Rumusan Euler	
2.5	Akar dan Pangkat Bilangan Kompleks	
2.6	Fungsi Eksponensial dan Trigonometri	
2.7	Fungsi Hiperbolik	
2.8	Logaritma	
2.9	Akar dan Pangkat Bentuk Kompleks	
2.10	Invers Fungsi Trigonometri dan Hiperbolik	
2.11	Soal-soal Latihan	
3	Aljabar Linier	45
3.1	Himpunan Persamaan Linier	
3.2	Vektor	
3.3	Garis dan Bidang	
3.4	Operasi Matriks	
3.5	Matrik Khusus	
3.6	Ruang Vektor Linier	
3.7	Soal-soal Latihan	
4	Diferensial Parsial	73
4.1	Definisi dan Notasi	
4.2	Diferensial Total	
4.3	Pendekatan Perhitungan Menggunakan Diferensial	
4.4	Diferensial Implisit	
4.5	Dalil Rantai lain	
4.6	Penerapan	
4.7	Perubahan Variabel	
4.8	Turunan Integral; Aturan Leibniz'	
4.9	Soal-soal Latihan	
5	Integral Lipat	93
5.1	Beberapa Integral Dasar	
5.2	Integral dua kali dan tiga kali	
5.3	Beberapa Penerapan	
5.4	Jacobian	
5.5	Integral Permukaan	



1. Deret Tak Hingga dan Deret Pangkat

If the facts don't fit the theory, change the facts.

—Albert Einstein

1.1 Pendahuluan

Kita akan mengawali pelajaran dengan meninjau deret ukur. Deret ukur ini merupakan contoh sederhana dari berbagai deret yang sering muncul. Coba kita ulas lagi mengenai barisan ukur, yaitu barisan yang untuk memperoleh nilai suatu suku dengan mengalikan suku sebelumnya dengan suatu bilangan. Contohnya adalah

$$(a) \quad 2, 4, 8, 16, 32, \dots, \quad (1.1)$$

$$(b) \quad 1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \dots, \quad (1.2)$$

$$(c) \quad a, ar, ar^2, ar^3, \dots. \quad (1.3)$$

Kita dapat secara mudah menginterpretasikan contoh-contoh semacam ini, misalnya adalah pertumbuhan bakteri yang menjadi dua kali lipat setiap 1 jam, 2 jam dan seterusnya (1.1). Kita juga dapat mengandaikan pantulan bola yang menjadi $\frac{2}{3}$ dari ketinggian sebelumnya (1.2). Rumusan umum mengenai barisan tersebut dapat ditulis menurut (1.3) dengan a merupakan suku awal dan r disebut dengan rasio.

Jumlah bakteri pada contoh pertama akan terus berkembang tanpa batas. Lalu, pada contoh kedua, bagaimanapun, ketinggian bola terus menurun dan suatu ketika akan terhenti, sehingga mungkin kita akan bertanya, berapa jarak yang ditempuh bola sampai bola tersebut terhenti. Mari kita lihat jawaban pertanyaan ini. Apabila bola dijatuhkan dari ketinggian 1 meter, jarak yang ditempuh bola dapat diekspresikan menurut

$$1 + 2\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \dots\right) = 1 + 2\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \dots\right). \quad (1.4)$$

Berikutnya, mari kita hitung deret yang berada dalam kurung, yaitu

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \dots. \quad (1.5)$$

Ungkapan ini merupakan contoh deret tak hingga, lalu, bagaimana cara kita menjumlahkannya. Tidak semua deret tak hingga memiliki jumlah berhingga. Kita dapat melihat bahwa deret yang diwakili oleh barisan (1.1) tidak memiliki jumlah berhingga.

Mari kita mencari jumlahan n suku dari contoh (1.3). Rumusan untuk jumlahan sampai suku ke- n dari deret ukur adalah

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}. \quad (1.6)$$

Mari kita jumlahkan (1.5) menggunakan rumusan (1.6), sehingga

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^n \\ &= \frac{\frac{2}{3} [1 - (\frac{2}{3})^n]}{1 - \frac{2}{3}} \\ &= 2 \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right] \end{aligned}$$

Jika n terus bertambah, $(\frac{2}{3})^n$ akan mengecil dan mendekati nol. Lalu, jumlah n suku mendekati 2, jika n meningkat, dan kita dapat mengatakan bahwa jumlahan n suku dari deret tersebut adalah 2. Sehingga total jarak yang ditempuh bola adalah

$$S = 1 + 2 \cdot 2 = 5.$$

Deret-deret semacam (1.5) merupakan contoh deret ukur. Deret tersebut secara umum dapat dituliskan menurut

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots. \quad (1.7)$$

Jumlahan deret ukur sampai suku tak hingga adalah

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n. \quad (1.8)$$

Kita dapat menunjukkan bahwa untuk jumlahan deret semacam ini dapat dilakukan jika dan hanya jika $|r| < 1$, sehingga jumlahnya dapat dirumuskan menurut

$$S = \frac{a}{1 - r}. \quad (1.9)$$

Banyak contoh deret tak hingga lain di samping deret ukur yang sudah dicontohkan, secara umum deret tak hingga dapat tuliskan menurut

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots, \quad (1.10)$$

dengan a_n merupakan bilangan atau fungsi yang diberikan menurut rumusan atau aturan tertentu. Kita juga dapat menulis deret dalam bentuk yang lebih singkat menggunakan tanda jumlahan Σ yang diikuti dengan rumusan untuk suku ke- n . Contohnya kita dapat menuliskan deret

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n^2, \quad (1.11)$$

yang dibaca *Jumlahan n^2 dari $n = 1$ sampai ∞* . Kita dapat menuliskan

$$x - x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{6} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{(n-1)!}. \quad (1.12)$$

Latihan 1.1 Kerjakanlah soal-soal berikut!

1. Kita dapat menuliskan $\frac{1}{3} = 0.3333\cdots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \cdots$. Suatu pecahan desimal yang tidak diabaikan dan berulang dapat dituliskan dalam pecahan bentuk deret tak hingga. Carilah pecahan yang ekuivalen dari desimal yang berulang berikut
 - (a) $0.818181\cdots$
 - (b) $0.583333\cdots$
 - (c) $0.185185\cdots$
2. Dalam proses pemurnian air satu per n kotoran dibuang pada langkah pertama. Dalam setiap tahapan yang dilakukan, jumlah kotoran yang dibuang adalah satu per n dari jumlah kotoran pada tahapan tersebut. Tunjukkanlah bahwa untuk $n = 2$ air yang dibuat akan diperoleh air murni seperti yang diinginkan dan untuk $n = 3$ paling tidak terdapat setengah kotoran yang tersisa sebarang proses pemurnian dilakukan !
3. Beberapa mesin fotokopi akan membuat ukuran hasil fotokopi berkurang. Andaikan kita memiliki bahan yang akan difotokopi sepanjang 8 inchi, ukuran hasil akan muncul $\frac{3}{4}$ kali ukuran semula. Apabila kita fotokopi hasil fotokopi ini, ukurannya akan berkurang dengan rasio yang sama. Hasil ini akan difotokopi terus menerus sampai tidak bisa difotokopi lagi. Jika hasil fotokopi dari awal proses jajarkan di atas meja, berapakah panjang kertas yang diperoleh !

1.2 Uji Konvergensi

Kita telah membicarakan deret yang memiliki jumlahan berhingga. Kita juga sudah melihat bahwa terdapat pula contoh deret yang memiliki jumlahan tak hingga. Jika suatu deret memiliki jumlaha berhingga, deret tersebut dikatakan **konvegen** dan deret yang memiliki jumlahan tak hingga dikatakan **divergen**. Apabila kita menerapkan operasi aljabar dasar pada suatu deret divergen, kita akan menemukan hal yang aneh, untuk itu, amatlah penting untuk mengetahui bahwa deret yang sedang kita tinjau divergen atau konvergen. Coba kita lihat contoh jumlahan deret di bawah ini, andaikan

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots, \quad (1.13)$$

lalu, kita dapat menuliskan

$$\begin{aligned} 2S &= 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots = S - 1, \\ S &= -1. \end{aligned}$$

Hal ini aneh, dan kita tentu dapat tertawa melihat skenario jumlahan deret divergen di atas. Beberapa hal yang mirip dengan kejadian di atas dapat terjadi pada pola yang tersembunyi lain, dan kejadian atau pemberian jawaban yang salah dapat terjadi jika kita tidak berhati-hati saat menggunakan deret tak hingga. Mungkin kita dapat mengenali bahwa deret

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots \quad (1.14)$$

adalah deret divergen, akan tetapi deret

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots \quad (1.15)$$

merupakan deret konvergen. Berangkat dari contoh ini, tentu kita ingin tahu, bagaimana deret yang konvergen dan divergen dibedakan sehingga kita dapat secara benar menerapkan aljabar pada deret tersebut. Oleh karena itu, bagian berikut akan menguraikan beberapa cara untuk memastikan kekonvergenan suatu deret yang dirangkum dalam uji konvergensi.

1.2.1 Uji Perbandingan

Uji ini memiliki dua bagian, yaitu mengambil contoh deret yang konvergen dan divergen.

Andaikan

$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + \cdots \quad (1.16)$$

merupakan deret suku-suku positif yang jelas konvergen. Lalu kita memiliki deret yang akan diuji, katakanlah

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots \quad (1.17)$$

merupakan deret yang konvergen jika $|a_n| \leq m_n$. Lalu berikutnya, andaikan

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + \cdots \quad (1.18)$$

merupakan deret suku positif yang jelas divergen, lalu deret

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| + \cdots \quad (1.19)$$

adalah deret yang divergen jika $|a_n| \geq d_n$ untuk semua n dari beberapa titik.

Contoh 1.2.1 Ujilah Konvergensi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots \quad (1.20)$$

Pertama-tama kita memilih suatu deret ukur terlebih dahulu sebagai perbandingan. Misalkan kita pilih

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots \quad (1.21)$$

sebagai deret pembanding. Suku-suku $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n!$ lebih kecil dibandingkan suku-suku deret $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$ untuk semua $n > 3$. Oleh karena deret ukur pembanding konvergen dengan rasio $\frac{1}{2}$, maka $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n!$ juga merupakan deret konvergen.

Latihan 1.2 Ujilah kekonvergenan deret-deret di bawah ini menggunakan uji perbandingan

1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (1.22)$$

2.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \quad (1.23)$$

1.2.2 Uji Integral

Kita dapat menggunakan uji ini jika suku-suku deret positif dan tidak bertambah, yaitu ketika $a_{n+1} \leq a_n$. Uji ini diterapkan dengan menganggap a_n sebagai fungsi variabel n dan melupakan arti nilai n sebelumnya, lalu kita mengambilnya dan memasukkan semua nilai dalam sekali integral. Uji ini menyatakan bahwa

Andaikan $0 < a_{n+1} < a_n$ untuk $n > N$, lalu $\sum^{\infty} a_n$ dikatakan konvergen jika $\int^{\infty} a_n \, dn$ berhingga dan dikatakan divergen jika integral tersebut tak hingga.

Contoh 1.2.2 Ujilah konvergensi dari deret harmonik

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots \quad (1.24)$$

Menuru uji integral, kita akan menghitung

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{n} dn = \ln n \Big|_1^{\infty} = \infty. \quad (1.25)$$

Oleh karena hasil integral tak hingga, tentu kita tahu bahwa deret tersebut divergen.

Latihan 1.3 Ujilah kekonvergenan deret berikut dengan uji integral;

1.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \quad (1.26)$$

2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 4} \quad (1.27)$$

3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 9}} \quad (1.28)$$



1.2.3 Uji Rasio

Uji integral bergantung pada kemampuan kita untuk mengintegalkan $a_n dn$. Hal ini tidak selalu mudah. Kita memerlukan uji yang lain yang dapat menangani kasus-kasus saat kita tidak dapat menggunakan uji integral. Coba kita tinjau kembali suatu deret ukur yaitu deret yang nilai suatu sukunya dapat diperoleh dengan mengalikan suku sebelumnya dengan rasio r , yaitu

$$a_{n+1} = r a_n \quad \text{atau} \quad r = \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Terkadang, rasio a_{n+1}/a_n tidak konstan, tetapi bergantung pada n . Andaikan nilai mutlak rasio semacam ini kita sebut dengan ρ_n . Lalu kita juga dapat mengandaikan limit ρ_n untuk $n \rightarrow \infty$ kita sebut dengan limit ρ . Berikutnya kita dapat merumuskan ρ_n dan ρ menurut

$$\rho_n = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|, \quad (1.29)$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n. \quad (1.30)$$

Kita tahu bahwa deret ukur konvergen jika $|r| < 1$. Analog dengan hal tersebut kita dapat menyatakan bahwa deret dengan $\rho < 1$ seharusnya konvergen. Kita juga tahu bahwa deret ukur divergen jika $|r| > 1$, dan analog dengan hal ini juga seharusnya deret dengan $\rho > 1$ juga merupakan deret yang divergen. Sementara itu, bagaimanapun jika $\rho = 1$ kita tidak tahu deret tersebut konvergen atau divergen. Rangkuman uji rasio ini dapat ditulis sebagai

$$\text{jika } \begin{cases} \rho < 1, & \text{deret konvergen,} \\ \rho = 1, & \text{gunakan tes lain,} \\ \rho > 1, & \text{deret divergen.} \end{cases} \quad (1.31)$$

Contoh 1.2.3 Ujilah kekonvergenan deret

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots \quad (1.32)$$

Menurut uji rasio kita dapat merumuskan

$$\begin{aligned} \rho_n &= \left| \frac{1}{(n+1)!} / \frac{1}{n!} \right|, \\ &= \frac{n!}{(n+1)!}, \\ &= \frac{n(n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n+1)(n)(n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}, \\ &= \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

lalu

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n, \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1}, \\ &= 0. \end{aligned}$$

Contoh 1.2.4 Ujilah kekonvergenan deret harmonik

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \quad (1.33)$$

Kita dapat menemukan

$$\begin{aligned} \rho_n &= \left| \frac{1}{n+1} / \frac{1}{n} \right|, \\ &= \frac{n}{n+1}, \end{aligned}$$

lalu

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n, \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}, \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}, \\ &= 1. \end{aligned}$$

Di sini, uji rasio tidak dapat menceritakan apa-apa, dan kita harus menggunakan uji yang lain untuk mengetahui kekonvergenan deret harmonik ini.

Latihan 1.4 Gunakanlah uji rasio untuk mengetahui kekonvergenan deret berikut:

1.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2n}} \quad (1.34)$$

2.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{\sqrt{n!}} \quad (1.35)$$

1.3 Deret Bolak-balik

Kita sudah cukup jauh membicarakan deret dengan suku-suku positif termasuk deret dengan nilai mutlak. Sekarang, kita akan meninjau suatu kasus penting dari deret yang memiliki tanda campuran positif dan negatif. *Deret Bolak-balik* merupakan deret yang suku-sukunya memiliki tanda plus dan minus bergantian. Contohnya adalah

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} - \cdots \quad (1.36)$$

Kita dapat memberikan dua pertanyaan terkait dengan deret bolak-balik ini. Apakah deret tersebut konvergen? Apakah deret tersebut sepenuhnya konvergen? Mari kita lihat uraiannya dengan menjawab pertanyaan kedua. Deret nilai mutlak yang diperoleh dari ungkapan (1.36) adalah

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots, \quad (1.37)$$

yang merupakan deret harmonik yang divergen. Lalu, kita dapat mengatakan bahwa deret (1.36) tidak sepenuhnya konvergen. Berikutnya kita dapat bertanya bagaimana kekonvergenan (1.36) dapat diperoleh. Jika suatu deret sepenuhnya konvergen, kita tidak perlu bertanya karena deret yang sepenuhnya konvergen juga merupakan deret yang konvergen. Bagaimanapun deret yang tidak sepenuhnya konvergen dapat konvergen atau divergen. Oleh karena itu kita harus melakukan uji konvergensi terhadap deret bolak-balik yang akan dijelaskan di bawah ini.

Uji untuk deret bolak balik. Deret bolak-balik konvergen jika nilai mutlak suku-sukunya berkurang terus menerus menuju nol, yaitu jika $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ dan $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Dalam contoh kita (1.36), diperoleh

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}, \quad \text{dan} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \quad (1.38)$$

sehingga deret tersebut konvergen.

1.4 Deret Pangkat

Kita telah mendiskusikan deret yang suku-sukunya merupakan konstanta. Lebih jauh, kita akan meninjau deret yang suku-sukunya merupakan suatu fungsi x , yang penting dan sangat berguna dalam berbagai terapan. Deret semacam ini muncul dalam berbagai bentuk, akan tetapi, pada bab ini kita akan membatasi deret dengan suku ke- n yang merupakan perkalian konstanta dengan x^n

atau perkalian konstanta dengan $(x-a)^n$ dengan a suatu konstanta. Deret semacam ini disebut *deret pangkat*, karena suku-suku pengali pangkatnya adalah x atau $(x-a)$.

Menurut definisi deret pangkat dituliskan dalam bentuk

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots, \quad (1.39)$$

atau

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1 (x-a) + a_2 (x-a)^2 + a_3 (x-a)^3 + \cdots, \quad (1.40)$$

dengan koefisien a_n merupakan suatu konstanta. Mari kita lihat contoh-contoh deret pangkat di bawah ini.

$$(a) \quad 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \cdots + \frac{(-x)^n}{2^n} + \cdots, \quad (1.41)$$

$$(b) \quad x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + \cdots, \quad (1.42)$$

$$(c) \quad x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots, \quad (1.43)$$

$$(d) \quad 1 + \frac{(x+2)}{\sqrt{2}} + \frac{(x+2)^2}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n+1}} + \cdots. \quad (1.44)$$

Konvergensi deret pangkat biasa diuji menggunakan uji rasio. Uji ini dilakukan untuk menemukan nilai x yang merupakan deret konvergen. Kita akan mengilustrasikan hal ini dengan menguji contoh-contoh deret pangkat yang telah diberikan. Uji rasio dilakukan dengan membagi suku $n+1$ dengan suku n , dan mengambil nilai mutlak rasio ini untuk mendapatkan ρ_n , dan kemudian mengambil limit ρ_n saat $n \rightarrow \infty$ untuk memperoleh ρ .

Contoh 1.4.1 Berangkat dari (1.41), kita dapat menghitung

$$\begin{aligned} \rho_n &= \left| \frac{(-x)^{n+1}}{2^{n+1}} / \frac{(-x)^n}{2^n} \right| = \left| \frac{x}{2} \right|, \\ \rho &= \left| \frac{x}{2} \right|. \end{aligned}$$

Deret tersebut konvergen untuk $\rho < 1$, yaitu $|x/2| < 1$ atau $|x| < 2$, dan divergen untuk $|x| > 2$. Konvergensi ini dapat kita bayangkan secara grafis bahwa x akan konvergen untuk rentang dari $x = -2$ sampai $x = 2$ pada sepanjang sumbu x . Konvergensi pada titik-titik batas $x = -2$ dan $x = 2$ harus ditinjau secara terpisah. Ketika $x = 2$ kita akan memperoleh

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots,$$

yang divergen. Ketika $x = -2$, kita akan memperoleh

$$1 + 1 + 1 + 1 + \cdots,$$

yang juga merupakan deret divergen. Berikutnya kita dapat menyatakan bahwa deret tersebut konvergen untuk $-2 < x < 2$.

Contoh 1.4.2 Berangkat dari (1.42), kita akan memperoleh

$$\rho_n = \left| \frac{x^{n+1}}{n+1} / \frac{x^n}{n} \right| = \left| \frac{nx}{n+1} \right|,$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{nx}{n+1} \right| = |x|.$$

Deret ini konvergen untuk $|x| < 1$. Lagi-lagi, kita harus meninjau titik batas interval konvergensi yaitu pada $x = 1$ dan $x = -1$. Deret yang diperoleh untuk $x = 1$ adalah

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots,$$

yang merupakan deret bolak-balik harmonis dan merupakan deret konvergen. Sedangkan untuk $x = -1$, kita akan memperoleh

$$-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \cdots,$$

yang merupakan deret harmonik dikalikan dengan -1, dan merupakan deret divergen. Lalu kita dapat menyatakan interval konvergensi sebagai $-1 < x \leq 1$. Setelah meninjau dua contoh ini, kita harus berhati-hati dengan daerah batas untuk memperoleh rentang kekonvergenan suatu deret pangkat.

Contoh 1.4.3 Dalam (1.43), nilai mutlak suku ke- n adalah $x^{2n-1}/(2n-1)!$. Suku $n+1$ dapat diperoleh dengan mengganti n dengan $n+1$, sehingga $2n-1$ diganti dengan $2(n+1)-1 = 2n+1$, dan nilai mutlak suku $n+1$ adalah

$$\left| \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right|. \quad (1.45)$$

Lalu, kita akan memperoleh

$$\rho_n = \left| \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} / \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \right| = \left| \frac{x^2}{(2n+1)(2n)} \right|,$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^2}{(2n+1)(2n)} \right| = 0.$$

Oleh karena $\rho < 1$ untuk semua nilai x , deret ini konvergen untuk semua nilai x .

Contoh 1.4.4 Dalam (1.44), kita memperoleh

$$\rho_n = \left| \frac{(x+2)^{2n+1}}{\sqrt{n+2}} / \frac{(x+2)^2}{\sqrt{n+1}} \right| = \left| (x+2) \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}} \right|,$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| (x+2) \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}} \right| = |x+2|.$$

Deret ini akan konvergen untuk $|x+2| < 1$, yaitu $-1 < x+2 < 1$, atau $-3 < x < -1$. Jika $x = -3$ kita akan memperoleh

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

yang konvergen menurut uji deret bolak-balik. Jika $x = 1$, kita akan memperoleh

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

yang divergen menurut uji integral. Tentu, kita dapat rentang konvergensi untuk deret ini adalah $-3 \leq x < 1$.

Latihan 1.5 Uraikanlah deret berikut dalam beberapa suku dan calirah interval konvergensinya!

1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n(n+1)} \quad (1.46)$$

2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^3 x^n \quad (1.47)$$

3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n} \quad (1.48)$$

4.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+1)^n}{n} \quad (1.49)$$

1.5 Perluasan Fungsi ke Deret Pangkat

Dalam berbagai terapan kerja, akan sangat berguna apabila kita menggunakan deret pangkat untuk mewakili fungsi yang diberikan. Kita akan mengilustrasi satu contoh metode perolehan deret semacam ini, yaitu untuk deret $\sin x$. Kita dapat menganggap bahwa $\sin x$ dapat diperluas dalam suatu deret pangkat menurut

$$\sin x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \quad (1.50)$$

dengan a_n merupakan koefisien yang harus dicari untuk membuat identitas dalam interval konvergensi deret tersebut. Oleh karena interval konvergensi mengandung titik pusat, persamaan (1.50) harus terpenuhi untuk $x = 0$. Jika kita substitusikan $x = 0$ ke persamaan (1.50), akan diperoleh

$$\begin{aligned} \sin 0 &= a_0 + 0 + 0 + \cdots, \\ a_0 &= 0. \end{aligned}$$

Berikutnya, apabila persamaan (1.50) kita diferensialkan, akan diperoleh

$$\cos x = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots.$$

Dan jika kita memasukkan $x = 0$, akan diperoleh

$$\begin{aligned} \cos 0 &= a_1 + 0 + 0 + \cdots, \\ a_1 &= 1. \end{aligned}$$

Selanjutnya, apabila persamaan ini kita diferensialkan dan diberikan $x = 0$ akan diperoleh

$$\begin{aligned}-\sin x &= 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + \dots, \\ 0 &= 2a_2.\end{aligned}$$

Untuk beberapa langkah pendiferensialan berikutnya dan pemberian $x = 0$, kita akan memperoleh

$$\begin{aligned}-\cos x &= 3 \cdot 2a_3 + 4 \cdot 3a_4x^2 + \dots, \\ -1 &= 3!a_3 \\ a_3 &= -\frac{1}{3!} \\ \sin x &= 4 \cdot 3 \cdot 2a_4 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2a_5x + \dots, \\ 0 &= a_4 \\ \cos x &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2a_5 + \dots, 1 = 5!a_5 \\ a_5 &= \frac{1}{5!} \\ &\dots.\end{aligned}$$

Apabila nilai-nilai koefisien a_1, a_2, a_3, \dots yang kita peroleh disubstitusikan ke persamaan (1.50), akan didapatkan

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots. \quad (1.51)$$

Deret-deret yang diperoleh dengan cara semacam ini disebut **Deret Maclaurin** atau **Deret Taylor di sekitar pusat koordinat**.

Berikut adalah rangkuman beberapa perluasan fungsi yang dituliskan dalam bentuk deret pangkat, yang dapat diperoleh menggunakan cara yang telah diuraikan sebelumnya.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad \text{untuk semua } x \quad (1.52)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad \text{untuk semua } x \quad (1.53)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots, \quad \text{untuk semua } x \quad (1.54)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad \text{untuk } -1 < x \leq 1 \quad (1.55)$$

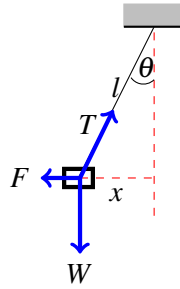
$$\begin{aligned}(1+x)^p &= 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 \\ &\quad + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \dots, \quad \text{untuk } |x| < 1 \quad (1.56)\end{aligned}$$

1.6 Soal-soal Latihan

Latihan 1.6 Kerjakanlah soal-soal di bawah ini!

1. Tenaga elektron pada kelajuan v dalam teori relativitas khusus adalah

$$T = mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2}, \quad (1.57)$$



Gambar 1.1: Balok digantung pada kabel dengan panjang l dan simpangan θ .

dengan m massa elektron dan c adalah kelajuan cahaya. Faktor mc^2 disebut dengan tenaga diam (tenaga saat $v = 0$). Carilah dua suku perluasan deret dari

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \quad (1.58)$$


lalu kalikan dengan mc^2 untuk mendapatkan tenaga pada kelajuan v . Apa yang bisa disimpulkan dari suku kedua deret tenaga tersebut?

2. Perhatikanlah gambar 1.1. Sebuah balok dengan gaya berat W digantung dengan suatu kabel dengan panjang l dan ditarik ke samping sejauh x dengan gaya F . Kita ingin mengetahui seberapa banyak gaya F yang dibutuhkan untuk menjaga berat dalam kesetimbangan pada jarak x tersebut. Berdasarkan fisika dasar tentu kita tahu,

$$T \cos \theta = W, \quad (1.59)$$

$$T \sin \theta = F. \quad (1.60)$$

- (a) Carilah F/W sebagai ekspansi deret pangkat dari θ !
- (b) Biasanya dalam masalah ini, ungkapan rumus dinyatakan tidak dalam θ , melainkan x . Carilah F/W sebagai ekspansi deret pangkat dari x !
3. Penjelasan mengenai ekspansi deret pangkat yang sudah diuraikan pada pertemuan terakhir biasa juga disebut dengan *deret Maclaurin di sekitar pusat koordinat*. Carilah deret Maclaurin untuk contoh-contoh berikut
 - (a) $\cos[\ln(1+x)]$
 - (b) $e^{1-\sqrt{1-x^2}}$



2. Bilangan Kompleks

Nothing in life is to be feared, it is only to be understood. Now is the time to understand more, so that we may fear less.

—Marie Curie

2.1 Pendahuluan

Jika kita bermain-main dengan aljabar, mungkin kita akan bertemu dengan bilangan imajiner, atau bilangan kompleks. Mari kita mulai pelajaran ini dengan meninjau kembali jawaban umum persamaan kuadrat

$$az^2 + bz + c = 0. \quad (2.1)$$

Apabila z merupakan variabel yang tidak diketahui, dapat dirumuskan menurut rumus kuadrat

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (2.2)$$

Jika *diskriminan* $d = (b^2 - 4ac)$ negatif, kita akan menemukan bilangan akar pangkat negatif dalam mencari z . Jika $d < 0$, kita tidak mungkin menggunakan rumusan (2.2) karena hanya bilangan positif yang dapat memiliki akar pangkat real. Oleh karenanya kita perlu memperkenalkan bilangan baru, yang disebut *bilangan imajiner*. Bilangan imajiner ini akan kita lambangkan dengan i yang merupakan $\sqrt{-1}$ atau

$$i = \sqrt{-1}, \text{ sehingga } i^2 = -1. \quad (2.3)$$

Berikutnya kita dapat memperkenalkan beberapa contoh bilangan yang mengandung bilangan imajiner, yaitu

$$\sqrt{-16} = 4i \quad \sqrt{-3} = i\sqrt{3}, \quad i^3 = -i.$$

Akan tetapi contoh berikut ini merupakan bilangan nyata, sekalipun diperoleh dari bilangan imajiner

$$i^2 = -1,$$

$$\sqrt{-2}\sqrt{-8} = i\sqrt{2} i\sqrt{8} = -4,$$

$$i^{4n} = 1.$$

Selanjutnya, kita juga terkadang akan menemukan kombinasi bilangan real dan imajiner. Contohnya adalah jawaban persamaan

$$z^2 - 2z + 2 = 0. \quad (2.4)$$

Apabila rumusan (2.2) digunakan, akan diperoleh

$$\begin{aligned} z &= \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2}, \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}, \\ &= 1 \pm i. \end{aligned}$$

Kita akan menggunakan istilah **Bilangan Kompleks** sebagai satu kesatuan bilangan yang utuh dari bilangan real, imajiner, atau kombinasi keduanya.

2.1.1 Komponen Real dan Imajiner

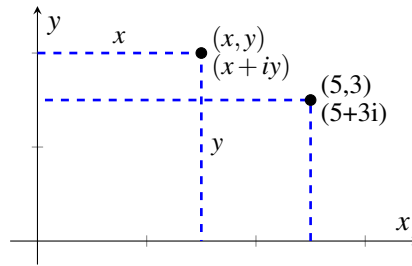
Bilangan kompleks semacam $1 + i$ merupakan jumlahan dua suku. Suku real yang tidak mengandung i disebut **komponen real**, dan koefisien dari i dari suku yang mengandung i disebut **komponen imajiner**. Perhatikanlah dengan hati-hati bahwa komponen imajiner suatu bilangan kompleks tidak imajiner.

Komponen real atau komponen imajiner dapat bernilai nol. Jika komponen real nol, bilangan kompleks disebut imajiner atau *imajiner murni*. dalam kasus ini, biasanya komponen imajiner yang nol tidak ditulis sehingga $0 + 4i$ ditulis $4i$ saja. Apabila komponen imajiner bilangan kompleks bernilai nol, maka bilangan tersebut real. Lalu dalam kasus ini, bilangan $3 + 0i$ ditulis dengan 3 saja.

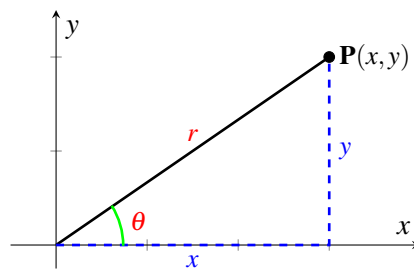
2.1.2 Bidang Kompleks

Dalam analisis geometri, kita melukiskan titik $(5, 3)$ dengan cara yang ditunjukkan pada gambar 2.1. Lalu, sebagaimana kita lihat, lambang $(5, 3)$ juga dapat mewakili bilangan kompleks $5 + 3i$. Titik $(5, 3)$ dapat ditandai dengan $(5, 3)$ itu sendiri atau $5 + 3i$. Analog dengan hal tersebut, suatu bilangan kompleks $x + iy$ dapat diwakili oleh titik (x, y) dalam bidang (x, y) . Demikian juga sebaliknya, titik (x, y) dalam bidang (x, y) dapat diwakili oleh bilangan kompleks $x + iy$. Ketika bidang (x, y) digunakan untuk melukiskan bilangan kompleks, bidang tersebut disebut **bidang kompleks**. Sumbu x disebut sumbu nyata dan sumbu y disebut sumbu imajiner.

Ketika bilangan kompleks dinyatakan dalam $x + iy$, kita dapat menyatakan bilangan tersebut ditulis dalam *bentuk kartesian*, karena x dan y merupakan titik dalam koordinat kartesius yang mewakili bilangan dalam bidang kompleks. Dalam analisis geometri, kita dapat menempatkan suatu titik dalam *koordinat polar* (r, θ) , sebagai ganti koordinat kartesius (x, y) . Kesepadan penulisan bilangan kompleks yang ditulis dalam koordinat polar ditunjukkan pada gambar 2.2.



Gambar 2.1: Contoh titik koordinat pada bidang kompleks



Gambar 2.2: Bentuk polar bidang kompleks

Kesepadanan x dan y yang dari koordinat polar dirumuskan menurut

$$x = r \cos \theta, \quad (2.5)$$

$$y = r \sin \theta. \quad (2.6)$$

Lalu, bilangan kompleks dapat dinyatakan menurut

$$x + iy = r \cos \theta + ir \sin \theta, \quad (2.7)$$

$$= r(\cos \theta + i \sin \theta). \quad (2.8)$$

Ungkapan terakhir ini disebut sebagai **bentuk polar** bilangan kompleks. Ungkapan $\cos \theta + i \sin \theta$ dapat ditulis dengan $e^{i\theta}$, sehingga sangatlah mudah untuk menuliskan bentuk polar bilangan kompleks, yang ditulis kembali sebagai

$$x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta} \quad (2.9)$$

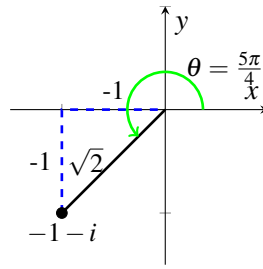
Bilangan kompleks bentuk polar $re^{i\theta}$ sering kali lebih mudah digunakan dibandingkan bentuk kartesian.

2.1.3 Terminologi dan Notasi

Lambang i dan j biasa digunakan untuk mewakili $\sqrt{-1}$. Lambang j sering digunakan dalam masalah yang terkait dengan kelistrikan karena i digunakan sebagai lambang arus.

Coba kita tuliskan kembali hubungan bilangan kompleks dalam bentuk kartesian dan polar, yaitu

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}, \quad (2.10)$$



Gambar 2.3: Ilustrasi bilangan kompleks $z = -1 - i = \sqrt{2} e^{i5\pi/4}$.

dengan z menunjukkan bilangan kompleks, x merupakan komponen real bilangan kompleks z , dan y merupakan komponen imajiner dari z . Besaran r sering disebut sebagai **modulus** atau **nilai mutlak** dari z , dan θ disebut **sudut** dari z atau **fase** atau **amplitudo** dari z . Lambang-lambang tersebut dituliskan menurut

$$\operatorname{Re} z = x, \quad |x| = \operatorname{mod} z = r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (2.11)$$

$$\operatorname{Im} z = y, \text{ (bukan } iy) \quad \text{sudut dari } z = \theta. \quad (2.12)$$

Contoh 2.1.1 Tulislah $z = -1 - i$ dalam bentuk polar?

Kita memiliki $x = -1, y = -1$, dan

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Hasil ini diilustrasikan oleh gambar 2.3. Nilai θ diuraikan menurut

$$\theta = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi,$$

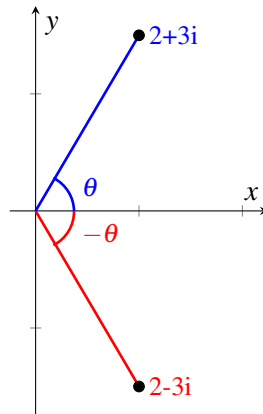
dengan n merupakan bilangan bulat asli positif maupun negatif. Nilai sudut $\theta = 5\pi/4$ terkadang disebut *sudut utama* dari bilangan kompleks $z = -1 - i$. Hasil bilangan kompleks yang diperoleh adalah

$$\begin{aligned} z = -1 - i &= \sqrt{2} \left[\cos \left(\frac{5\pi}{4} + 2n\pi \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{4} + 2n\pi \right) \right], \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right), \\ &= \sqrt{2} e^{i5\pi/4}. \end{aligned}$$

Bilangan kompleks $x - iy$ dapat diperoleh dengan merubah tanda i dalam $x + iy$, yang disebut **konjugat kompleks** atau **konjugat** dari z . Konjugat dari $z = x + iy$ biasa ditulis sebagai $\bar{z} = x - iy$. Terkadang, konjugat dari z dituliskan sebagai z^* .

Perhatikanlah bahwa tanda yang berubah karena konjugat kompleks hanya untuk i saja, contohnya adalah konjugat dari $-7i - 5$ adalah $7i - 5$.

Suatu bilangan kompleks secara tunggal pasti memiliki pasangan konjugatnya. konjugat kompleks, dalam bidang kompleks dilukiskan sebagai pencerminan bayangan oleh sumbu x suatu bilangan kompleks seperti yang ilustasikan pada gambar 2.4. Contoh yang diberikan pada gambar



Gambar 2.4: Contoh ilustrasi konjugat kompleks dari $2 + 3i$.

tersebut adalah konjugat kompleks dari $2 + 3i$ yaitu $2 - 3i$. Berikutnya, dalam bentuk polar, kompleks konjugat memiliki modulus r yang sama, tetapi sudut θ bertukar tanda negatif.

Jika kita memiliki bilangan kompleks

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad (2.13)$$

maka konjugat kompleks dari z adalah

$$\bar{z} = r[\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)] = r(\cos \theta - i \sin \theta) = re^{-i\theta}. \quad (2.14)$$

2.2 Aljabar Kompleks

2.2.1 Bentuk Sederhana

Suatu bilangan kompleks dapat dituliskan dalam bentuk kartesian $x + iy$. Operasi penjumlahan, pembagian, dan perkalian bilangan kompleks tersebut mengikuti aturan dasar aljabar dengan memperhatikan bahwa $i^2 = -1$.

Contoh 2.2.1

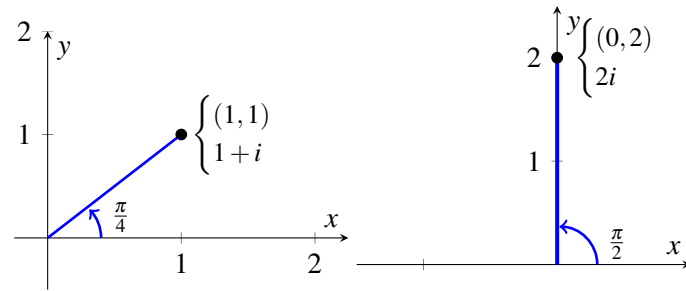
$$(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$$

Apabila kita ingin membagi bilangan kompleks dengan bilangan kompleks yang lain, pertama-tama kita menuliskan operasi ini seperti menulis bilangan pecahan. Lalu menuliskannya dalam bentuk kartesian dan mengalikan pembilang dan penyebut dengan konjugat kompleks dari penyebut yang membuat penyebut menjadi bilangan real.

Contoh 2.2.2

$$\frac{2+i}{3-i} = \frac{2+i}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i} = \frac{6+5i+i^2}{9-i^2} = \frac{5+5i}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

Terkadang, operasi pembagian atau perkalian akan lebih mudah jika dijawab dalam bentuk polar



Gambar 2.5: Contoh operasi perkalian $(1+i)^2 = 2i$. Sebelah kiri merupakan $(1+i)$ dan sebelah kanan merupakan hasil kuadrat $(1+i)$ yaitu $2i$.

Contoh 2.2.3 Carilah $(1+i)^2$!

Pertama-tama kita menggambar titik $(1, 1)$ seperti gambar 2.5 sebelah kiri. Kita akan memperoleh $r = \sqrt{2}$ dan θ sehingga

$$(1+i)^2 = (\sqrt{2}e^{i\pi/2})^2 = 2e^{i\pi/2} = 2i.$$

Hasil yang kita peroleh sama dengan contoh 2.2.

2.2.2 Konjugat Kompleks

Konjugat jumlahan dua bilangan kompleks $\overline{z_1 + z_2}$ sama dengan jumlahan konjugat masing masing bilangan kompleks $\bar{z}_1 + \bar{z}_2$. Jika

$$z_1 = x_1 + iy_1 \quad \text{dan} \quad z_2 = x_2 + iy_2, \quad (2.15)$$

lalu

$$\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = x_1 - iy_1 + x_2 - iy_2 = x_1 + x_2 - i(y_1 + y_2). \quad (2.16)$$

Konjugat kompleks dari $(z_1 + z_2)$ adalah

$$\overline{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)} = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2). \quad (2.17)$$

Kita juga dapat menunjukkan dengan cara yang hampir sama bahwa konjugat turunan atau hasil kali dua buah bilangan kompleks sama dengan turunan atau hasil kali konjugat masing-masing bilangan kompleks.

Contoh 2.2.4 Jika

$$z = \frac{2-3i}{i+4}, \quad (2.18)$$

lalu

$$\bar{z} = \frac{2+3i}{-i+4}. \quad (2.19)$$

2.2.3 Nilai Mutlak

Coba kita tinjau lagi definisi nilai mutlak $|z|$, yaitu

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{akar pangkat positif.} \quad (2.20)$$

Oleh karena $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2$, kita dapat menuliskan

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}. \quad (2.21)$$

Perhatikanlah bahwa $z\bar{z}$ selalu real dan tak negatif karena $z\bar{z} = x^2 + y^2$ dan x real dan y real. Apabila bilangan kompleks dituliskan dalam bentuk polar $z = r e^{i\theta}$, kita akan memperoleh

$$z\bar{z} = r e^{i\theta} \cdot r e^{-i\theta} = r^2, \quad (2.22)$$

dan dengan mengingat kembali definisi nilai mutlak, kita dapat merumuskan

$$|z| = r = \sqrt{r^2} = \sqrt{z\bar{z}}. \quad (2.23)$$

Contoh 2.2.5

$$\left| \frac{\sqrt{5} + 3i}{1 - i} \right| = \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 3i}{1 - i} \frac{\sqrt{5} - 3i}{1 + i}} = \sqrt{\frac{14}{7}} = \sqrt{2}.$$

2.2.4 Persamaan Kompleks

Dua buah bilangan kompleks akan sama jika dan hanya jika masing-masing komponen realnya sama dan komponen imajineranya juga sama. Contohnya adalah $x + iy = 2 + 3i$, hal ini berarti $x = 2$ dan $y = 3$, dengan kata lain, persamaan bilangan kompleks sesungguhnya mengandung dua persamaan yang mengandung bilangan real.

Contoh 2.2.6 Carilah x dan y jika

$$(x + iy)^2 = 2i. \quad (2.24)$$

Oleh karena

$$(x + iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2, \quad (2.25)$$

hal ini ekuivalen dengan dua persamaan real

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 0, \\ 2xy &= 2. \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan pertama $y^2 = x^2$, kita memperoleh $y = x$ atau $-y = -x$. Substitusi persamaan ini ke persamaan kedua akan menghasilkan

$$2x^2 = 2 \quad \text{atau} \quad -2x^2 = 2.$$

Oleh karena x real, x^2 pasti tidak negatif, dan ini bisa kita temukan jika

$$x^2 = 1 \quad \text{dan} \quad y = x,$$

yaitu

$$x = y = 1 \quad \text{dan} \quad y = x = -1.$$

Latihan 2.1 Kerjakanlah soal-soal berikut !

1. Sederhanakanlah bentuk bilangan kompleks berikut, lalu rubahlah dalam bentuk polar !
 - (a) $(i + \sqrt{3})^2$
 - (b) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$
2. Carilah nilai mutlak dari
 - (a) $\frac{2i-1}{i-2}$
 - (b) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5$
3. Carilah semua kemungkinan nilai x dan y yang mungkin dari persamaan berikut
 - (a) $x + iy = (1 - i)^2$
 - (b) $|x + iy| = y - ix$

**2.3 Deret Kompleks Tak Hingga**

Kita telah meninjau deret tak hingga suku-suku real pada bab 1. Kita akan mencoba melakukan hal ini untuk suku-suku kompleks. Mari kita tinjau definisi dan teorema untuk kasus ini. Penjumlahan parsial deret bilangan kompleks adalah bilangan kompleks, Suku ke- n bilangan kompleks ditulis

$$S_n = X_n + iY_n, \quad (2.26)$$

dengan X_n dan Y_n merupakan bilangan real.

2.3.1 Uji Konvergensi

Jika S_n didekati suatu limit $S = X + iY$ saat $n \rightarrow \infty$ kita dapat mengatakan bahwa deret konvergen dan S merupakan jumlahan deret tersebut. Hal ini juga berarti $X_n \rightarrow X$ dan $Y_n \rightarrow Y$, dengan kata lain bahwa komponen imajiner dan komponen real juga konvergen.

Contoh 2.3.1 Ujilah konvergensi deret

$$1 + \frac{1+i}{2} + \frac{(1+i)^2}{4} + \frac{(1+i)^3}{8} + \cdots + \frac{(1+i)^n}{2^n} + \cdots \quad (2.27)$$

Apabila kita menggunakan uji rasio, diperoleh

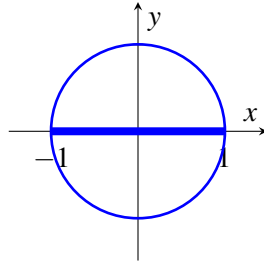
$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(1+i)^{n+1}}{2^{n+1}} / \frac{(1+i)^n}{2^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1+i}{2} \right|, \\ &= \left| \frac{1+i}{2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1. \end{aligned}$$

Oleh karena $\rho < 1$, deret sepenunhya konvergen.

2.3.2 Lingkaran Konvergen

Kita telah membahas deret pangkat x pada bab 1, yaitu $\sum a_n x^n$. Bagian ini akan mencoba membahas deret pangkat suatu bilangan kompleks z , yaitu

$$\sum a_n z^n, \quad (2.28)$$



Gambar 2.6: Radius konvergensi $\sum (-z)^n/n$.

dengan $z = x + iy$ dan a_n adalah bilangan kompleks. Contoh-contoh deret pangkat kompleks adalah

$$(a) \quad 1 - z + \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + \cdots, \quad (2.29)$$

$$(b) \quad 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3} + \cdots = 1 + z - \frac{z^2}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \cdots, \quad (2.30)$$

$$(c) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1-i)^n}{3^n n^2}. \quad (2.31)$$

Andaikan kita menggunakan uji rasio untuk menemukan apakah deret-deret ini sepenuhnya konvergen, berangkat dari (2.29) kita memiliki

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z \cdot n}{n+1} \right| = |z|.$$

Deret akan konvergen jika $\rho < 1$, yaitu jika $|z| < 1$ atau

$$\sqrt{x^2 + y^2} < 1.$$

Ketaksamaan ini merupakan area interior dari lingkaran berjari-jari 1 pada bidang kompleks. Lingkaran ini disebut **lingkaran konvergen** suatu deret tak hingga. Lingkaran ini mengganti interval konvergensi yang kita miliki pada deret real. Faktanya, interval konvergensi deret $\sum (-x)^n/n$ yang merupakan interval $(-1, 1)$ pada sumbu x terkandung dalam lingkaran konvergen $\sum (-z)^n/n$ (gambar 2.6). Hal ini dapat kita terima karena x merupakan nilai z jika $y = 0$. Oleh karena itu, terkadang kita mengatakan **lingkaran** atau **radius** konvergen deret pangkat sekalipun kita hanya meninjau nilai real dari z .

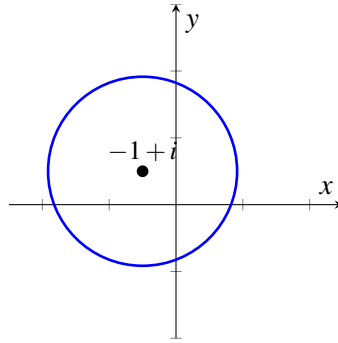
Berikutnya kita akan meninjau (2.30), di sini kita memiliki

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(iz)^{n+1}}{(n+1)!} / \frac{(iz)^n}{(n)!} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{iz}{n+1} \right| = 0. \end{aligned}$$

Deret ini merupakan contoh deret yang konvergen untuk semua nilai z .

Lalu untuk (2.31), kita memiliki

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(z+1-i)}{3} \frac{n^2}{(n+1)^2} \right|, \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z+1-i}{3} \right|. \end{aligned}$$



Gambar 2.7: Radius konvergensi untuk $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1-i)^n}{3^n n^2}$.

Hasil ini menunjukkan bahwa deret akan konvergen untuk

$$|z + 1 - i| < 3 \quad \text{atau} \quad |z - (-1 + i)| < 3.$$

Ketaksamaan ini merupakan area interior lingkaran dengan radius 3 yang berpusat pada $z = -1 + i$ seperti yang diilustrasikan gambar (2.7).

2.4 Rumusan Euler

Ekspansi deret pangkat e^z didefinisikan menurut

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots. \quad (2.32)$$

Deret ini konvergen untuk semua nilai bilangan kompleks z . Berdasarkan hal ini, sangatlah mudah untuk menunjukkan bahwa

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}. \quad (2.33)$$

Ekspansi deret pangkat $\sin \theta$ dan $\cos \theta$ untuk θ real, sudah kita bahas pada bab 1, yaitu

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots, \quad (2.34)$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots. \quad (2.35)$$

Berdasarkan definisi persamaan (2.32), kita dapat menuliskan deret untuk e pangkat baik real atau imajiner. Kita akan menuliskan $e^{i\theta}$ dengan θ real ke dalam ekspansi deret, yaitu:

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} \cdots, \quad (2.36)$$

$$= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} \cdots, \quad (2.37)$$

$$= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots \right). \quad (2.38)$$

Apabila hasil ini kita bandingkan dengan persamaan (2.34) dan (2.35), kita dapat menuliskan

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta. \quad (2.39)$$

Persamaan ini diketahui sebagai **Rumusan Euler**. Hal ini sekaligus membenaran notasi bilangan kompleks yang telah kita tulis sebelumnya, yaitu

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}. \quad (2.40)$$

Contoh 2.4.1 Carilah nilai $2e^{i\pi/6}$!

$2e^{i\pi/6}$ adalah $re^{i\theta}$ dengan $r = 2$ dan $\theta = \pi/6$. Berangkat dari gambar 2.8, dapat dilihat

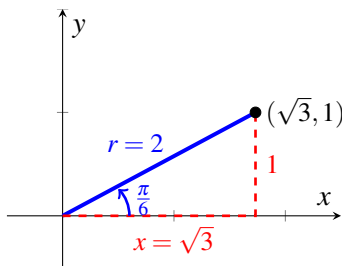
$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, \\ &= 2 \cos \pi/6, \\ &= 2 \frac{1}{2} \sqrt{3} = \sqrt{3} \\ y &= 2 \sin \pi/6 = 1, \end{aligned}$$

dan

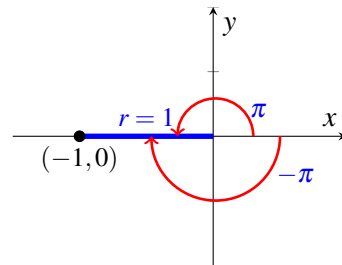
$$z = x + iy = \sqrt{3} + i,$$

sehingga

$$2e^{i\pi/6} = \sqrt{3} + i. \quad (2.41)$$



Gambar 2.8: $2e^{i\pi/6} = \sqrt{3} + i$.



Gambar 2.9: $e^{i\pi} = -1$.

Contoh 2.4.2 Carilah nilai $e^{i\pi}$!

$e^{i\pi}$ adalah $re^{i\theta}$ dengan $r = 1$, $\theta = \pi$. Berdasarkan gambar 2.9, akan diperoleh $x = -1$, $y = 0$, $z = x + iy = -1 + 0i$, sehingga

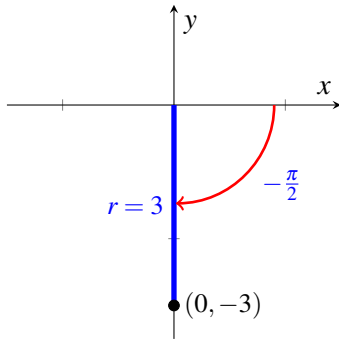
$$e^{i\pi} = -1. \quad (2.42)$$

Perhatikanlah bahwa untuk $r = 1$ dan $\theta = -\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots$, akan memberikan titik yang sama sehingga $e^{-i\pi} = e^{3i\pi} = -1$ dan seterusnya.

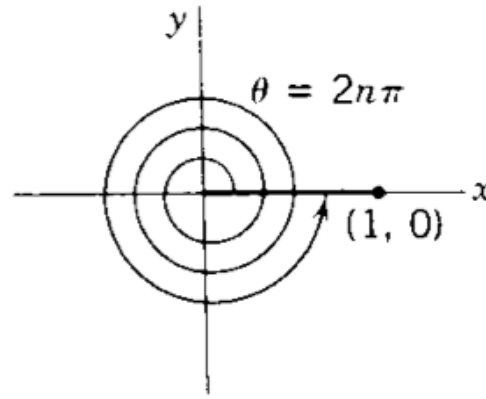
Contoh 2.4.3 Carilah nilai $3e^{-i\pi/2}$!

$3e^{-i\pi/2}$ adalah $re^{i\theta}$ dengan $r = 3$, $\theta = -\pi/2$. Berdasarkan gambar 2.10, akan diperoleh $x = 0$, $y = -3$, sehingga

$$3e^{-i\pi/2} = x + iy = 0 - 3i = -3i. \quad (2.43)$$



Gambar 2.10: $3e^{-i\pi/2} = -3i$.



Gambar 2.11: $e^{2n\pi i} = 1$.

Contoh 2.4.4 Carilah nilai $e^{2n\pi i}$!

$e^{2n\pi i}$ adalah $re^{i\theta}$ dengan $r = 1$, $\theta = 2n\pi = n(2\pi)$. Berdasarkan gambar (2.11), akan diperoleh $x = 1$, $y = 0$, sehingga

$$e^{2n\pi i} = 1 + 0i = 1 \quad (2.44)$$

Bilangan kompleks dapat ditulis dalam $re^{i\theta}$, sehingga dalam aljabar bilangan kompleks kita dapat menuliskan

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \quad (2.45)$$

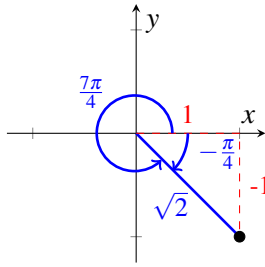
$$z_1 \div z_2 = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad (2.46)$$

Contoh 2.4.5 Carilah

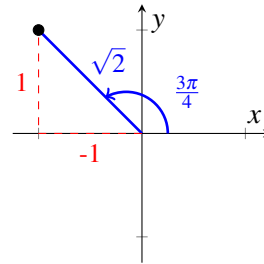
$$\frac{(1+i)^2}{1-i} ! \quad (2.47)$$

Berdasarkan gambar 2.5 kita memiliki $1+i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$. Lalu $1-i$ dilukiskan pada gambar 2.12 dan kita menemukan $r = \sqrt{2}$, $\theta = -\pi/4$, sehingga $1-i = \sqrt{2} e^{-i\pi/4}$. Lalu,

$$\frac{(1+i)^2}{1-i} = \frac{(\sqrt{2} e^{i\pi/4})^2}{\sqrt{2} e^{-i\pi/4}} = \sqrt{2} e^{i\pi/4}. \quad (2.48)$$



Gambar 2.12: Bilangan kompleks $\sqrt{2} e^{3i\pi/4}$.



Gambar 2.13: Bilangan Kompleks $-1 + i$.

Berdasarkan gambar 2.13, kita dapat menemukan $x = -1$, $y = 1$, sehingga

$$\frac{(1+i)^2}{1-i} = x + iy = -1 + i.$$

$i^{1/4}$

2.5 Akar dan Pangkat Bilangan Kompleks

Berdasarkan perkalian dan pembagian bilangan kompleks, **teorema Moivre** menyatakan

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} \quad (2.49)$$

untuk suatu integral n . Pangkat ke- n bilangan kompleks dapat diperoleh dengan pangkat ke- n modulus dan mengalikan sudut θ dengan n . Kasus khusus $r = 1$ adalah hal yang menarik, apabila disubstitusi ke persamaan (2.49) akan diperoleh

$$(e^{i\theta})^n = (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta. \quad (2.50)$$

Persamaan ini dapat digunakan untuk mencari rumusan $\sin 2\theta$, $\sin 3\theta$, dan seterusnya.

Akar ke- n bilangan kompleks z adalah $z^{1/n}$, yang juga merupakan pangkat ke- n bilangan kompleks. Berdasarkan persamaan (2.49) dapat ditunjukkan bahwa

$$z^{1/n} = (re^{i\theta})^{1/n} = r^{1/n} e^{i\theta/n} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta}{n} + i \sin \frac{\theta}{n} \right). \quad (2.51)$$

Rumusan ini harus digunakan dengan hati-hati. Beberapa contoh akan diuraikan di bawah ini.

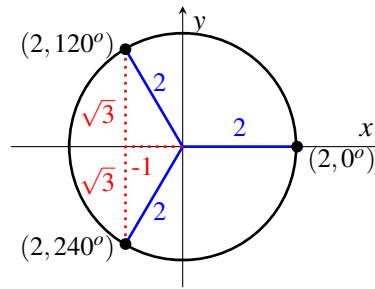
Contoh 2.5.1 Carilah $(1+i)^8$!

Jika $x = 1 + i$, kita akan memperoleh $r = \sqrt{2}$, $\theta = \pi/4$, sehingga dalam bentuk polar dapat dituliskan $1 + i = \sqrt{2} e^{1\pi/4}$. Lalu

$$(1+i)^8 = (\sqrt{2} e^{1\pi/4})^8 = 16 e^{2\pi i} = 16 \cdot 1 = 16.$$

Contoh 2.5.2 Carilah akar pangkat tiga dari 8 !

Kita tahu bahwa jawabannya adalah 2, tetapi ternyata ada 2 jawaban lain yang melibatkan bilangan kompleks. Apabila 8 merupakan bilangan kompleks yaitu $x = 8$, $y = 0$ dalam bidang kompleks, kita akan dapatkan $r = 8$, $\theta = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$. Jika dituliskan dalam bentuk polar,



Gambar 2.14: Ilustrasi bilangan kompleks $\sqrt[3]{8}$.

$8 = 8e^{i2n\pi}$ dengan n bilangan bulat. Lalu, kita akan memperoleh

$$\sqrt[3]{8} = 8^{1/3} = (8e^{i2n\pi})^{1/3} = 2e^{i2n\pi/3}.$$

Sehingga kita dapat menguraikan secara lebih detail bahwa (detail sudut diilustrasikan dalam derajat)

$$\begin{aligned} r = 2, \quad \theta &= 0^\circ, 360^\circ/3, 720^\circ/3, 1080^\circ/3, \dots \\ &= 0^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 360^\circ, \dots \end{aligned}$$

Plot grafik titik-titik tersebut dapat dilihat pada gambar 2.14. Semua titik tersebut merupakan anggota lingkaran berjari-jari 2 yang terpisah sebesar $360^\circ/3 = 120^\circ$. Apabila dimulai dari 0° yang ditambah 120° secara berulang-ulang, kita akan memperoleh 3 sudut seperti yang ditunjukkan gambar 2.14 tersebut.

Berikutnya, kita cari nilai $\sqrt[3]{8}$ dalam bentuk kartesian. Kita akan memperoleh

$$\sqrt[3]{8} = 2, \quad -1 + i\sqrt{3}, \quad -1 - i\sqrt{3},$$

atau kita dapat menghitung dari hubungan $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, sehingga

$$\sqrt[3]{8} = \left\{ \begin{array}{l} 2(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ) \\ 2(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) \\ 2(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 2 \\ -1 + i\sqrt{3} \\ -1 - i\sqrt{3} \end{array} \right\}.$$

Apabila masalah dijawab dalam radian, sudut-sudut tersebut di atas dituliskan menurut

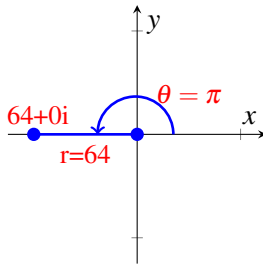
$$\theta = 0, 2\pi/3, 4\pi/3, 6\pi/3, \dots,$$

dan kita menemukan

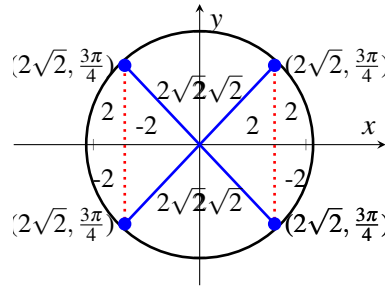
$$\sqrt[3]{8} = \left\{ \begin{array}{l} 2e^0 \\ 2e^{2\pi i/3} \\ 2e^{4\pi i/3} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 2 \\ -1 + i\sqrt{3} \\ -1 - i\sqrt{3} \end{array} \right\}.$$

Contoh 2.5.3 Carilah dan gambarlah semua nilai dari $\sqrt[4]{-64}$!

Titik -64 diperlihatkan oleh gambar 2.15 dengan $x = -64$, $y = 0$. Apabila titik ini ditulis dalam bentuk polar, akan diperoleh $r = 64$, $\theta = \pi + 2n\pi$ dengan $n = 0, 1, 2, \dots$. Oleh karena



Gambar 2.15: Bentuk polar 64

Gambar 2.16: Penggambaran $\sqrt[4]{-64}$

$z^{1/4} = r^{1/4} e^{i\theta/4}$, bentuk polar dari $\sqrt[4]{-64}$ adalah

$$\begin{aligned} r &= \sqrt[4]{64} = 2\sqrt{2}, \\ \theta &= \frac{\pi}{4}, \frac{\pi+2\pi}{4}, \frac{\pi+4\pi}{4}, \frac{\pi+6\pi}{4}, \dots, \\ &= \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \dots \end{aligned}$$

Titik-titik ini diperlihatkan oleh gambar 2.16. Semua titik tersebut merupakan anggota lingkaran dengan jari-jari $2\sqrt{2}$ yang terpisah sejauh $2\pi/4 = \pi/2$. Titik pertama dimulai dari $\theta = \pi/4$, lalu ditambah $\pi/2$ berulang-ulang, sehingga sepenuhnya akan diperoleh 4 buah nilai akar. Kita dapat menuliskan $\sqrt[4]{-64}$ dalam bentuk kartesian dari gambar 2.16, yaitu

$$\sqrt[4]{-64} = \pm 2 \pm 2i.$$

Jika kita menggunakan derajat untuk menuliskan sudutnya, diperoleh

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{180^\circ}{4}, \frac{180^\circ + 360^\circ}{4}, \frac{180^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{4}, \dots \\ &= 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ, \dots \end{aligned}$$

2.6 Fungsi Eksponensial dan Trigonometri

Meskipun kita telah menuliskan e^z dalam ekspansi deret pangkat, kita juga dapat menuliskan e^z dalam bentuk yang lain. Kita dapat juga merumuskan bahwa

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \quad (2.52)$$

Rumusan ini lebih mudah digunakan daripada penggunaan deret pangkat jika kita ingin mencari nilai e^z untuk z yang sudah diketahui.

Contoh 2.6.1

$$e^{2-i\pi} = e^2 e^{-i\pi} = e^2 \cdot (-1) = -e^2 \quad (2.53)$$

Kita sudah melihat bahwa terdapat hubungan yang dekat antara eksponensial kompleks dan fungsi trigonometri sudut real seperti diungkapkan pada rumusan Euler. Kita dapat menuliskan

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos \theta + i \sin \theta, \\ e^{-i\theta} &= \cos \theta - i \sin \theta. \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan di atas, kita dapat menjawab $\sin \theta$ dan $\cos \theta$, sehingga kita memperoleh

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \quad (2.54)$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}. \quad (2.55)$$

Rumusan ini sangat berguna saat mengevaluasi integral, karena hasil eksponensial lebih mudah diintegrasikan dibandingkan hasil integral sinus dan cosinus.

Kita dapat pula mendefinisikan $\sin z$ dan $\cos z$ dari bilangan kompleks z dengan deret pangkatnya sebagai e^z . Bagaimanapun, akan lebih mudah menggunakan bilangan kompleks yang sepadan sebagai definisi untuk $\sin z$ dan $\cos z$. Lalu, kita dapat mendefinisikan

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad (2.56)$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \quad (2.57)$$

Contoh 2.6.2

$$\cos i = \frac{e^{i \cdot i} + e^{-i \cdot i}}{2} = \frac{e^{-1} + e}{2} = \frac{1}{2e} + \frac{e}{2} = 1.543 \dots \quad (2.58)$$

Contoh 2.6.3

Buktikanlah bahwa

$$\frac{d}{dz} \sin z = \cos z ! \quad (2.59)$$

Kita dapat menuliskan

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

sehingga

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \sin z &= \frac{1}{2i} (ie^{iz} + ie^{-iz}), \\ &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \\ &= \cos z. \end{aligned}$$

2.7 Fungsi Hiperbolik

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad (2.60)$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}. \quad (2.61)$$

Fungsi hiperbolik lain dinamai dan didefinisikan dengan cara yang hampir sama dengan fungsi trigonometri, yaitu

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \coth z = \frac{1}{\tanh z} \quad (2.62)$$

$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}, \quad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z}. \quad (2.63)$$

Persamaan (??) dan (??) dapat ditulis sebagai

$$\sin iy = i \sinh y, \quad (2.64)$$

$$\cos iy = \cosh y. \quad (2.65)$$

Kita dapat melihat bahwa fungsi hiperbolik y merupakan fungsi trigonometri iy . Oleh karena hubungan ini, kita dapat melihat rumusan fungsi hiperbolik sangat mirip dengan identitas trigonometri dan rumusan kalkulus. Akan tetapi keduanya tidak identik, bagaimanapun kita dapat membuktikan bahwa

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1 \text{ (bandingkan dengan } \sin^2 z + \cos^2 z = 1), \quad (2.66)$$

$$\frac{d}{dz} \cosh z = \sinh z \text{ (bandingkan dengan } \frac{d}{dz} \cos z = -\sin z). \quad (2.67)$$

2.8 Logaritma

Dalam dasar-dasar matematika kita telah belajar mencari logaritma bilangan positif saja. Faktanya, kita tidak mendapatkan apa-apa untuk logaritma bilangan negatif. Fakta ini benar jika kita menggunakan bilangan real, tetapi tidak jika kita menggunakan bilangan kompleks. Bagian ini akan menjelaskan bagaimana mencari logaritma bilangan kompleks. Jika

$$z = e^w, \quad (2.68)$$

lalu, menurut definisi

$$w = \ln z. \quad (2.69)$$

Kita dapat menggunakan hukum-hukum eksponensial saat mengoperasikan bilangan tersebut. Kita dapat menuliskan

$$z_1 z_2 = e^{w_1} \cdot e^{w_2} = e^{w_1 + w_2}. \quad (2.70)$$

Apabila kita ambil logaritma dari persamaan tersebut akan diperoleh

$$\ln z_1 z_2 = w_1 + w_2 = \ln z_1 + \ln z_2. \quad (2.71)$$

Kita dapat mencari komponen real dan imajiner logaritma bilangan kompleks menurut

$$w = \ln z = \ln(re^{i\theta}) = \ln r + \ln e^{i\theta} = \ln r + i\theta, \quad (2.72)$$

dengan $\ln r$ berarti logaritma real dasar yang berbasis e untuk r bilangan positif.

Oleh karena θ memiliki nilai bilangan yang tak hingga, bilangan kompleks memiliki banyak nilai logaritma, dan yang membedakan satu dengan yang lainnya adalah sudutnya yang merupakan perkalian $2\pi i$. **Nilai Pokok** dari $\ln z$ biasanya yang hanya ditulis untuk menghitung logaritma. Rentang nilai pokok tersebut adalah $0 < \theta < 2\pi$.

Contoh 2.8.1 Carilah $\ln(-1)$!

Apabila $z = -1$ dituliskan dalam bentuk polar, akan diperoleh $r = 1$, $\theta = \pi, -\pi, 3\pi, \dots$. Lalu

$$\ln(-1) = \ln(1) + i(\pi \pm 2n\pi) = i\pi, -i\pi, 3i\pi.$$

Contoh 2.8.2 Carilah $\ln(1+i)$!

Apabila $z = \ln(1+i)$ dituliskan dalam bentuk polar, akan diperoleh $r = \sqrt{2}$, $\theta = \pi/4 \pm 2n\pi$. Lalu

$$\ln(1+i) = \ln \sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} \pm 2n\pi\right) = 0.347 \dots + i\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right).$$

2.9 Akar dan Pangkat Bentuk Kompleks

Persamaan $\ln a^b = b \ln a$ setara dengan $a^b = e^{b \ln a}$ untuk bilangan real. Apabila kita menggunakan bilangan kompleks, kita juga dapat memberikan rumusan tersebut, yaitu

$$a^b = e^{b \ln a} \quad (2.73)$$

dengan a dan b merupakan bilangan kompleks dan $a \neq e$.

Contoh 2.9.1 Carilah semua nilai i^{-2i} !

Berdasarkan aturan logaritma kita menemukan $\ln i = \ln 1 + i(\pi/2 \pm 2n\pi) = i(\pi/2 \pm 2n\pi)$. Lalu, kita memperoleh

$$i^{-2i} = e^{-2i \ln i} = e^{-2i \cdot i(\pi/2 \pm 2n\pi)} = e^{\pi \pm 4n\pi} = e^\pi, e^{3\pi}, e^{-3\pi}, \dots$$

Contoh 2.9.2 Carilah semua nilai $i^{1/2}$!

Kita dapat menemukan $i^{1/2} = e^{1/2 \ln i} = e^{i(\pi/4 \pm n\pi)} = e^{i\pi/4} e^{in\pi}$. Kita dapat menghitung bahwa $e^{in\pi} = +1$ untuk n genap dan $e^{in\pi} = -1$ untuk n ganjil, sehingga

$$i^{1/2} = \pm e^{i\pi/4} = \pm \frac{1+i}{2}.$$

2.10 Invers Fungsi Trigonometri dan Hiperbolik

Kita telah mendefinisikan fungsi trigonometri dan hiperbolik suatu bilangan kompleks z . Contohnya

$$w = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \quad (2.74)$$

Berikutnya kita dapat mendefinisikan invers cosinus atau $\arccos w$ yang dirumuskan menurut

$$z = \arccos w \quad \text{jika} \quad w = \cos z. \quad (2.75)$$

Saat bermain dengan bilangan real kita tak akan mendapatkan nilai $\sin x$ dan $\cos x$ yang lebih dari 1. Akan tetapi hal ini tidak benar saat kita bermain dengan bilangan kompleks z . Kita dapat menemukan bahwa $\sin z$ dan $\cos z$ yang lebih dari 1.

Contoh 2.10.1 Kita akan membuktikan

$$z = \arccos 2 \quad \text{atau} \quad \cos z = 2. \quad (2.76)$$

Kita dapat menuliskan rumusan tersebut sebagai

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2.$$

Andaikan $u = e^{iz}$, lalu $e^{-iz} = u^{-1}$, dan persamaan akan menjadi

$$\frac{u + u^{-1}}{2} = 2.$$

Apabila kedua ruas kita kalikan dengan $2u$, akan diperoleh

$$u^2 + 1 = 4u \quad \text{atau} \quad u^2 + 4u + 1 = 0.$$

Persamaan yang diperoleh berbentuk persamaan kuadrat. Jawaban persamaan ini adalah

$$u = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

atau

$$e^{iz} = u = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Apabila kedua ruas dilogaritmakan, akan diperoleh

$$\begin{aligned} iz &= \ln(2 \pm \sqrt{3}) = \text{Ln}(2 \pm \sqrt{3}) + 2n\pi i, \\ \arccos 2 &= z = 2n\pi - i\text{Ln}(2 \pm \sqrt{3}) = 2n\pi \mp 1.317i, \end{aligned}$$

Berikutnya secara instruktif kita akan mencari nilai $\cos z$, untuk $iz = \ln(\pm\sqrt{3})$ kita akan memperoleh

$$\begin{aligned} e^{iz} &= e^{\ln(2 \pm \sqrt{3})} = 2 \pm \sqrt{3}, \\ e^{-iz} &= \frac{1}{e^{iz}} = \frac{1}{2 \pm \sqrt{3}} = \frac{2 \mp \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 \mp \sqrt{3}, \end{aligned}$$

lalu

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{3} + 2 \mp \sqrt{3}}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Contoh 2.10.2 Dalam tabel integral, kita mungkin akan menemukan integral tak tentu

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} \tag{2.77}$$

atau

$$\sinh^{-1} \frac{x}{a} \quad \text{atau} \quad \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}). \tag{2.78}$$

Bagaimanakah hubungan suku-suku tersebut di atas !

Kita dapat mengambil

$$z = \sinh^{-1} \frac{x}{a}$$

atau

$$\frac{x}{a} = \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Kita akan menjawab z sebagaimana sudah dijelaskan sebelumnya. Andaikan $e^z = u$, maka $e^{-z} = 1/u$, sehingga

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{u} = \frac{2x}{a}, \\ au^2 - 2xu - a &= 0, \\ e^z = u &= \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4a^2}}{2a} = \frac{x \pm \sqrt{x^2 + a^2}}{a} \end{aligned}$$

Nilai $e^z > 0$ untuk z real, sehingga kita harus memilih jawaban yang bertanda positif. Lalu kita memiliki

$$z = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \ln a.$$

2.11 Soal-soal Latihan

Latihan 2.2 Kerjakanlah soal-soal berikut!

- Sederhakanlah bentuk bilangan kompleks berikut, lalu rubahlah dalam bentuk polar !
 - $(i + \sqrt{3})^2$
 - $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$
- Carilah nilai mutlak dari
 - $\frac{2i-1}{i-2}$
 - $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5$
- Carilah semua kemungkinan nilai x dan y yang mungkin dari persamaan berikut
 - $x + iy = (1 - i)^2$
 - $|x + iy| = y - ix$
- Deskripsikan secara geometri himpunan titik-titik dalam bidang kompleks yang memenuhi persamaan
 - $|z - 1 + i| = 2$
 - $|z + 1| + |z - 1| = 8$
- Carilah kelajuan v dan percepatan a jika diketahui posisi $z = (1 + it)/(2t + i)$! ($v = dz/dt$, $a = d^2z/dt^2$)
- Nyatakanlah bilangan kompleks berikut dalam bentuk $x + iy$!
 - $3e^{2(1+i\pi)}$
 - $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^4$
- Carilah semua nilai akar dan gambarlah nilai akar tersebut dari:
 - $\sqrt[3]{2i - 2}$
 - $\sqrt[5]{i}$
- Carilah bilangan kompleks berikut dalam bentuk $x + iy$:
 - $e^{3\ln 2 - i\pi}$
 - $\cos(\pi - 2i \ln 3)$
- Dalam integral berikut, nyatakanlah sinus dan cosinus dalam bentuk eksponensial, lalu buktikan bahwa

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 4x \, dx = \pi \quad (2.79)$$

10. Buktikanlah bahwa
 - (a) $\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$
 - (b) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$
11. Carilah komponen real, imajiner, dan nilai mutlak dari
 - (a) $\cos(ix)$
 - (b) $\sin(4 + 3i)$
12. Nyatakanlah bilangan kompleks berikut dalam bentuk $x + iy$
 - (a) $\ln(i + \sqrt{3})$
 - (b) $(2i)^{1+i}$
 - (c) $\sin \left[i \ln \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2} \right) \right]$



3. Aljabar Linier

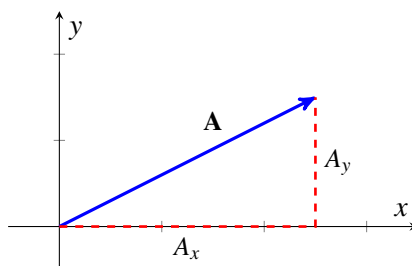
Nothing in life is to be feared, it is only to be understood. Now is the time to understand more, so that we may fear less.

—Marie Curie

Bab ini akan mendiskusikan kombinasi antara aljabar dan geometri yang sangat penting dalam berbagai terapan. Kita dapat melihat dalam himpunan persamaan linier yang dapat ditaksir sebagai perubahan variabel yaitu

$$\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = cx + dy, \end{cases} \quad (3.1)$$

dengan a , b , c , d merupakan suatu konstanta. Kita dapat berpikir bahwa persamaan tersebut (3.1) secara geometri mengatakan pergerakan titik (x, y) ke titik lain (x', y') , dengan operasi yang sering dikenal dengan transformasi bidang. Pada pandangan lain, kita dapat mengatakan bahwa (x, y) dan (x', y') merupakan komponen komponen vektor dari titik pusat ke suatu titik, lalu persamaan (3.1) menceritakan bagaimana masing masing vektor berubah ke vektor lain dalam bidang tersebut.



Gambar 3.1: Vektor A dengan A_x merupakan komponen x dan A_y komponen y .

3.1 Himpunan Persamaan Linier

3.1.1 Reduksi Baris

Matriks dapat berupa susunan persegi suatu besaran yang biasanya ditulis dalam kurung besar semacam

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Kita akan melambangkan matrik dengan huruf Romawi seperti A (atau B , C , M , r , dan seterusnya). Komponen matrik dituliskan dengan indeks bawah seperti A_{ij} , dengan i menunjukkan nomor baris dan j menunjukkan nomor kolom. Komponen-komponen matriks persamaan (3.2) adalah $A_{11} = 1$, $A_{12} = 5$, $A_{13} = -2$, $A_{21} = -3$, $A_{22} = 0$, $A_{23} = 6$. Kita akan menyebut matriks dengan jumlah kolom m dan jumlah baris n dengan *matriks m kali n* .

Transpose suatu matrik ditulis dengan

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 0 \\ -2 & 6 \end{pmatrix},$$

yang merupakan transpose dari matriks persamaan (3.2), untuk melakukannya kita mengganti kolom sebagai baris dan baris sebagai kolom. Transpose secara umum dirumuskan menurut

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}. \quad (3.3)$$

Contoh 3.1.1 Andaikan diketahui suatu himpunan persamaan linier

$$\begin{cases} 2x & -z & = 2, \\ 6x + 5y + 3z & = 7, \\ 2x - y & = 4. \end{cases} \quad (3.4)$$

Coba kita tuliskan himpunan ini secara seragam yaitu x segaris ke atas pada ruas kiri, demikian juga variabel lain, dan konstanta segaris pada ruas kanan. Ada beberapa matriks menarik yang dapat kita hubungkan dengan persamaan (3.4) di atas. Pertama-tama adalah matriks koefisien yang dapat kita tulis sebagai M , yaitu

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 6 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lalu ada dua matriks dengan 1 kolom, yang kita sebut dengan r dan k , masing-masing yaitu

$$r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Jika kita mengganti notasi x , y , z dengan x_1 , x_2 , x_3 dan komponen konstanta k ditulis dengan k_1 , k_2 , k_3 , persamaan (3.4) dapat dituliskan menurut

$$\sum_{j=1}^3 M_{ij}x_j = k_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Berikutnya kita akan meninjau suatu matriks yang dapat diperoleh dari persamaan (3.4), yang akan kita sebut dengan A , yaitu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 6 & 5 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Perhatikanlah bahwa tida kolom pertama merupakan matriks M dan kolom keempat merupakan konstanta pada ruas kanan. Pekerjaan yang akan kita lakukan adalah mencari titik potong ketiga garis persamaan (3.4) menggunakan suatu cara yang disebut *reduksi baris*. Cara reduksi baris ini merupakan cara yang sistematis dengan kombinasi linier persamaan yang diberikan untuk menghasilkan kombinasi persamaan yang lebih sederhana akan tetapi masih tetap ekuivalen. Contoh penguraianya akan diberikan sebagai berikut.

1. Langkah pertama kita dapat mengeliminasi suku x pada persamaan kedua dan ketiga persamaan (3.4). Langkah yang dilakukan adalah baris kedua dikurangi tiga kali baris pertama, lalu hasilnya diletakkan pada baris kedua dan baris ketiga dikurangi baris pertama, lalu hasilnya diletakkan pada baris ketiga yang dituliskan menurut

$$\begin{cases} 2x - z = 2, \\ 5y + 6z = 1, \\ -y + z = 2. \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Berikutnya kita akan menukar baris kedua dengan baris ketiga. (Langkah ini hanya trik untuk mempermudah)

$$\begin{cases} 2x - z = 2, \\ -y + z = 2, \\ 5y + 6z = 1. \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Berikutnya kita akan mengeliminasi y . Baris ketiga ditambah lima kali baris dua, lalu hasilnya diletakkan pada baris ketiga, yang hasilnya adalah

$$\begin{cases} 2x - z = 2, \\ -y + z = 2, \\ 11z = 11. \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 11 & 11 \end{pmatrix}.$$

4. Langkah akhir adalah membagi baris ketiga dengan 11 untuk mendapatkan hasil yang sederhana dan menggunakannya untuk mengeliminasi suku yang pada persamaan lain, sehingga.

$$\begin{cases} 2x = 2, \\ -y = 1, \\ z = 1. \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan penguraian terakhir kita mendapatkan $x = 3/2$, $y = -1$, $z = 1$. Matrik reduksi baris dituliskan menurut

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hal yang penting untuk dipahami terkait proses reduksi baris ini adalah pengambilan kombinasi linier persamaan asal. Proses ini dapat *reversibel*, sedemikian rupa sehingga didapat persamaan yang sederhana yang terkait dengan persamaan asal.

Beberapa dasar pengoperasian reduksi baris secara sederhana dapat dirangkum sebagai berikut:

1. Menukar dua baris yang berbeda
2. Mengalikan atau membagi baris dengan suatu konstanta
3. Menjumlahkan atau mengurangi suatu baris dengan baris lainnya.

3.1.2 Determinan dan Aturan Cramer

Matriks sederhana menampilkan himpunan bilangan yang tidak memiliki nilai. Bagaimanapun, untuk matrik persegi kita dapat memperoleh suatu bilangan penting yang biasa disebut **determinan**. Bagian ini akan menguraikan cara memperoleh determinan dan menggunakan cara ini pada suatu aplikasi tertentu.

Determinan

Determinan suatu matrik A ditulis dengan **det A**. Apabila diketahui matrik 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Determinan matrik tersebut dirumuskan menurut

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc. \quad (3.6)$$

Persamaan (3.6) menunjukkan determinan orde dua karena berasal dari matrik 2×2 . Berikutnya kita akan mengevaluasi determinan matrik untuk orde yang lebih tinggi.

Pertama-tama kita memerlukan beberapa definisi dan notasi. Kita akan menulis determinan orde ke- n untuk determinan seperti di bawah ini

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (3.7)$$

Perhatikanlah bahwa a_{23} merupakan elemen pada baris kedua kolom ketiga, *supskrips* pertama menunjukkan nomor baris dan *supskrips* kedua menunjukkan nomor kolom. Berikutnya, secara umum elemen a_{ij} merupakan baris ke- i kolom ke- j . Terkadang kita akan menuliskan $|a_{ij}|$ untuk menunjukkan determinan elemen a_{ij} .

Apabila kita membuang satu baris dan satu kolom dari determinan orde n , kita dapat memiliki determinan untuk orde $n - 1$. Andaikan kita membuang satu baris dan satu kolom yang terkandung dalam elemen a_{ij} , sisa elemen kita sebut dengan determinan M_{ij} . Contoh dalam determinan

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 7 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}, \quad (3.8)$$

andaikan dipilih elemen minor $a_{23} = 4$, kita memperoleh determinan

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix},$$

yang merupakan elemen-elemen bukan baris kedua dan kolom ketiga. Tanda minor $(-1)^{i+j}M_{ij}$ disebut *kofaktor* dari a_{ij} . Dalam contoh sebelumnya, elemen 4 berada pada baris ($i = 2$) dan kolom ($j = 3$), sehingga $i + j = 5$, dan kofaktor dari nilai 4 tersebut adalah $(-1)^5 M_{23} = -11$. Berikutnya akan lebih mudah jika tanda (plus minus) untuk fakto $(-1)^{i+j}$ diberikan dalam *checkbox* sebagai berikut:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - & \text{dst.} \\ - & + & - & + \\ & & \text{dst} & & \ddots \\ & & & & + & - \\ & & & & - & + \end{vmatrix}. \quad (3.9)$$

Lalu tanda $(-1)^{i+j}$ ini dilekatkan pada M_{ij} .

Cara memperoleh determinan adalah mengalikan elemen-elemen dalam satu baris (atau satu kolom) dengan kofaktornya lalu menjumlahkan hasilnya.

Contoh 3.1.2 Kita akan mengevaluasi determinan dalam (3.8) menggunakan kolom ketiga, yaitu

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 7 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} &= 2 \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot 1 - 4 \cdot 11 + 5 \cdot 38 \\ &= 148. \end{aligned}$$

Lalu, untuk mengecek jawaban tersebut, kita dapat menggunakan elemen baris pertama, yaitu

$$1 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 11 + 135 + 2 = 148.$$

Manfaat Determinan

Fakta-fakta penting tentang determinan akan diuraikan di bawah ini. Pernyataan ini diberikan tanpa pemberian bukti

1. Jika masing-masing elemen dalam satu baris (atau kolom) determinan dikalikan dengan bilangan k , sama dengan nilai determinan dikalikan bilangan k .
2. Nilai determinan nol jika
 - (a) semua elemen dalam satu baris nol,
 - (b) dua baris (atau dua kolom) identik,
 - (c) dua baris (atau dua kolom) sebanding.
3. Jika dua baris (atau dua kolom) suatu determinan ditukar, nilai determinan akan berubah tanda.
4. Nilai determinan tidak berubah jika baris ditulis sebagai kolom dan kolom ditulis sebagai baris.

Contoh 3.1.3 Evaluasilah determinan

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{vmatrix} \quad (3.10)$$

Jika kita menukar baris dengan kolom dalam D , kita akan memiliki,

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -a & b \\ a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{vmatrix}$$

Terlihat bahwa $D = -D$, sehingga $D = 0$.

Aturan Cramer

Aturan Cramer ini merupakan bentuk determinan untuk jawaban persamaan linier dengan n variabel tidak diketahui ketika terdapat satu jawaban eksak.

Berikut akan diuraikan aturan Cramer untuk menyelesaikan dua persamaan dengan dua variabel yang tidak diketahui. Mari kita tinjau himpunan persamaan

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases} \quad (3.11)$$

Jika kita mengalikan persamaan pertama dengan b_2 dan persamaan kedua dengan b_1 , lalu hasilnya dibagi dengan x , akan diperoleh

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Apabila dilakukan cara yang untuk menyelesaikan y , akan diperoleh

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Apabila digunakan determinan, jawaban untuk dua persamaan di atas dapat ditulis menurut

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Contoh 3.1.4 Gunakanlah aturan Cramer untuk menyelesaikan persamaan berikut:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 3, \\ x - 2y = 5. \end{cases} \quad (3.12)$$

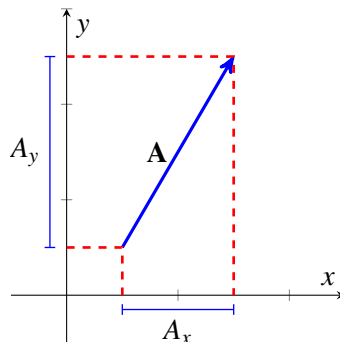
Kita mendapatkan

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 3 = -7. \\ x &= \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = \frac{-6 - 15}{-7} = 3. \\ y &= \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = \frac{10 - 3}{-7} = -1. \end{aligned}$$

3.2 Vektor

3.2.1 Notasi

Kita dapat mencirikan vektor dengan huruf tebal (contoh **A**) dan komponen vektor dengan indeks bawah atau atas (contoh A_x atau A^x) sebagaimana dicontohkan pada gambar 3.2. Oleh karena tidak mudah menuliskan vektor dalam notasi ini, kita dapat menuliskannya dengan tanda panah di atas huruf (**A**).



Gambar 3.2: Contoh vektor dan komponen-komponennya.

3.2.2 Besar suatu Vektor

Panjang anak panah yang mewakili suatu vektor **A** disebut dengan *panjang* atau *besar* vektor **A** (ditulis dengan $|\mathbf{A}|$ atau A) atau dalam penerapan tertentu disebut *norm* **A** (ditulis $\|\mathbf{A}\|$).

$$A = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (3.13)$$

Contoh 3.2.1 Suatu gaya **F** memiliki komponen x 4 satuan dan komponen y 3 satuan seperti

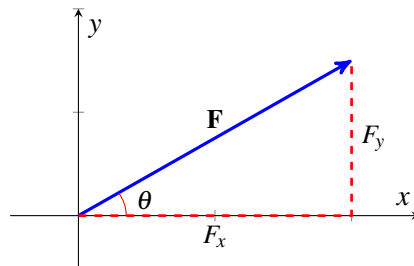
pada gambar 3.3. Kita dapat menuliskan

$$F_x = 4 \text{ satuan},$$

$$F_y = 3 \text{ satuan},$$

$$|\mathbf{F}| = 5 \text{ satuan},$$

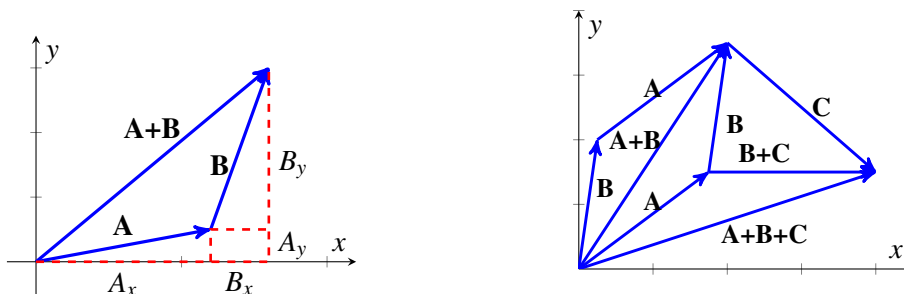
$$\theta = \arctan \frac{3}{4}.$$



Gambar 3.3: Vektor \mathbf{F} beserta komponen-komponenya.

3.2.3 Penjumlahan Vektor

Ada dua cara untuk mendapatkan memperoleh hasil penjumlahan vektor. *Pertama* dengan hukum paralelogram: Untuk memperoleh $\mathbf{A+B}$, tempatkan ekor \mathbf{B} pada kepala \mathbf{A} dan buat garis lurus dari ekor \mathbf{A} sampai kepala \mathbf{B} seperti pada gambar 3.4.



Gambar 3.4: Perolehan penjumlahan vektor dengan paralelogram.

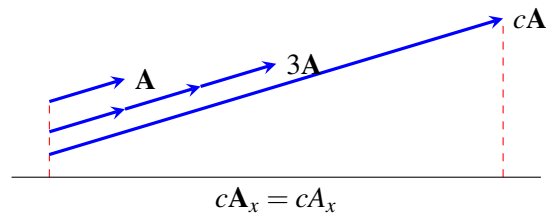
Kedua, $\mathbf{A+B}$ diperoleh dengan menjumlahkan komponen-komponen \mathbf{A} dan komponen \mathbf{B} . Komponen $\mathbf{A+B}$ adalah $A_x + B_x$ dan $A_y + B_y$.

Apabila kita memperhatikan gambar 3.4 sebelah kanan, kita dapat memperoleh definisi lain tentang penjumlahan vektor. Penjumlahan vektor akan memenuhi

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= \mathbf{B} + \mathbf{A} && \text{(hukum komutatif penjumlahan),} \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} &= \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) && \text{(hukum asosiatif penjumlahan).} \end{aligned} \quad (3.14)$$

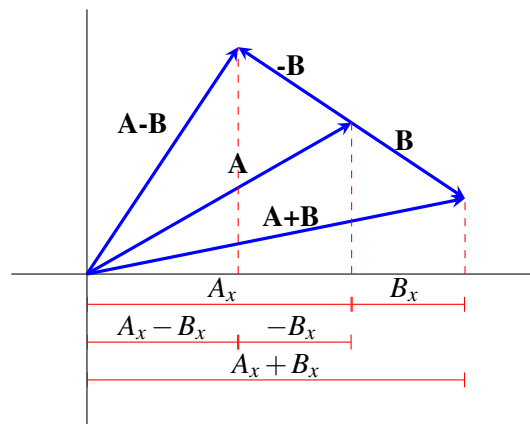
Dalam kata lain, vektor dapat dijumlahkan dengan menggunakan hukum aljabar biasa.

Kita menuliskan lambang $3\mathbf{A}$ untuk $\mathbf{A} + \mathbf{A} + \mathbf{A}$. Berdasarkan penjumlahan vektor di atas, kita dapat mengatakan bahwa $\mathbf{A} + \mathbf{A} + \mathbf{A}$ merupakan 3 kali vektor sepanjang \mathbf{A} dan dalam arah yang sama dengan \mathbf{A} , dengan masing masing komponen $3\mathbf{A}$ sebanding dengan 3 kali komponen \mathbf{A} . Berdasarkan fakta alam ini kita dapat mendefinisikan $c\mathbf{A}$ sebagai c kali vektor sepanjang \mathbf{A} dan dalam arah yang sama dengan \mathbf{A} , dengan komponen $c\mathbf{A}$ adalah c kali komponen \mathbf{A} dan c merupakan bilangan real positif (gambar 3.5).



Gambar 3.5: Vektor $3\mathbf{A}$ yang sebanding dengan \mathbf{A} .

Vektor negatif didefinisikan sebagai vektor dengan besar yang sama, akan tetapi arahnya berlawanan. Gambar 3.6 menunjukkan bahwa $-\mathbf{B}$ merupakan negatif dari komponen-komponen \mathbf{B} . Kita dapat mendefinisikan pengurangan vektor dengan mengatakan bahwa $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ berarti penjumlahan \mathbf{A} dengan $-\mathbf{B}$. Masing-masing komponen $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ diperoleh dengan mengurangi komponen-komponen \mathbf{A} dan \mathbf{B} , yaitu $(\mathbf{A}-\mathbf{B})_x = A_x - B_x$, dan seterusnya. Pengurangan vektor ini dapat dilakukan seperti penjumlahan vektor, yaitu paralelogram dan penjumlahan aljabar biasa.



Gambar 3.6: Ilustrasi pengurangan vektor.

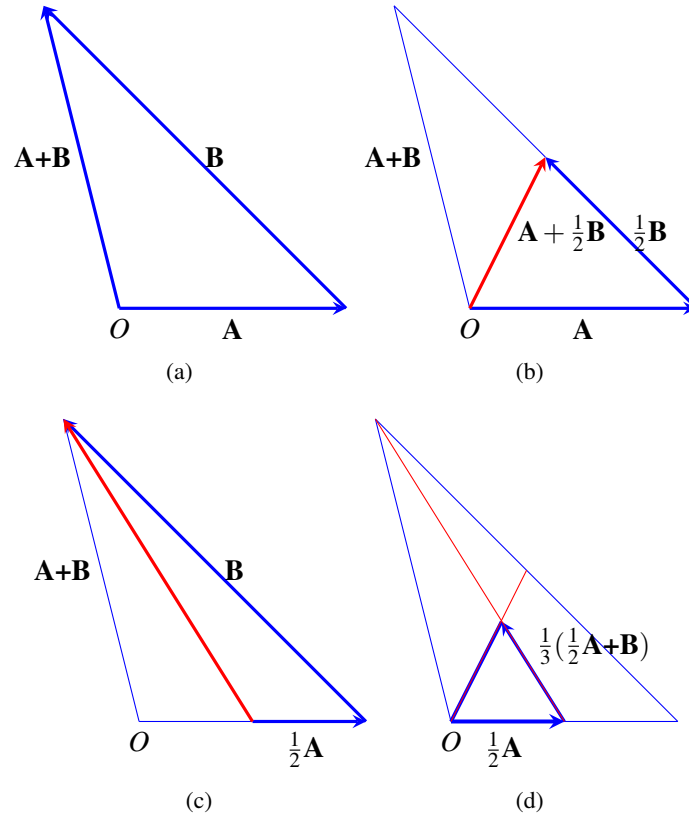
Vektor nol merupakan vektor dengan besar nol, komponen-komponennya nol dan tidak memiliki arah. Vektor ini dapat muncul dari $\mathbf{A} = \mathbf{B} - \mathbf{B} = \mathbf{0}$ atau $\mathbf{A} = c\mathbf{B}$ dengan $c = 0$.

Vektor satuan merupakan vektor dengan besar satu. Jika $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$, tentu kita akan memperoleh $\mathbf{A}/|\mathbf{A}|$ merupakan vektor satuan.

Kita telah melihat bahwa terdapat dua cara penjumlahan vektor yaitu secara geometri (penjumlahan ekor dan kepala), dan secara aljabar (penjumlahan komponen-komponennya). Berikutnya kita akan meninjau contoh penerapan ini. Beberapa fakta akan memperlihatkan bahwa cara geometri akan lebih mudah menunjukkan suatu vektor tanpa memperhatikan komponen-komponennya atau sistem koordinat.

Contoh 3.2.2 Tunjukkanlah bahwa median irisan segitiga adalah dua pertiga garis salah satu vertex ke titik tengah sisi yang berlawanan. Pembuktian ini dapat dilakukan dengan membuat dua sisi segitiga dari \mathbf{A} dan \mathbf{B} . Sisi ketiga merupakan $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ dengan menggunakan cara paralelogram, dengan arah \mathbf{A} , \mathbf{B} , dan $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ ditunjukkan pada gambar 3.7. Jika kita menjumlahkan $\frac{1}{2}\mathbf{B}$ ke \mathbf{A} (gambar 3.7(b)), akan diperoleh suatu vektor dari titik O ke titik tengah sisi yang berlawanan yaitu titik tengah \mathbf{B} . Kita sekarang memiliki $\frac{2}{3}(\mathbf{A} + \frac{1}{2}\mathbf{B})$ perluasan dari O ke P dalam 3.7(b). Kita ingin menunjukkan bahwa P merupakan titik irisan dari ketiga median dan juga "titik $\frac{2}{3}$ " masing-masing irisan. Vektor dari R ke Q gambar 3.7(c) merupakan $\frac{1}{2}\mathbf{A} + \mathbf{B}$. Titik $\frac{2}{3}$ dari garis ini adalah titik P' . Vektor dari R ke P' ini adalah $\frac{1}{3}(\frac{1}{2}\mathbf{A} + \mathbf{B})$. Berikutnya titik dari O ke P' adalah

$\frac{1}{2}\mathbf{A} + \frac{1}{3}(\frac{1}{2}\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \frac{2}{3}\mathbf{A} + \frac{1}{2}\mathbf{B}$. Titik P dan P' merupakan titik yang sama dan merupakan ketiga median yang memiliki titik $\frac{2}{3}$.



Gambar 3.7: Perolehan median segitiga dari dua buah vektor \mathbf{A} dan \mathbf{B} yang diketahui.

Vektor beserta komponen-komponennya

Kita akan meninjau himpunan sumbu koordinat seperti pada gambar 3.8. Andaikan vektor \mathbf{i} merupakan vektor satuan arah sumbu x positif, dan \mathbf{j} dan \mathbf{k} merupakan vektor satuan arah y dan z positif.

Jika A_x dan A_y merupakan komponen skalar dari vektor pada bidang (x, y) , maka $\mathbf{i}A_x$ dan $\mathbf{j}A_y$ merupakan komponen vektor, dan jumlahnya adalah \mathbf{A} yaitu

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y, \quad (3.15)$$

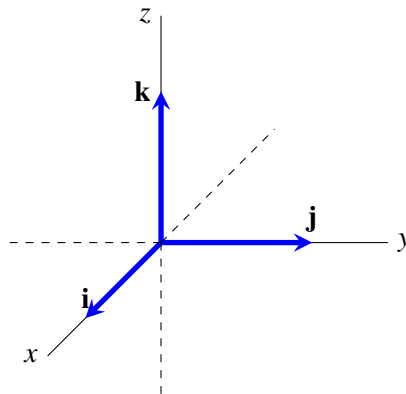
seperti ditunjukkan pada gambar 3.9. Berikutnya dalam tiga dimensi \mathbf{A} dirumuskan

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z. \quad (3.16)$$

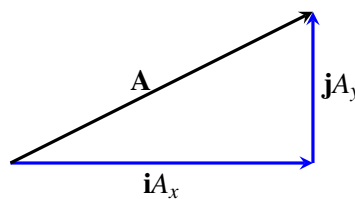
Vektor dalam bentuk ini dapat secara mudah dijumlahkan. Jika \mathbf{A} dan \mathbf{B} merupakan vektor-vektor dalam dua dimensi, kita dapat menjumlahkan

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= (\mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y) + (\mathbf{i}B_x + \mathbf{j}B_y), \\ &= \mathbf{i}(A_x + B_x) + \mathbf{j}(A_y + B_y). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Hasil ini memang mudah didapatkan yaitu dengan menjumlahkan komponen-komponen yang sama.



Gambar 3.8: Sumbu-sumbu koordinat x , y , dan z .



Gambar 3.9: Vektor \mathbf{A} beserta komponen-komponennya.

3.2.4 Perkalian Vektor

Hasil kali dua buah vektor terdiri dari dua macam. *Pertama* adalah **Hasil kali skalar** yang hasilnya berupa skalar, dan *kedua* adalah **hasil kali silang** yang hasilnya berupa vektor.

Hasil kali skalar

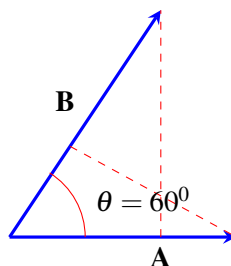
Menurut definisi hasil kali skalar \mathbf{A} dan \mathbf{B} (ditulis $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$) merupakan suatu skalar yang sama dengan besarnya \mathbf{A} dikalikan besarnya \mathbf{B} dikalikan cosinus sudut antara kedua vektor tersebut menurut

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta. \quad (3.18)$$

Kita dapat meninjau bahwa persamaan (3.18) memenuhi hukum komutatif perkalian, yaitu

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}. \quad (3.19)$$

Interpretasi yang bermanfaat dari hasil kali skalar ditunjukkan pada gambar 3.10. $|\mathbf{B}| =$



Gambar 3.10: Interpretasi hasil kali skalar.

8, $|\mathbf{A}| = 6$. Proyeksi \mathbf{B} pada $\mathbf{A} = 4$, sehingga $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 6 \cdot 4 = 24$, atau proyeksi \mathbf{A} pada $\mathbf{B} = 3$, sehingga $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 3 \cdot 8 = 24$.

Oleh karena $|\mathbf{B}| \cos \theta$ merupakan proyeksi \mathbf{B} pada \mathbf{A} , kita dapat menuliskan

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| \text{ kali (proyeksi } \mathbf{B} \text{ pada } \mathbf{A}),$$

atau alternatifnya adalah

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{B}| \text{ kali (proyeksi } \mathbf{A} \text{ pada } \mathbf{B}).$$

Berdasarkan persamaan (3.18), kita juga dapat menemukan bahwa

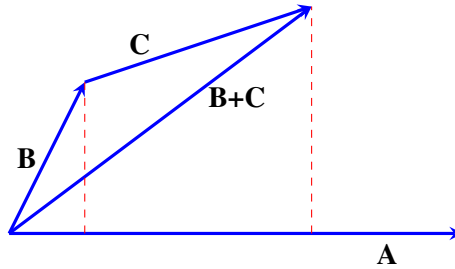
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2 \cos 0^\circ = |\mathbf{A}|^2 = A^2.$$

Terkadang A^2 ditulis sebagai $|\mathbf{A}|^2$ atau A^2 .

Perhatikanlah gambar 3.11, kita dapat melihat bahwa proyeksi $\mathbf{B} + \mathbf{C}$ pada \mathbf{A} sama dengan proyeksi \mathbf{B} pada \mathbf{A} ditambah proyeksi \mathbf{C} pada \mathbf{A} . Lalu, kita dapat menuliskan

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= |\mathbf{A}| \text{ kali (proyeksi } (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \text{ pada } \mathbf{A}), \\ &= |\mathbf{A}| \text{ kali (proyeksi } \mathbf{B} \text{ pada } \mathbf{A} + \text{proyeksi } \mathbf{C} \text{ pada } \mathbf{A}), \\ &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Proyeksi tersebut di atas merupakan hukum distributif untuk perkalian skalar. Kita juga dapat



Gambar 3.11: Ilustrasi hukum distributif hasil kali skalar.

memperoleh

$$\begin{aligned} (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}, \\ &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Kita akan meninjau $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ dalam komponen-komponennya sebaik definisi (3.18), yaitu

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z) \cdot (\mathbf{i}B_x + \mathbf{j}B_y + \mathbf{k}B_z). \quad (3.22)$$

Kita dapat mengalikan komponen-komponen ini menggunakan hukum distributif. Menurut definisi hasil kali skalar kita akan memperoleh

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = |\mathbf{i}| |\mathbf{i}| \cos 0^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1,$$

mirip dengan perkalian tersebut

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1,$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1,$$

dan

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = |\mathbf{i}| |\mathbf{j}| \cos 90^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0,$$

mirip dengan perkalian tersebut

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0,$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0.$$

Berdasarkan hasil kali di atas kita mendapatkan

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \quad (3.23)$$

Persamaan ini sangat penting, seharusnya dapat diingat dengan baik, karena berbagai aplikasi akan langsung menggunakan persamaan ini.

Sudut antara dua vektor

Andaikan diberikan dua buah vektor, kita dapat mencari sudut antara kedua vektor tersebut menggunakan persamaan (3.18) dan (3.23).

Contoh 3.2.3 Carilah sudut antara vektor $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ dan $\mathbf{B} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Kita dapat menghitung

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta,$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 3(-2) + 6 \cdot 3 + 9 \cdot 1 = 21,$$

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{3^2 + 6^2 + 9^2} = 3\sqrt{14},$$

$$|\mathbf{B}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14},$$

sehingga

$$3\sqrt{14}\sqrt{14}\cos \theta = 21$$

$$\cos \theta = 1/2$$

$$\theta = 45^\circ.$$

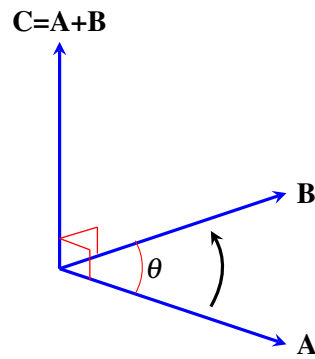
Vektor sejajar dan tegak lurus

Jika dua buah vektor tegak lurus, cosinus sudut keduanya $\cos \theta = 0$, sehingga

$$A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 0 \quad \text{jika } \mathbf{A} \text{ dan } \mathbf{B} \text{ vektor yang saling tegak lurus.} \quad (3.24)$$

Jika dua buah vektor sejajar, komponen-komponennya juga sejajar, yaitu

$$\frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z} \quad \text{jika } \mathbf{A} \text{ dan } \mathbf{B} \text{ vektor yang sejajar.} \quad (3.25)$$



Gambar 3.12: Ilustrasi hasil kali silang.

Hasil kali silang

Hasil kali silang \mathbf{A} dan \mathbf{B} ditulis $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$. Berdasarkan definisi, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ merupakan vektor dengan besar dan arah yang diuraikan sebagai berikut

Besar $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ adalah

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta \quad (3.26)$$

dengan θ adalah sudut positif ($\leq 190^\circ$) antara \mathbf{A} dan \mathbf{B} . Arah $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ tegak lurus dengan bidang \mathbf{A} dan \mathbf{B} , dan memenuhi aturan sekrup putar kanan yang diputar dari \mathbf{A} ke \mathbf{B} seperti yang diperlihatkan gambar 3.12.

Hasil kali silang antara $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ dan $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ tidak sama. Faktanya kita dapat membuktikan bahwa

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}. \quad (3.27)$$

Dalam bahasa matematika, hasil kali silang tidak komutatif.

Menurut persamaan (3.26) kita dapat membuktikan bahwa hasil kali silang dua buah vektor yang memiliki besar nol karena sinus antara kedua vektor nol, yaitu $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin 0^\circ = 0$, atau kita dapat menuliskan

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0 \quad \text{jika } \mathbf{A} \text{ dan } \mathbf{B} \text{ sejajar} \quad (3.28)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0 \quad \text{untuk sembarang } \mathbf{A}. \quad (3.29)$$

Berikutnya kita juga akan mendapatkan bahwa

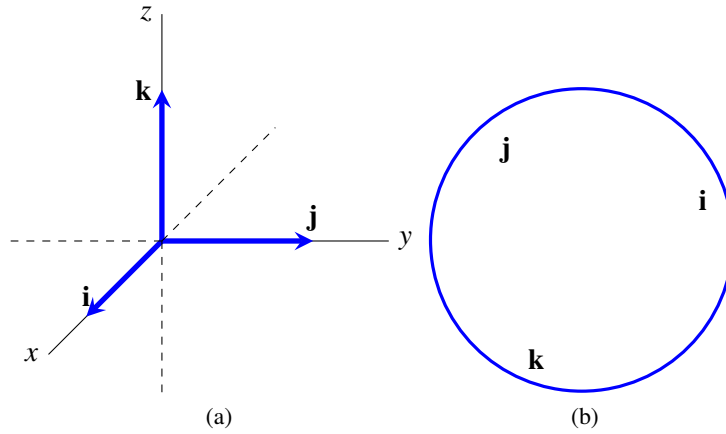
$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0,$$

dan

$$|\mathbf{i} \times \mathbf{j}| = |\mathbf{i}| |\mathbf{j}| \sin 90^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

Berdasarkan aturan sekrup putar kanan, kita dapat melihat bahwa $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$ adalah \mathbf{k} , dan karena besarnya 1, maka $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ (gambar 3.13). Berikutnya, mirip dengan hal tersebut kita mendapatkan

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} & \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} \end{array}$$



Gambar 3.13: Ilustrasi arah hasil kali silang vektor satuan.

3.3 Garis dan Bidang

Hal-hal terkait geometri analitik dapat disederhanakan dengan penggunaan notasi vektor. Contoh hal tersebut adalah persamaan garis dan bidang, jarak antara dua titik atau antara garis dan bidang yang sering terjadi dalam kasus fisika. Kita tentu membutuhkan waktu yang lebih lama untuk membahas ruang tiga dimensi dibanding ruang dua dimensi. Dalam geometri analitik, sebuah titik dalam ruang tiga dimensi (x, y, z) dapat diwakili oleh kepala vektor $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ dengan ekor di pusat koordinat. Kita tentu dapat mengatakan bahwa titik (x, y, z) dan \mathbf{r} adalah sama. Kita juga dapat menghubungkan dua buah titik menggunakan notasi vektor. Dalam gambar 3.14 vektor \mathbf{A} dari $(1, 2, 3)$ ke (x, y, z) adalah

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{r} - \mathbf{C} \\ &= (x, y, z) - (1, 2, 3) \\ &= (x - 1, y - 2, z - 3) \end{aligned}$$

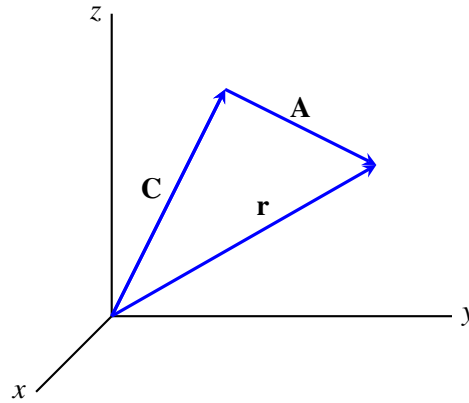
atau

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} - (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \\ &= (x - 1)\mathbf{i} + (y - 2)\mathbf{j} + (z - 3)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

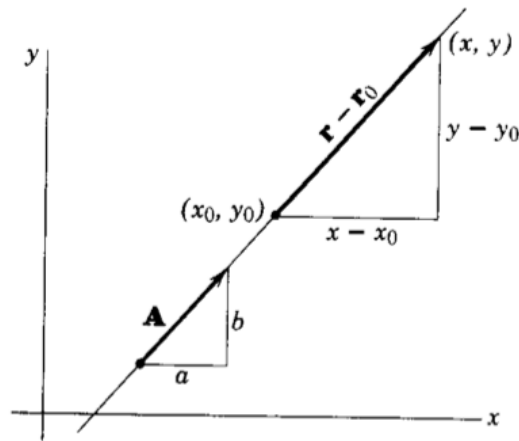
Berdasarkan uraian di atas kita memiliki dua cara untuk menuliskan persamaan vektor. Kita dapat memilih salah satu saja sesuai yang kita butuhkan. Perhatikanlah bahwa kita dapat menuliskan $(1, 0, -2)$ untuk $\mathbf{i} - 2\mathbf{k}$. Perhatikanlah bahwa angka nol harus dituliskan. Bedakan penulisan $\mathbf{i} - 2\mathbf{k}$ dengan $\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ yang dituliskan $(1, -2, 0)$. Pada sisi lain, kita dapat menuliskan $5\mathbf{j}$ dengan $(0, 5, 0)$.

Dalam dua dimensi, kita menuliskan persamaan garis yang melalui (x_0, y_0) dengan kemiringan m sebagai

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m. \quad (3.30)$$



Gambar 3.14: Vektor \mathbf{A} dari $(1, 2, 3)$ ke (x, y, z) .



Gambar 3.15: Vektor \mathbf{A} yang sejajar dengan $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$.

Andaikan pada kemiringan ini, diberikan suatu vektor dengan arah yang sama, katakanlah $\mathbf{A} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ (gambar 3.17). Lalu, garis yang melalui titik (x_0, y_0) dalam arah \mathbf{A} dapat ditentukan

dan seharusnya dapat ditulis dalam sebuah persamaan. Garis langsung dari (x_0, y_0) ke sembarang titik (x, y) pada garis tersebut adalah $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ dengan komponen-komponen $x - x_0$ dan $y - y_0$ adalah

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{i}(x - x_0) + \mathbf{j}(y - y_0). \quad (3.31)$$

Persamaan ini sejajar dengan $\mathbf{A} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$. Tentu, andaikan dua buah vektor sejajar, komponen-komponennya akan sebanding. Lalu, kita dapat menuliskan ($a, b \neq 0$)

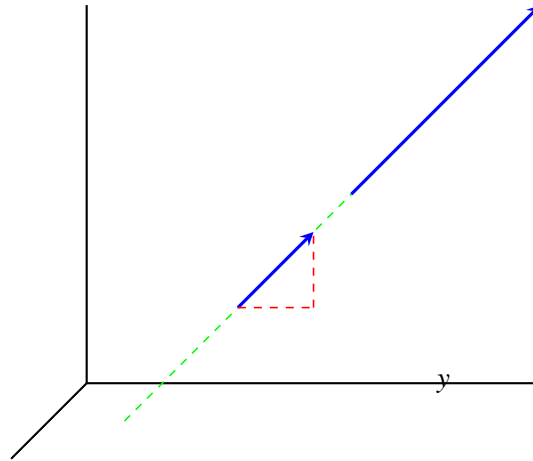
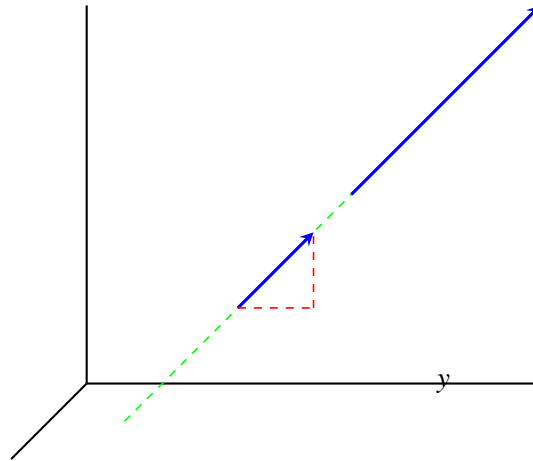
$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \quad (3.32)$$

atau

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{b}{a}. \quad (3.33)$$

Cara lain untuk menuliskan persamaan ini adalah dengan mengatakan jika $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ dan \mathbf{A} sejajar, salah satunya adalah perkalian skalar vektor lainnya, yaitu

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{A}t \quad \text{atau} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{A}t, \quad (3.34)$$

Gambar 3.16: Vektor \mathbf{A} yang sejajar dengan $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$.Gambar 3.17: Vektor \mathbf{A} yang sejajar dengan $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$.

dengan t adalah pengali skalar. Kita dapat menganggap t sebagai suatu parameter. Bentuk komponen persamaan (3.34) adalah himpunan persamaan *parametrik*, katakanlah

$$x - x_0 = at, \quad (3.35)$$

$$y - y_0 = bt, \quad (3.36)$$

atau

$$x = x_0 + at, \quad (3.37)$$

$$y = y_0 + bt. \quad (3.38)$$

Apabila t dieliminasi, kita akan mendapatkan persamaan asli awal.

Tinjauan dalam tiga dimensi dapat dilakukan menggunakan analogi yang sama. Kita akan meninjau persamaan garis lurus yang melewati (x_0, y_0, z_0) dan sejajar dengan vektor $\mathbf{A} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$. Jika (x, y, z) suatu titik pada garis yang menghubungkan (x_0, y_0, z_0) dan (x, y, z) dan sejajar dengan \mathbf{A} , komponen-komponen $x - x_0, y - y_0, z - z_0$ akan sebanding dengan a, b, c menurut

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}. \quad (3.39)$$

Persamaan Simetrik garis lurus dengan $a, b, c \neq 0$.

Jika $c = 0$ (hanya sebagai contoh), kita dapat menuliskan persamaan (3.39) sebagai

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}, \quad z = z_0. \quad (3.40)$$

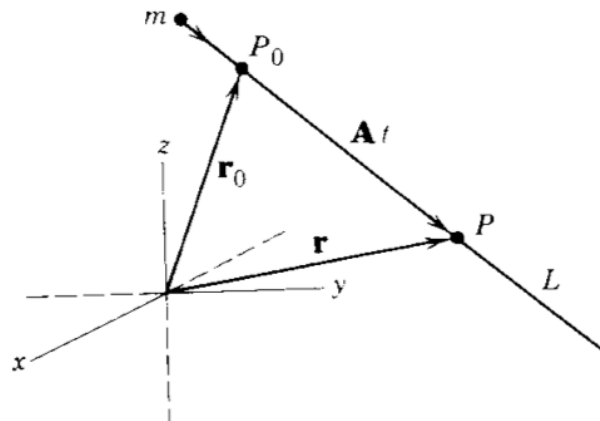
Persamaan Simetrik garis lurus dengan $c = 0$.

Kita dapat menuliskan persamaan (3.39) dalam bentuk persamaan parametrik menurut

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{A}t \quad \text{atau} \quad \begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt, \\ z = z_0 + ct. \end{cases} \quad (3.41)$$

Persamaan Parametrik garis lurus.

Persamaan parametrik (3.41) memiliki interpretasi penggunaan yang bermanfaat ketika parameter t diartikan sebagai waktu. Andaikan partikel bermassa m (elektron atau bola bilyard) bergerak sepanjang garis lurus L gambar 3.18. Posisikan diri kita pada pusat koordinat dan melihat m bergerak dari P_0 ke P sepanjang L . Garis pandangan kita adalah \mathbf{r} yang berayun dari \mathbf{r}_0 pada $t = 0$ dan $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{A}t$ pada waktu t . Perhatikanlah bahwa kecepatan m adalah $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{A}$, dengan \mathbf{A} vektor sepanjang garis gerak lurus tersebut.



Gambar 3.18: Partikel bermassa m bergerak sepanjang garis lurus L .

Kembali ke tinjauan ruang dua dimensi. Andaikan kita menginginkan persamaan garis lurus L yang melewati titik (x_0, y_0) dan tegak lurus dengan vektor $\mathbf{N} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$. Seperti sebelumnya, vektor

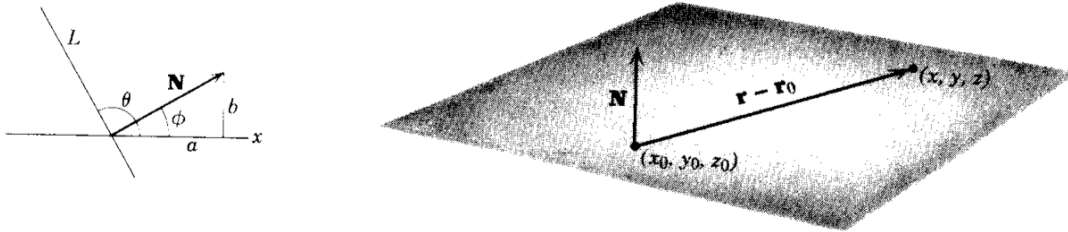
$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} \quad (3.42)$$

berada sepanjang garis. Saat ini kita menginginkan vektor ini tegak lurus dengan vektor \mathbf{N} . Dua buah vektor akan tegak lurus jika hasil kali skalar keduanya adalah nol. Berdasarkan penggunaan aturan tersebut untuk \mathbf{N} dan $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, kita akan mendapatkan

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \quad \text{atau} \quad \frac{y - y_0}{x - x_0} = -\frac{a}{b}. \quad (3.43)$$

Persamaan ini merupakan ciri bahwa garis lurus L tegak lurus dengan \mathbf{N} . Berikutnya menurut gambar 3.19 kiri, kemiringan garis L adalah

$$\tan \theta = -\cot \phi = -a/b. \quad (3.44)$$



Gambar 3.19: .

Dalam ruang tiga dimensi, kita dapat menggunakan metode ini untuk menuliskan persamaan bidang. Jika (x_0, y_0, z_0) suatu titik yang diberikan pada bidang dan (x, y, z) adalah sembarang titik pada bidang, vektor (gambar 3.19 kanan)

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k} \quad (3.45)$$

berada dalam bidang. Jika $\mathbf{N} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ adalah normal pada bidang, sehingga \mathbf{N} dan $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ tegak lurus, sehingga persamaan bidang adalah

$$\mathbf{N} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0 \quad (3.46)$$

atau

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0, \quad (3.47)$$

$$\text{atau} \quad ax + by + cz = d, \quad (3.48)$$

dengan $d = ax_0 + by_0 + cz_0$ merupakan **persamaan bidang**.

Contoh 3.3.1 Carilah persamaan bidang yang melewati tiga titik $A(-1, 1, 1)$, $B(2, 3, 0)$, dan $C(0, 1, -2)$.

Vektor yang diperoleh dari gabungan dua titik merupakan garis dalam bidang. Misalkan gabungan tersebut adalah $\vec{AB} = (2, 3, 0) - (-1, 1, 1) = (3, 2, -1)$ dan $\vec{AC} = (1, 0, -3)$. Hasil

kali silang dua vektor ini merupakan garis yang tegak lurus bidang, yaitu

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &= (\vec{AB}) \times (\vec{AC}) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 2\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Persamaan bidang diperoleh dengan mencari hasil kali skalar antara \mathbf{N} dengan salah satu titik pada bidang (contohnya dengan titik B), yaitu

$$-6(x-2) + 8(y-3) - 2z = 0 \quad \text{atau} \quad 3x - 4y + z + 6 = 0. \quad (3.49)$$

Contoh 3.3.2 Carilah persamaan garis yang melewati $(1,0,-2)$ dan tegak lurus pada bidang (3.49).

Vektor $3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ merupakan garis yang tegak lurus bidang pada contoh sebelumnya, sehingga garis ini sejajar dengan garis yang melewati $(1,0,-2)$. Oleh karena itu, menurut persamaan parametrik kita dapat menuliskan

$$\frac{(x-1)}{3} = \frac{y}{-4} = \frac{z+2}{1}.$$

Berikutnya menurut persamaan simetrik garis yang sejajar dengan $(1,0,2)$ adalah

$$\mathbf{r} = \mathbf{i} + 2\mathbf{k} + (3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k})t.$$

3.4 Operasi Matriks

Kita akan mendiskusikan manfaat dan penggunaan perkalian matriks dengan angka atau kombinasi matriks

3.4.1 Persamaan Matriks

Bagian ini akan menekankan lagi bahwa dua matriks yang sama hanya jika keduanya identik. Persamaan matrik dapat berupa

$$\begin{pmatrix} x & r & u \\ y & s & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 3 & -7i & 1-i \end{pmatrix}$$

yang terdiri dari enam buah persamaan, yaitu

$$x = 2, r = 1, u = -5, y = 3, s = 7i, \text{ dan } v = 1 - i.$$

3.4.2 Perkalian Matriks dengan Bilangan

Cara yang lebih nyaman untuk menyatakan suatu vektor $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ adalah dengan menuliskannya dalam bentuk matrik, yaitu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{disebut matriks kolom atau vektor kolom,}$$

atau

$$\mathbf{A}^T = (2 \ 3) \quad \text{disebut matriks baris atau vektor baris.}$$

Matrik baris \mathbf{A}^T merupakan transpose dari matriks \mathbf{A} . Kita akan sering menggunakan penulisan ini, yaitu menuliskan suatu vektor menggunakan matriks kolom. Akan tetapi kita biasa menuliskan matriks dengan \mathbf{A} , vektor dengan \mathbf{A} , dan panjang vektor dengan A .

Sekarang, anggaplah kita ingin mendapatkan vektor yang 2 kali panjang vektor \mathbf{A} dengan arah yang sama. Kita dapat menuliskannya sebagai $2\mathbf{A} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$. Lalu, wakilannya matriksnya adalah

$$2\mathbf{A} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad 2\mathbf{A}^T = 2 \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Perkalian di atas sekaligus menunjukkan fakta bagaimana cara matriks dikalikan dengan bilangan. Jika matriks dikalikan dengan bilangan yang dilakukan adalah mengalikan setiap elemen matrik dengan bilangan tersebut, yaitu

$$k \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kc & ke \\ kb & kd & kf \end{pmatrix}, \quad (3.50)$$

dan contohnya adalah

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ -1 & -\frac{5}{8} \end{pmatrix} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

3.4.3 Penjumlahan Matriks

Ketika kita menambahkan vektor secara aljabar, yang kita lakukan adalah menambahkan komponen-komponennya. Demikian juga dengan penjumlahan matriks. Penjumlahan matriks dilakukan dengan menjumlahkan komponen-komponen matriks tersebut, contohnya

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & -7 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 3-1 & -2+4 \\ 4+3 & 7-7 & 1-2 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 7 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Perhatikanlah bahwa jika kita menambahkan $\mathbf{A} + \mathbf{A}$ kita akan memperoleh $2\mathbf{A}$.

Andaikan kita memiliki

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},$$

kita tidak dapat menjumlahkan kedua matriks tersebut di atas.

3.4.4 Perkalian Matriks

Mari kita mulai mendefinisikan perkalian matrik dan melihat bagaimana proses perkalian ini. Contoh yang ditunjukkan adalah bagaimana perkalian $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$ dari dua matriks \mathbf{A} dan \mathbf{B} , yaitu:

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix} = \mathbf{C}.$$

Mari kita tinjau hasil perkalian matriks \mathbf{C} , elemen baris pertama kolom pertama diperoleh dari perkalian masing-masing elemen baris pertama matriks \mathbf{A} dan masing-masing elemen kolom pertama matriks \mathbf{B} , lalu hasilnya dijumlahkan. Hal ini disebut sebagai perkalian "baris dengan kolom". Ketika menghitung $ae + bg$ kita dapat mengatakan "mengalikan baris pertama matriks \mathbf{A} dengan kolom pertama matriks \mathbf{B} ". Berikutnya elemen $af + bh$ diperoleh dengan "mengalikan baris pertama dengan kolom kedua". Mirip dengan hal di atas, $ce + dg$ adalah hasil perkalian baris kedua dengan kolom pertama, dan $cf + dh$ merupakan hasil perkalian baris kedua dengan kolom kedua.

Berikutnya, secara lebih sederhana, matriks \mathbf{C} merupakan hasil perkalian yang diperoleh dengan cara

$$(AB)_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}. \quad (3.51)$$

Contoh 3.4.1 Carilah hasil perkalian A dan B jika

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & -4 \end{pmatrix}. \quad (3.52)$$

Menurut aturan perkalian yang telah dijelaskan, kita mendapatkan

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 4 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-4) \\ -3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & -3 \cdot 5 + 1 \cdot 7 & -3 \cdot 3 + 1 \cdot (-4) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 & 34 & 4 \\ -1 & -8 & -13 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Perhatikanlah kita tidak mendapatkan kesulitan saat mengalikan AB . Tetapi andaikan kita akan mengalikan BA , kita akan mendapatkan kesulitan.

Dua buah matriks dapat dikalikan jika dan hanya jika jumlah kolom matriks pertama sama dengan jumlah baris matriks kedua.

Contoh 3.4.2 Carilah AB dan BA jika diberikan

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}. \quad (3.53)$$

Hasil perhitungan keduanya adalah

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 33 & 3 \\ -34 & -2 \end{pmatrix}, \\ BA &= \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -33 & 13 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Perhatikanlah bahwa AB tidak sama dengan BA . Kita dapat mengatakan bahwa perkalian matrik *tidak komutatif*. Secara umum, matriks memang tidak komutatif ketika dikalikan. Akan tetapi, kita dapat menemukan perkalian matriks yang *komut*, yang berikutnya kita bisa mendefinisikan suatu komutator, yaitu:

$$[A, B] = AB - BA \quad \text{merupakan komutator } A \text{ dan } B. \quad (3.54)$$

Oleh karena secara umum perkalian matriks tidak komut, kita harus berhati-hati saat merubah orde perkalian suatu matriks, contohnya

$$(A - B)(A + B) = A^2 + AB - BA - B^2 \quad (3.55)$$

$$= A^2 - B^2 + [A, B]. \quad (3.56)$$

3.4.5 Matriks Null

Matriks null merupakan matriks yang semua komponen-komponenya bernilai nol. Matriks ini biasa disingkat dengan 0. Akan tetapi kita harus berhati-hati mengenai matriks null ini. Contohnya

$$\text{Jika } M = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \text{ lalu } M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.57)$$

Kita dapat melihat bahwa $M^2 = 0$, tetapi $M \neq 0$.

3.4.6 Matriks Identitas

Matriks identitas merupakan matriks persegi dengan setiap komponen diagonalnya bernilai 1 dan komponen yang lainnya bernilai nol. Contohnya

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

merupakan matriks identitas orde 3. Matriks identitas dapat disebut sebagai 1, I , U atau E dalam berbagai referensi. Kita dapat melihat berdasarkan aturan perkalian matriks, berlaku

$$IA = AI = A. \quad (3.59)$$

3.4.7 Operasi Determinan

Kita tidak mendefinisikan penjumlahan untuk determinan. Bagaimanapun perkalian determinan lebih bermanfaat. Perkalian determinan dilakukan seperti perkalian matriks. Berikutnya, kita dapat membuktikan jika A dan B merupakan matriks persegi dalam orde yang sama, akan berlaku

$$\det AB = \det BA = (\det A)(\det B). \quad (3.60)$$

3.4.8 Terapan Perkalian Matriks

Kita dapat menuliskan himpunan persamaan linier dalam bentuk sederhana menggunakan matriks. Andaikan kita memiliki persamaan matriks

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -10 \end{pmatrix}. \quad (3.61)$$

Jika kita mengalikan kedua matriks pada ruas kiri, kita akan memperoleh

$$\begin{pmatrix} x - z \\ -2x + 3y \\ x - 3y + 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -10 \end{pmatrix}. \quad (3.62)$$

Berdasarkan aturan persamaan matriks, tentu kita dapat menuliskan persamaan di atas dengan

$$\begin{cases} x - z = 5 \\ -2x + 3y = 1 \\ x - 3y + 2z = -10 \end{cases} \quad (3.63)$$

Konsekuensi dari bentuk persamaan (3.61) adalah himpunan persamaan (3.63). Berikutnya, dengan cara ini kita dapat menuliskan suatu himpunan persamaan linier dalam bentuk matriks. Jika kita menggunakan notasi huruf untuk mewakili matriks persamaan (3.61),

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad (3.64)$$

kita dapat menuliskan

$$Mr = k. \quad (3.65)$$

Kita juga dapat menuliskannya dalam

$$r = M^{-1}k. \quad (3.66)$$

3.4.9 Invers Matriks

Kita dapat mendefinisikan *invers* suatu matriks M sebagai M^{-1} yang memenuhi

$$MM^{-1} = M^{-1}M = I \quad (3.67)$$

Perhatikanlah bahwa hanya matriks persegi yang memiliki invers dan itupun tidak semuanya. Berdasarkan persamaan (3.60), jika $MM^{-1} = I$, tentu

$$(\det M)(\det M^{-1}) = \det I = 1. \quad (3.68)$$

Jika $\det M = 0$, tentu kita tidak dapat memperoleh invers-nya. Kita akan menyebut matriks yang memiliki invers dengan matriks *inversibel* dan menyebut matriks yang tidak memiliki matriks dengan matriks *singular*. Berikutnya, secara teoritik kita memerlukan rumusan untuk mencari invers suatu matriks. Rumusannya adalah

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} C^T \quad \text{dengan } C_{ij} \text{ adalah kofaktor dari } m_{ij}. \quad (3.69)$$

3.5 Matrik Khusus

Bagian ini akan mendiskusikan berbagai penggunaan matriks dalam mempermudah pekerjaan termasuk membuktikan beberapa rumusan penting dalam fisika ataupun matematika. Daftar matriks pertama yang diberikan merupakan definisi yang dibutuhkan sebagai acuan dan fakta-fakta yang terkandung di dalamnya.

Terdapat beberapa matriks khusus yang terkait dengan suatu matrik yang diberikan. Pada tabel 3.1 akan diberikan sebutan untuk suatu matriks, notasi, dan bagaimana memperoleh matrik tersebut dari matriks A yang diberikan.

Terdapat nama lain untuk beberapa matriks khusus lain. Definisi nama matriks ini ditunjukkan pada tabel 3.2.

Tabel 3.1: Nama matrik yang berhubungan dengan suatu matriks A .

Nama Matriks	Notasi	Cara Perolehan
Transpose A	A^T, \tilde{A}, A' atau A^t	Menukar baris dan kolom untuk setiap elemen A
Konjugat Kompleks A	\bar{A} atau A^*	Mengambil konjugat kompleks masing-masing elemen A
Konjugat Transpose, Konjugat Hermit, <i>Hermitian adjoint</i>	A^\dagger	Mengambil konjugat Kompleks setiap elemen A , lalu ditransposekan
Invers A	A^{-1}	Mengambil cofaktor A , lalu ditransposekan, lalu dibagi dengan determinan A

Tabel 3.2: Nama matriks dan syaratnya

Nama matriks	Syarat
real	$A = A^*$
simetrik	$A = A^T$
anti simetrik	$A = -A^T$
ortogonal	$A^{-1} = A^T$
imajiner	$A = -A^T$
Hermitian	$A = A^\dagger$
anti Hermitian	$A = -A^\dagger$
uniter	$A^{-1} = A^\dagger$
normal	$AA^\dagger = A^\dagger A$

3.6 Ruang Vektor Linier

Aksioma 3.1 Ruang Vektor Linier

1. Operasi penjumlahan

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \quad (3.70)$$

2. Komutasi

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \quad (3.71)$$

3. Asosiasi Penjumlahan

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V \quad (3.72)$$

4. Vektor nol

$$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{u} \in V \quad (3.73)$$

5. Invers penjumlahan

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{u} \in V \quad (3.74)$$

6. Perkalian skalar

$$\alpha \mathbf{u} \in V, \forall \mathbf{u} \in V, \alpha \in F \quad (3.75)$$

7. Asosiasi perkalian

$$\alpha(\beta \mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u} \in V, \forall \mathbf{u} \in V, \alpha, \beta \in F \quad (3.76)$$

8. Distribusi penjumlahan vektor

$$\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v} \in V, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \alpha \in F \quad (3.77)$$

9. Distribusi penjumlahan skalar

$$(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u} \in V, \forall \mathbf{u} \in V, \alpha, \beta \in F \quad (3.78)$$

10. Satu

$$1\mathbf{u} = \mathbf{u} \in V, \forall \mathbf{u} \in V \quad (3.79)$$

Objek-objek di dalam V disebut 'vektor'. F disebut sebagai 'lapangan'. Himpunan (V, F) disebut dengan Ruang vektor V dengan lapangan F . Aksioma sering disebut kebenaran yang terbukti sendiri, sesuatu yang sangat mendasar, yang disetujui dan diterima kebenarannya tanpa pembuktian.

Contoh 3.6.1 1. Ruang vektor matrik kolom \mathbb{C}^m

$$\mathbb{C}^m = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \quad (3.80)$$

2. Ruang vektor matrik \mathcal{M}^{mn}

$$\mathcal{M}^{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (3.81)$$

3. Ruang vektor polinomial P_n

$$P_n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (3.82)$$

4. Ruang vektor tunggal $Z = \{\mathbf{z}\}$ 5. Ruang vektor Gila $C = \{(x_1, x_2) | x_1, x_2 \in \mathbb{C}\}$ dengan operasi penjumlahan $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 + 1)$ dan perkalian skalar $\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1 + \alpha - 1, \alpha x_2 + \alpha - 1)$ **Latihan 3.1** Apakah himpunan di bawah ini ruang vektor? buktikan!1. Permukaan bola 2 dimensi S^2 dengan

$$S^2 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1, \forall x, y, z \in \mathbb{R}\} \quad (3.83)$$

2. Permukaan silinder 2 dimensi S^2 dengan

$$T^2 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 = 1, \forall x, y, z \in \mathbb{R}\} \quad (3.84)$$

3.6.1 Subruang

Subruang merupakan ruang vektor yang terkandung dalam ruang vektor lain.

Andaikan V dan W merupakan dua buah ruang vektor yang memiliki definisi penjumlahan vektor dan perkalian skalar identik dan W merupakan subhimpunan V , $W \subseteq V$, maka W **subruang** dari V .

Contoh 3.6.2 Sub ruang \mathbb{C}^3 merupakan ruang vektor. Subhimpunan

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mid 2x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 0 \right\}, \quad (3.85)$$

merupakan subruang vektor dari \mathbb{C}^3 .

Andaikan V merupakan ruang vektor dan W merupakan subhimpunan pada V , $W \subseteq V$, W memiliki operasi yang sama dengan V . W disebut subruang dari V jika dan hanya jika memenuhi tiga syarat:

1. $W \neq \emptyset$
2. $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in W, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$
3. $\alpha \mathbf{x} \in W, \forall \mathbf{x} \in W, \alpha \in F$.

3.6.2 Kombinasi Linier

Andaikan V merupakan ruang vektor, lalu diberikan n vektor $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ dan n skalar $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. **Kombinasi linier** vektor dan skalar tersebut merupakan vektor

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n. \quad (3.86)$$

Contoh 3.6.3 Contoh vektor dalam ruang vektor matrik M_{23} adalah

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kombinasi linier dapat disusun menurut $2\mathbf{x} + 4\mathbf{y} + (-1)\mathbf{z}$.

3.6.3 Bentangan

Anggaplah V ruang vektor, lalu diberikan himpunan vektor $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_t\}$. Bentangan $\langle S \rangle$ merupakan himpunan semua kombinasi linier yang mungkin

$$\langle S \rangle = \{ \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_t \mathbf{u}_t \mid \alpha_i \in \mathbb{C}, 1 \leq i \leq t \} \quad (3.87)$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^t \alpha_i \mathbf{u}_i \mid \alpha_i \in \mathbb{C}, 1 \leq i \leq t \right\} \quad (3.88)$$

3.6.4 Bebas Linier

Andaikan V sebuah ruang vektor, lalu diberikan himpunan vektor $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$. Suatu persamaan dengan bentuk

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0} \quad (3.89)$$

merupakan hubungan bergantung linier. Apabila persamaan ini dibentuk secara trivial ($\alpha_i = 0, 1 \leq i \leq n$), hubungan tersebut dapat disebut dengan hubungan bergantung linier trivial pada S .

Andaikan V sebuah ruang vektor. Himpunan vektor $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ dari V disebut **Bergantung Linier** apabila terdapat hubungan bergantung linier pada S yang tidak trivial. Apabila hanya terdapat satu hubungan bergantung linier yang trivial, S disebut **Bebas Linier**.

3.6.5 Himpunan Membangun

Andaikan V sebuah ruang vektor. Subhimpunan S pada V disebut himpunan membangun V , jika $\langle S \rangle$. Menurut kasus ini, S membangun V .

3.6.6 Basis

Andaikan V sebuah ruang vektor. Subhimpunan $S \leq V$ disebut **Basis** jika S bebas linier dan membangun V .

3.6.7 Dimensi

Andaikan V sebuah ruang vektor dan $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_t\}$ merupakan basis pada V . **Dimensi** dari V dirumuskan menurut

$$\dim(V) = t. \quad (3.90)$$

3.7 Soal-soal Latihan

Latihan 3.2 Kerjakanlah soal-soal di bawah ini!

1. Carilah persamaan garis yang melewati $(5, -4, 2)$ dan sejajar garis $\mathbf{r} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + (5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k})t$.
2. Carilah persamaan bidang yang melewati titik dan tegak lurus garis soal no 1.
3. Carilah sudut antara bidang

$$2x + 6y - 3z = 10 \quad \text{dan} \quad 5x + 2y - z = 12 \quad (3.91)$$

4. Carilah persamaan bidang yang melewati $(2, 3, -2)$ dan tegak lurus kedua bidang pada soal no 3.
5. Carilah jarak dari $(3 - 1, 2)$ ke bidang $5x - y - z = 4$.
6. Diberikan suatu matriks

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5i \\ -2i & 2 & 0 \\ 1 & 1+i & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.92)$$

Carilah transpose, adjoint, invers, konjugat kompleks, dan transpose konjugat dari matriks di atas.



4. Diferensial Parsial

The phenomena will give us a unique solution.

—Joko Saefan

Suatu fungsi f yang hanya bergantung pada x biasanya ditulis sebagai $f(x)$. Apabila suatu konstanta dan parameter muncul dalam f , contohnya $f(x) = ax + b$, dengan b adalah konstanta dan a suatu parameter, tetapi hanya x yang ditinjau sebagai variabel dan hanya turunan $f^{(n)} = d^n f / dx^n$ yang didefinisikan.

Bagaimanapun, kita terkadang meninjau fungsi yang lebih dari satu variabel misalnya $f(x, y)$ yang bergantung pada dua variabel x dan y . Bahkan, terkadang kita menjumpai fungsi dengan n variabel yang ditulis $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ yang bergantung pada x_1, x_2, \dots, x_n .

Fungsi satu variabel dapat dinyatakan dengan garis pada bidang lembaran kertas. Fungsi dua variabel biasanya dinyatakan dengan permukaan dalam tiga dimensi. Fungsi variabel banyak biasanya sulit untuk digambarkan, dan pada bab ini pembahasan akan dibatasi untuk dua variabel.

4.1 Definisi dan Notasi

Suatu fungsi $f(x, y)$ dua variabel dapat memiliki kemiringan pada semua arah bidang xy . Ungkapan umum untuk kasus ini biasanya disebut rata-rata perubahan fungsi. Bagaimanapun, kita akan mendiskusikan terlebih dahulu rata-rata perubahan fungsi $f(x, y)$ untuk arah x dan y positif. Perubahan ini disebut **Diferensial parsial** terhadap x dan y . Kita mendefinisikan diferensial hanya terhadap x untuk suatu fungsi $f(x, y)$, dengan mengatakan bahwa satu variabel lain, yaitu y dijaga konstan. Bentuk diferensial ini dinyatakan dengan

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

yaitu diferensial $f(x, y)$ terhadap x . Turunan ini didefinisikan secara formal dirumuskan menurut

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}, \quad (4.1)$$

yang terdapat konsep limit. Demikian juga, kita dapat mendefinisikan turunan $f(x, y)$ terhadap y yang dirumuskan menurut

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}. \quad (4.2)$$

Apabila kita memiliki $z = f(x, y)$, kita dapat memiliki turunan parsial terhadap x maupun y . Lebih jauh, jika turunan parsial ini kita turunkan beberapa kali, kita dapat menuliskan

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \end{aligned}$$

dan seterusnya.

Contoh 4.1.1 Andaikan

$$z = f(x, y) = x^3 y - e^{xy}, \quad (4.3)$$

Kita dapat menghitung

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &\equiv \frac{\partial z}{\partial x} \equiv f_x \equiv z_x \equiv f_1 = 3x^2 y - ye^{xy}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &\equiv \frac{\partial z}{\partial y} \equiv f_y \equiv z_y \equiv f_2 = x^3 - xe^{xy}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &\equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \equiv f_{yx} \equiv z_{yx} \equiv f_{21} = 3x^2 - e^{xy} - xye^{xy}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &\equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \equiv f_{xx} \equiv z_{xx} \equiv f_{11} = 6xy - y^2 e^{xy}, \\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} &\equiv \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} \equiv f_{yyy} \equiv z_{yyy} \equiv f_{222} = -x^3 e^{xy}, \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} &\equiv \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} \equiv f_{yxx} \equiv z_{yxx} \equiv f_{211} = 6x - 2ye^{xy} - xy^2 e^{xy}. \end{aligned}$$

Kita juga dapat meninjau fungsi yang lebih dari dua variabel, walaupun secara geometri hal ini tidaklah mudah. Contohnya adalah suhu udara T pada suatu ruangan bergantung pada titik (x, y, z) yang diukur pada t tertentu, sehingga $T = T(x, y, z, t)$. Kemudian kita dapat mencari dan mengatakan $\partial T / \partial y$ yang berarti rata-rata perubahan T terhadap y untuk x dan z pada titik tertentu dan pada waktu t tertentu.

Notasi yang sering digunakan pada suatu kasus khususnya termodinamika adalah $(\partial z / \partial x)_y$ yang berarti $\partial z / \partial x$ saat z dinyatakan sebagai fungsi terhadap x dan y .

Contoh 4.1.2 Andaikan $z = x^2 - y^2$. Kita dapat menyatakan z dalam bentuk polar r dan θ , sehingga kita dapat memiliki rata-rata perubahan z terhadap r dalam beberapa cara, masing-masing

$$\begin{aligned} z &= x^2 - y^2, \\ z &= r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta, & \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)_\theta &= 2x(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta), \\ z &= 2x^2 - x^2 - y^2 = 2x^2 - r^2, & \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)_x &= -2r, \\ z &= x^2 + y^2 - 2y^2 = r^2 - 2y^2, & \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)_y &= +2r. \end{aligned}$$

Ketiga ungkapan $\partial z / \partial r$ memiliki nilai-nilai yang berbeda dari ketiga cara tersebut di atas, sehingga kita dapat membedakan dengan menuliskan ciri variabel bebas kedua dengan indek bawah. Oleh karena ketiga ungkapan tersebut masing-masing berbeda, semestinya kita menuliskan fungsi tersebut dengan notasi yang berbeda pula. Hal ini biasa didapatkan dalam buku matematika murni. Sehingga kita dapat menuliskan

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)_\theta = \frac{\partial f}{\partial r}.$$

Lalu, kedua diferensial lainnya dapat dituliskan sebagai fungsi yang lain, misalnya

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)_x = \frac{\partial g}{\partial r} \quad \text{dan} \quad \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)_y = \frac{\partial h}{\partial r}.$$

Bagaimanapun, penulisan fungsi yang berbeda ini dapat menimbulkan arti yang membingungkan untuk mengungkapkan arti fisis kasus tersebut. Contohnya adalah

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_v, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial v} \right)_s, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_u, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)_p, \quad \text{dan seterusnya.}$$

4.2 Diferensial Total

Grafik (gambar 4.1) suatu persamaan $y = f(x)$ merupakan kurva dalam bidang (x, y) dan

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) \tag{4.4}$$

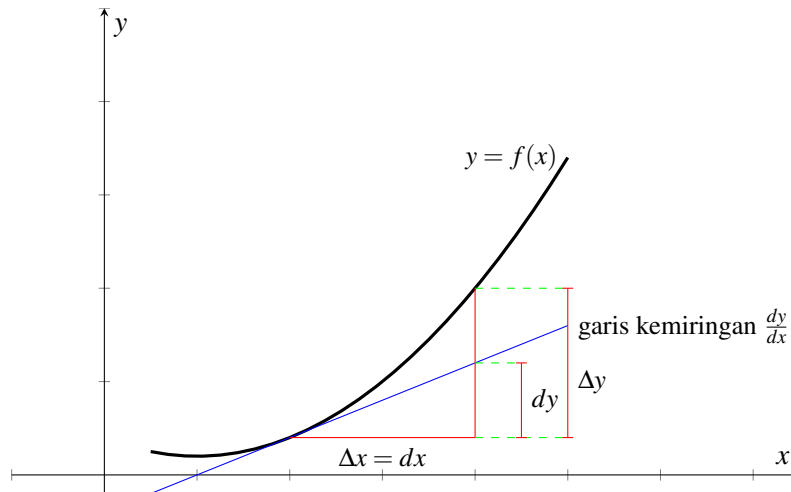
merupakan garis kemiringan kurva pada titik (x, y) . Menurut kalkulus, kita menggunakan Δx untuk menunjukkan perubahan dalam x dan Δy sebanding dengan perubahan dalam y , dan menurut definisi kemiringan tersebut dirumuskan menurut

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{4.5}$$

Kita dapat mendefinisikan variabel bebas dx sebagai

$$dx = \Delta x.$$

Bagaimanapun, dy tak dapat disebut sebagai Δy . Berdasarkan gambar 4.1 dan persamaan (4.5) kita dapat melihat bahwa Δy perubahan kurva, dan $dy = y' dx$ merupakan perubahan garis kemiringan, sehingga dy dapat disebut sebagai pendekatan linier pada Δy .



Gambar 4.1: Kemiringan fungsi $y = f(x)$ terhadap x .

Contoh 4.2.1 Jika $y = f(t)$ mewakili jarak suatu benda yang bergerak sebagai fungsi waktu dan dy/dt merupakan kecepatan. Jarak aktual partikel yang bergerak antara waktu t dan $t + \Delta t$ adalah Δy . Pendekatan kemiringan $dy = (dy/dt)dt$ merupakan jarak yang ditempuh partikel pada waktu t dengan kecepatan sama dy/dt .

Kita dapat melihat pada gambar 4.1 bahwa Δy merupakan pendekatan yang baik untuk dx sangat kecil. Hal ini diungkapkan dalam persamaan (4.5). Katakanlah bahwa dy/dx limit $\Delta y/\Delta x$ saat $\Delta x \rightarrow 0$ yang berarti bahwa diferensial $\Delta y/\Delta x - dy/dx \rightarrow 0$ saat $\Delta x \rightarrow 0$. Andaikan diferensial ini adalah ε , kita dapat mengatakan

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} + \varepsilon, \quad \text{dengan } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ ketika } \Delta x \rightarrow 0,$$

atau oleh karena $dx = \Delta x$, kita dapat mengatakan

$$\Delta y = (y' + \varepsilon) dx, \quad \text{dengan } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ ketika } \Delta x \rightarrow 0.$$

Diferensial $dy = y'dx$ disebut *komponen prinsipal* dari Δy , karena ε sangat kecil untuk dx yang kecil. Dalam contoh di atas, Andaikan $y = t^2$, $t = 1$, $dt = 0.1$, lalu kita akan memperoleh

$$\Delta y = (1.1)^2 - 1^2 = 0.21,$$

$$dy = \frac{dy}{dt} dt = 2 \cdot 1 \cdot (0.1) = 0.2,$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{dy}{dx} = 2.1 - 2 = 0.1,$$

$$\Delta y = (y' + \varepsilon) dt = (2 + 0.1)(0.1) = dy + \varepsilon dt = (0.2 + 0.01)$$

Nilai dy di atas merupakan pendekatan yang baik untuk Δy .

Berikutnya kita akan meninjau hal ini untuk fungsi dua variabel, $z = f(x, y)$. Kita dapat mengatakan bahwa persamaan ini mewakili suatu permukaan dan Diferensial $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, pada suatu titik merupakan perpotongan dua garis kemiringan pada permukaan dalam arah x dan y pada titik tersebut. Lambang $\Delta x = dx$ dan $\Delta y = dy$ mewakili perubahan dalam variabel bebas x dan y . Besaran Δz merupakan perubahan yang sebanding dalam z sepanjang permukaan tersebut. Nilai dz didefinisikan oleh persamaan

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \quad (4.6)$$

Diferensial dz disebut **Diferensial total** dari z .

Segala sesuatu yang kita bicarakan tentang fungsi dalam dua variabel juga berlaku untuk fungsi n variabel. Jika $u = f(x, y, z, \dots)$, menurut definisi dapat dirumuskan

$$du = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \dots, \quad (4.7)$$

dan du merupakan pendekatan yang baik untuk Δu jika diferensial parsial f kontinu dan dx, dy, dz, \dots , kecil.

4.3 Pendekatan Perhitungan Menggunakan Diferensial

Berikut kita akan meninjau beberapa contoh penggunaan diferensial dalam melakukan pendekatan perhitungan.

Contoh 4.3.1 Carilah pendekatan nilai

$$\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} \quad \text{ketika } n = 10^{15}. \quad (4.8)$$

Jika $f(x) = 1/x^2$, kita dapat menuliskan

$$\Delta f = f(10^{15} + 1) - f(10^{15}).$$

Tetapi Δf dapat didekati dengan $df = d(1/x^2)$ dengan $x = 10^{15}$, $dx = 1$, sehingga

$$d\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^3} dx = -\frac{2}{10^{45}} \cdot 1 = -2 \times 10^{-45}.$$

Contoh 4.3.2 Penurunan massa μ suatu sistem dua benda bermassa m_1 dan m_2 didefinisikan oleh

$$\mu^{-1} = m_1^{-1} + m_2^{-1}. \quad (4.9)$$

Jika m_1 bertambah 1%, berapakah perubahan pembagian m_2 agar nilai μ tidak berubah? Apabila persamaan di atas didiferensialkan dan mensubstitusi $dm_1 = 0.01m_1$, diperoleh

$$0 = -m_1^{-2} dm_1 - m_2^{-2} dm_2,$$

sehingga

$$\frac{dm_2}{m_2^2} = -\frac{dm_1}{m_1^2} = \frac{0.01m_1}{m_1^2},$$

atau

$$\frac{dm_2}{m_2} = 0.01m_2/m_1.$$

Berdasarkan hasil, ini dapat disimpulkan, jika $m_1 = m_2$, m_2 harus berkurang 1%, jika $m_2 = 3m_1$, m_2 harus berkurang 3%, dan seterusnya.

Contoh 4.3.3 Hambatan R suatu kabel sebanding dengan panjangnya dan berbanding terbalik dengan kuadrat radiusnya, yang dirumuskan menurut

$$R = k \frac{l}{r^2}. \quad (4.10)$$

Jika kesalahan relatif pengukuran panjang adalah 5% dan kesalahan relatif pengukuran radius adalah 10%, carilah kesalahan relatif R untuk kasus kemungkinan terburuk?

Kesalahan relatif dalam l berarti kesalahan mutlak yang terjadi dalam pengukuran l dibagi dengan panjang yang diukur. Oleh karena kesalahan yang terjadi dapat lebih besar atau lebih kecil dari panjang sebenarnya, kesalahan relatif dl/l 5% dapat berarti $+0.05$ atau -0.05 dalam kasus terburuk. Demikian juga untuk $|dr/r|$ kesalahan terbesarnya adalah 0.10. Kesalahan terbesar dR/R dapat diperoleh dengan terlebih dahulu menyatakan R dalam $\ln R$, lalu mendiferensialkannya. Apabila R dinyatakan dalam $\ln R$ akan diperoleh

$$\ln R = \ln k + \ln l - 2 \ln r.$$

Lalu hasil diferensialnya adalah

$$\frac{dR}{R} = \frac{dl}{l} - 2 \frac{dr}{r}.$$

Dalam kasus nilai terburuk $|dR/R|$, nilai dl/l dan dr/r dapat memiliki tanda yang berlawanan, sehingga suku kedua yang bertanda negatif harus diganti dengan penjumlahan. Lalu, kita memperoleh

$$\begin{aligned} \left| \frac{dR}{R} \right| &= \left| \frac{dl}{l} \right| + 2 \left| \frac{dr}{r} \right| \\ &= 0.05 + 2(0.10) \\ &= 0.25 \end{aligned}$$

atau kesalahan relatif terburuk untuk perhitungan R sebesar 25%.

4.4 Diferensial Implisit

Kita akan meninjau sub bab ini dengan contoh berikut.

Contoh 4.4.1 Apabila diberikan $x + e^x = t$, carilah dx/dt , dan d^2x/dt^2 ?

Jika kita memberikan nilai y , lalu mencari nilai t yang sesuai, dan menggambar x versus t , kita akan mendapatkan perpotongan dx/dt , dengan kata lain, x merupakan fungsi waktu, meskipun kita tidak dapat menjawab persamaan x untuk kasus fungsi dasar t . Kita dapat menjawab persamaan ini dengan mendiferensialkan masing-masing suku terhadap t , yaitu

$$\frac{dx}{dt} + e^x \frac{dx}{dt} = 1, \quad (4.11)$$

sehingga diperoleh

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1 + e^x}.$$

Berikutnya, kita dapat memperoleh turunan dengan orde lebih tinggi dengan diferensial implisit. Apabila masing-masing suku persamaan (4.11) didiferensialkan lagi terhadap t , diperoleh

$$\frac{d^2x}{dt^2} + e^x \frac{d^2x}{dt^2} + e^x \left(\frac{dx}{dt} \right) = 0.$$

Jawaban d^2x/dt^2 dapat diperoleh dengan mensubstitusi hasil dx/dt ke persamaan ini, sehingga

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2}(1 + e^x) + e^x \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 &= 0 \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{-e^x \left(\frac{dx}{dt} \right)^2}{1 + e^x}, \\ &= \frac{-e^x}{(1 + e^x)^3}. \end{aligned}$$

Masalah ini bahkan jauh lebih mudah jika kita hanya menginginkan nilai turunan pada suatu titik. Contohnya jika kita memberikan $x = 0$ dan $t = 1$ pada persamaan (4.11), yang akan menghasilkan

$$\frac{dx}{dt} + 1 \cdot \frac{dx}{dt} = 1,$$

atau

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2},$$

dan turunan orde dua yang diperoleh adalah

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 1 \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + 1 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 = 0$$

atau

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{8}.$$

Contoh 4.4.2 Carilah persamaan kemiringan garis

$$x^3 - 3y^3 + xy + 21 = 0 \tag{4.12}$$

pada titik $(1, 2)$!

Kita dapat mendiferensialkan persamaan yang diberikan secara implisit terhadap x , yang menghasilkan

$$3x^2 - 9y^2 \frac{dy}{dx} + x \frac{dy}{dx} + y = 0.$$

Apabila disubstitusi $x = 1, y = 2$, diperoleh

$$3 - 36 \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} + 2 = 0, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}.$$

Lalu, persamaan kemiringan garisnya adalah

$$\frac{y-2}{x-1} = \frac{1}{7},$$

atau

$$x - 7y + 13 = 0.$$

4.5 Dalil Rantai lain

Apabila kita memiliki suatu fungsi $z = f(x, y)$ dengan x dan y merupakan fungsi dua variabel s dan t , tentu kita dapat mencari z sebagai fungsi s dan t yaitu $\partial z / \partial s$ dan $\partial z / \partial t$. Kita akan mempelajari beberapa contoh terkait masalah ini.

Contoh 4.5.1 Carilah $\partial z / \partial s$ dan $\partial z / \partial t$ jika diberikan

$$z = xy, \quad x = \sin(s+t), \quad y = s-t. \quad (4.13)$$

Kita dapat menurunkan ketiga persamaan tersebut, dan masing-masing diperoleh

$$\begin{aligned} dz &= ydx + xdy, \\ dx &= \cos(s+t)(ds + dt), \\ dy &= ds - dt. \end{aligned}$$

Substitusi dx dan dy ke dz menghasilkan

$$\begin{aligned} dz &= y\cos(s+t)(ds + dt) + x(ds - dt), \\ &= [y\cos(s+t) + x]dt + [y\cos(s+t) - x]ds. \end{aligned}$$

Jika kita menganggap s konstan, tentu $ds = 0$, sehingga kita akan memperoleh perubahan z terhadap t ketika s konstan, dan hasilnya adalah

$$\frac{\partial z}{\partial t} = y\cos(s+t) - x.$$

Berikutnya, dengan cara yang hampir sama, kita dapat memperoleh perubahan z terhadap s ketika t dijaga konstan, yaitu

$$\frac{\partial z}{\partial s} = y\cos(s+t) + x.$$

Contoh 4.5.2 Carilah $\partial u / \partial s$, $\partial u / \partial t$, jika diberikan

$$u = x^2 + 2xy - y \ln z, \quad (4.14)$$

dengan

$$x = s + t^2, \quad y = s - t^2, \quad z = 2t.$$

Kita mencari

$$\begin{aligned} du &= 2xdx + 2xdy + 2ydx - \frac{y}{z}dz - \ln z dy, \\ &= (2x + 2y)(ds + 2tdt) + (2x - \ln z)(ds - 2tdt) - \frac{y}{z}2dt, \\ &= (4x + 2y - \ln z)ds + \left(4yt + 2t \ln z - \frac{2y}{z}\right)dt. \end{aligned}$$

Lalu diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial s} &= 4x + 2y - \ln z, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= 4yt + 2t \ln z - \frac{2y}{z}. \end{aligned}$$

Apabila kita hanya menginginkan satu turunan saja, katakanlah $\partial u / \partial t$ saja, kita dapat memulai pekerjaan dengan langsung menganggap $ds = 0$, sehingga kita dapat menuliskan

$$\begin{aligned} du_s &= (2x + 2y)(2tdt) + (2x - \ln z)(-2tdt) - \frac{y}{z}(2dt), \\ &= \left(4yt + 2t \ln z - \frac{2y}{z}\right)dt. \end{aligned}$$

Indeks bawah s mencirikan bahwa s dijaga konstan. Lalu jika persamaan di atas dibagi dengan dt , kita akan memperoleh $\partial u / \partial t$. Berikutnya, kita dapat menggunakan dalil rantai terkait dengan persamaan tersebut

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t},$$

yang dituliskan semua dalam turunan t , karena x, y, z bergantung s dan t . Penggunaan turunan tersebut menghasilkan

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= (2x + 2y)(2t) + (2x - \ln z)(-2t) + \left(-\frac{y}{z}\right)(2), \\ &= 4yt + 2t \ln z - \frac{2y}{z}. \end{aligned}$$

Terkadang, penulisan rumusan dalam bentuk matriks sangat berguna, dan kita dapat menuliskan persamaan turunan kasus ini dalam bentuk

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Terkadang bentuk matrik ini juga dapt ditulis dalam bentuk yang cenderung lebih singkat dan sembarang, yaitu

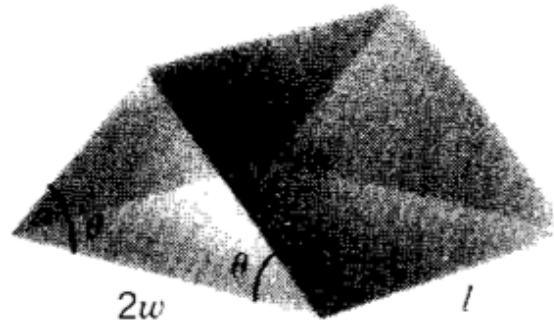
$$\frac{\partial(u)}{\partial(s,t)} = \frac{\partial(u)}{\partial(x,y,z)} \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(s,t)}, \quad (4.16)$$

yang mengingatkan kita pada

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}. \quad (4.17)$$

4.6 Penerapan

4.6.1 Masalah Nilai Maksimum dan Minimum



Gambar 4.2: Sebuah prisma dengan panjang rusuk alas persegi l , alas segitiga $2w$, dan dengan sisi segitiga sama kaki dengan sudut θ

Contoh 4.6.1 Sebuah prisma terlihat seperti gambar 4.2 dengan volume V dan tanpa sisi alas dibuat dengan bahan sesedikit mungkin. Carilah perbandingan θ, l, w agar volume yang diperoleh maksimal.

Volume dan luasan prisma dalam variabel-variabel tersebut adalah

$$V = \frac{1}{2} \cdot 2w \cdot l \cdot w \tan \theta = w^2 l \tan \theta, \quad (4.18)$$

$$A = 2w^2 \tan \theta + \frac{2lw}{\cos \theta}. \quad (4.19)$$

Apabila volume V diketahui, berdasarkan persamaan ini kita dapat mengeliminasi sebuah variabel dari θ, l , atau w sehingga tersisa dua variabel bebas, yaitu

$$\begin{aligned} A &= 2w^2 \tan \theta + \frac{2w}{\cos \theta} \frac{V}{w^2 \tan \theta}, \\ &= 2w^2 \tan \theta + \frac{2V}{w} \csc \theta. \end{aligned}$$

Luasan A sudah diperoleh, dan untuk meminimalkannya harus dicari $\partial A / \partial w$, $\partial A / \partial \theta$ dan keduanya harus sama dengan nol.

$$\frac{\partial A}{\partial w} = 4w \tan \theta - \frac{2V \csc \theta}{w^2} = 0, \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = 2w^2 \sec^2 \theta - \frac{2V}{w} \csc \theta \cot \theta = 0 \quad (4.21)$$

Substitusi kedua persamaan di atas menghasilkan

$$w^3 = \frac{V \csc \theta}{2 \tan \theta} = \frac{V \csc \theta \cot \theta}{\sec^2 \theta},$$

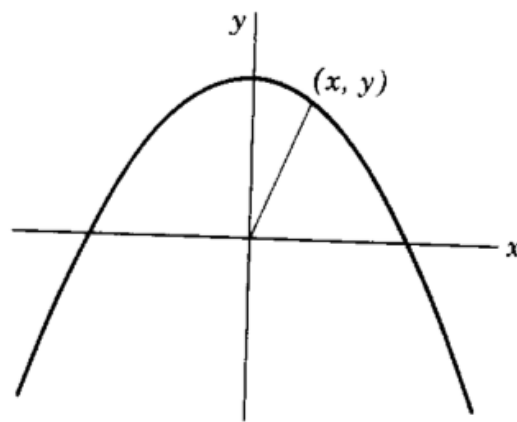
atau

$$\frac{\cos \theta}{2 \sin^2 \theta} = \frac{\cos \theta \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}.$$

Terlihat bahwa diperoleh $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}$, atau $\theta = \pi/4$, dan $\tan \theta = 1$. Berikutnya, diperoleh $V = w^2 l$ dan berdasarkan persamaan (4.20) kita akan memperoleh

$$\begin{aligned} 2w &= l\sqrt{2} \\ w &= \frac{l}{2}\sqrt{2}. \end{aligned}$$

4.6.2 Faktor kendala



Gambar 4.3: Kurva $y = 1 - x^2$

Contoh 4.6.2 Sebuah kawat dibentuk menjadi suatu kurva $y = 1 - x^2$ (gambar 4.3). Lalu, sebuah tali dibentangkan dari titik pusat koordinat ke sembarang titik ke kurva tersebut. Carilah panjang tali minimum yang mungkin.

Kita akan meminimalkan jarak $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ dari titik pusat koordinat ke titik (x, y) . Hal ini ekuivalen dengan mencari fungsi

$$f = d^2 = x^2 + y^2, \quad (4.22)$$

akan tetapi nilai (x, y) tidak bebas. Hubungan antara variabel-variabel ini disebut dengan *kendala*.

Ada beberapa cara untuk menyelesaikan permasalahan ini, yaitu: eliminasi, diferensial implisit, dan pengali Lagrange.

Eliminasi

Cara yang paling mudah dimengerti adalah dengan mengeliminasi y , sehingga

$$f = x^2 + (1 - x^2)^2 = x^2 + 1 - 2x^2 + x^4 = x^4 - x^2 + 1. \quad (4.23)$$

Berikutnya nilai minimum atau maksimum akan diperoleh jika turunan fungsi ini sama dengan nol, yaitu

$$\frac{df}{dx} = 4x^3 - 2x = 0,$$

sehingga

$$x = 0 \quad \text{atau} \quad x = \pm \sqrt{1/2}.$$

Hasil ini belum memberikan mana nilai yang maksimum dan mana yang minimum. Kita masih memerlukan turunan kedua dari fungsi f , sehingga

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = 12x^2 - 2 = \begin{cases} -2 & \text{pada } x = 0 & (\text{relatif maksimum}) \\ -4 & \text{pada } x = \pm \sqrt{1/2} & (\text{minimum}) \end{cases}$$

Nilai minimum diperoleh saat $x = \pm \sqrt{1/2}, y = 1/2$.

Diferensial Implisit

Andaikan kita tidak dapat mensubstitusi y , kita masih dapat menjawab dengan menurunkan persamaan (4.22) yaitu

$$df = 2xdx + 2ydy, \quad (4.24)$$

atau

$$\frac{df}{dx} = 2x + 2y \frac{dy}{dx}. \quad (4.25)$$

Berangkat dari persamaan $y = 1 - x^2$ kita dapat memperoleh

$$dy = -2xdx.$$

Lalu, bila substitusi ke persamaan (4.25) akan diperoleh

$$df = (2x - 4xy)dx \quad \text{atau} \quad \frac{df}{dx} = 2x - 4xy.$$

Nilai f minimum dapat diperoleh jika $df/dx = 0$, sehingga didapatkan

$$2x - 4xy = 0.$$

Berikutnya persamaan ini harus diselesaikan secara simultan dengan persamaan $y = 1 - x^2$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} 2x - 4x(1 - x^2) &= 0 \\ x = 0 \quad \text{atau} \quad x &= \pm \sqrt{1/2}. \end{aligned}$$

Uji nilai maksimum atau minimum dilakukan dengan mencari $d^2 f/dx^2$, yaitu

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = 2 + 2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 2y \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Kita dapat menemukan $y = 1$, $dy/dx = 0$, dan $d^2 y/dx^2$ pada $x = 0$, sehingga

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = 2 - 4 = -2.$$

Nilai ini adalah titik maksimum.

Lalu kita dapat menemukan

$$y = \frac{1}{2}, \quad \frac{dy}{dx} = \mp \sqrt{2}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -2$$

pada $x = \pm \sqrt{1/2}$, sehingga

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = 2 + 4 - 2 = 4.$$

Nilai ini merupakan titik minimum.

Pengali Lagrange

Bagaimanapun metode eliminasi dan diferensial implisit melibatkan aljabar yang banyak. Kita dapat menyingkat proses aljabar tersebut dengan metode *Pengali Lagrange*. Kita akan meninjau suatu masalah yang mirip dengan masalah yang diselesaikan dengan metode eliminasi dan diferensial implisit. Secara umum, yang kita lakukan adalah mencari nilai maksimum atau minimum dari suatu fungsi $f(x, y)$ dengan x dan y dihubungkan dengan suatu fungsi $\phi(x, y)$ yang bernilai konstan. Berikutnya f merupakan fungsi yang hanya bergantung satu variabel saja, katakanlah f bergantung x saja. Untuk mencari nilai maksimum atau minimum kita harus memilih $df/dx = 0$ atau $df = 0$. Oleh karena ϕ konstan tentu ita akan memperoleh $d\phi = 0$, yaitu

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0, \quad (4.26)$$

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = 0. \quad (4.27)$$

Dalam diferensial implisit, kita menyelesaikan persamaan $d\phi$ dengan menyatakan dy dalam suku-suku dx lalu melakukan substitusi ke f . Hal ini mengandung perhitungan yang kotor. Sebagai gantinya, kita seharusnya mengalikan persamaan $d\phi$ dengan λ dan menambahkannya ke dalam persamaan df , sehingga kita memperoleh

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dy = 0.$$

Apabila kita meletakkan λ sedemikian rupa sehingga

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad (4.28)$$

kita akan memperoleh

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0. \quad (4.29)$$

Persamaan (4.28), (4.29), dan $\phi(x, y) = \text{konstan}$ dapat diselesaikan untuk tiga variabel yang tidak diketahui, yaitu x, y, λ . Perhatikanlah bahwa persamaan (4.28) dan (4.29) adalah persamaan yang akan kita tulis jika kita memiliki fungsi

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda \phi(x, y) \quad (4.30)$$

dari dua variabel x dan y yang akan kita cari nilai maksimum dan minimumnya. Tentu x dan y tidak bebas, mereka terkait ϕ . Bagaimanapun persamaan (4.30) merupakan cara sederhana untuk mengingat bagaimana persamaan (4.28) dan (4.29) diperoleh. Berikutnya kita dapat menyatakan bahwa pengali Lagrange dapat diperoleh dengan cara sebagai berikut

Perolehan nilai maksimum atau minimum $f(x, y)$ ketika x dan y terkait variabel $\phi(x, y) = \text{konstan}$ dilakukan dengan mencari fungsi $F(x, y)$ seperti persamaan (4.30), lalu menurunkan F yang nilainya sama dengan nol. Tentu kita akan menemukan tiga variabel yang tidak diketahui, yaitu x, y, λ .

Berangkat dari contoh sebelumnya, kita akan mencoba menyelesaikannya menggunakan pengali Lagrange. Di sini kita peroleh

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad \phi(x, y) = y + x^2 = 1, \quad (4.31)$$

dan kita menuliskan persamaan yang akan diminimumkan sebagai

$$F(x, y) = f + \lambda \phi = x^2 + y^2 + \lambda(y + x^2). \quad (4.32)$$

Lalu, kita akan memperoleh

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= 2x + \lambda \cdot 2x = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 2y + \lambda = 0.\end{aligned}\tag{4.33}$$

Kita akan menjawab persamaan ini secara simultan dengan ϕ yaitu $y + x^2 = 1$. Berangkat dari persamaan (4.33) kita akan memperoleh $x = 0$ atau $\lambda = -1$. Jika $x = 0$, maka $y = 1$ dan $\lambda = -2$. Jika $\lambda = -1$, maka $y = \frac{1}{2}$ dan $x^2 = \frac{1}{2}$. Nilai ini sama dengan penyelesaian sebelumnya.

Contoh 4.6.3 Carilah jarak minimum dari pusat koordinat ke irisan $xy = 6$ dengan $7x + 24z = 0$. Jika kita ingin meminimalkan $x^2 + y^2 + z^2$ menuju dua syarat $xy = 6$ dan $7x + 24z = 0$, kita akan memperoleh 3 buah turunan parsial dari

$$F = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(7x + 24z) + \lambda_2xy,\tag{4.34}$$

yang masing-masing sama dengan nol, yaitu

$$\begin{aligned}2x + 7\lambda_1 + \lambda_2y &= 0, \\ 2y + \lambda_2x &= 0, \\ 2z + 24\lambda_1 &= 0.\end{aligned}$$

Penyelesaian persamaan ini menghasilkan

$$x = \pm 12/5, \quad y = \pm 5/2, \quad z = \mp 7/10.$$

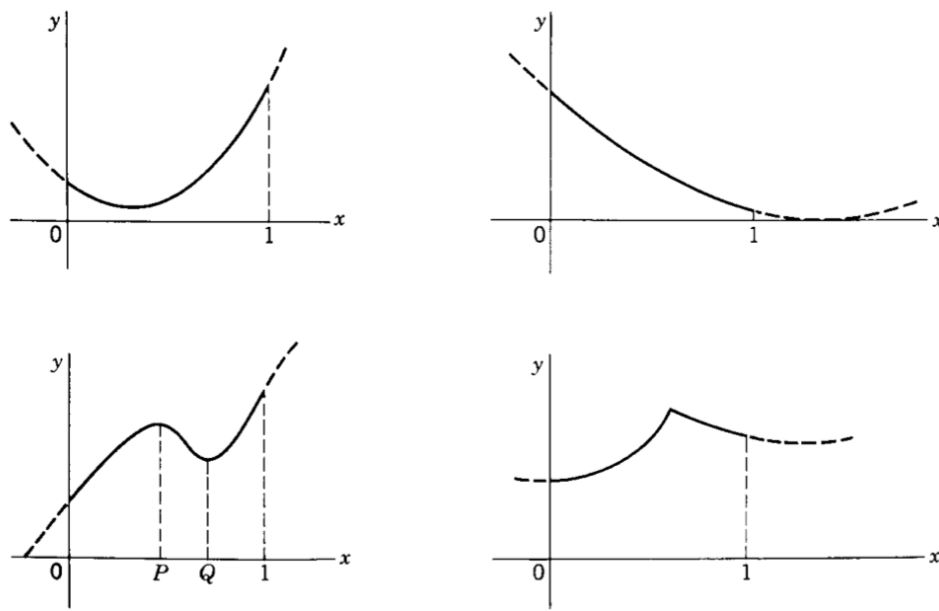
Jarak minimum yang dibutuhkan adalah

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{5}{\sqrt{2}} = 3.54.$$

4.6.3 Masalah Titik Batas

Lebih jauh, kita telah menganggap jika ada titik maksimum atau minimum, kalkulus dapat menyelesaikannya. Beberapa contoh 4.4 menunjukkan bahwa hal ini belum tentu benar. Misalkan dalam suatu masalah x hanya memiliki nilai antara 0 sampai 1. Contohnya, jika $x = |\cos \theta|$, grafik $f(x) = 2 - x^2$ muncul untuk semua nilai x real, tetapi tidak memiliki arti jika $x = |\cos \theta|$, kecuali x antara 0 sampai 1. Contoh lain, jika x panjang suatu persegi dengan sisi 2, jika $x < 0$ tidak memiliki arti karena x adalah panjang, dan $x > 0$ adalah nilai yang mungkin karena panjang sisi adalah 2. Mari coba kita bertanya nilai terkecil dan terbesar dari gambar 4.4 untuk $0 \leq x \leq 1$. Dalam gambar kiri atas, kalkulus akan memberikan nilai minimum, tetapi nilai maksimum $f(x)$ untuk 0 sampai 1 terjadi pada $x = 1$ dan tak dapat diperoleh dengan kalkulus karena $f'(x) \neq 0$ di sana. Dalam gambar kanan atas, keduanya nilai maksimum dan minimum tidak dapat diperoleh. Dalam gambar kiri bawah, nilai maksimum relatif P dan nilai minimum relatif Q dapat dicari dengan kalkulus, tetapi nilai minimum mutlak pada $x = 0$ dan maksimum mutlak pada $x = 1$ tidak dapat dicari dengan kalkulus. Gambar kanan bawah mengilustrasikan kalkulus gagal menjelaskan nilai maksimum atau minimum karena turunan fungsi diskontinyu pada titik maksimum.

Ada beberapa kesulitan yang harus diawasi ketika terdapat batasan pada nilai variabel yang akan diambil. Batasan ini biasanya tidak diberikan dengan kata-kata, kita harus melihatnya sendiri. Contohnya jika $x^2 + y^2 = 25$, x dan y keduanya antara -5 sampai 5 . Jika $y^2 = x^2 - 1$, maka $|x|$ harus sama dengan atau lebih besar dari 1. Jika $y = \sqrt{x}$, maka y' diskontinyu pada pusat koordinat.



Gambar 4.4: Contoh masalah titik batas.

Contoh 4.6.4 Suatu lembaran kawat dengan panjang 40 cm digunakan untuk membuat tepi persegi dan lingkaran dengan cara tertentu sehingga luasan persegi dan lingkaran maksimal. Katakanlah jari-jari lingkaran r sehingga keliling lingkaran $2\pi r$. Panjang $40 - 2\pi r$ akan dibuat untuk empat sisi persegi sehingga panjang salah satu sisinya adalah $10 - \frac{1}{2}\pi r$. Luas area totalnya adalah

$$A = \pi r^2 + \left(10 - \frac{1}{2}\pi r\right)^2. \quad (4.35)$$

Lalu

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dr} &= 2\pi r + 2\left(10 - \frac{1}{2}\pi r\right)\left(-\frac{1}{2}\pi\right), \\ &= 2\pi r \left(1 + \frac{\pi}{4}\right) - 10\pi. \end{aligned}$$

Jika $dA/dr = 0$, kita akan mendapatkan

$$r \left(1 + \frac{\pi}{4}\right) = 5, \quad r = 2.8, \quad A = 56 + .$$

Kita akan berpikir bahwa area tersebut maksimal. Tetapi kita harus melihat turunan keduanya untuk memastikan bahwa area tersebut maksimal. Kita menemukan

$$\frac{d^2A}{dr^2} = 2\pi \left(1 + \frac{\pi}{4}\right) > 0.$$

Apakah area tersebut sudah maksimal? Kita harus menggambar dulu A sebagai fungsi r , di mana A memiliki nilai terbesar. Jika nilai maksimum diperoleh antara $r = 0$ dan $2\pi r = 40$, kalkulus dapat menghitungnya. Berikutnya nilai maksimum dapat berada pada batas daerah tersebut.

Kita mendapatkan

$$\begin{aligned} A &= 100 \quad \text{pada } r = 0, \\ A &= \pi(6.37)^2 = 127+, \quad \text{pada } 2\pi r = 40 \text{ atau } r = 6.37. \end{aligned}$$

Kita melihat bahwa nilai terbesar berada pada $r = 6.37$ dengan $A = 127+$ yang dapat ditinjau sebagai nilai maksimum. Hal yang sama juga akan sama ketika kita menghitung lingkaran dengan sisi persegi sama dengan nol.

Kesulitan yang sama juga akan kita peroleh yang muncul dengan beberapa variabel.

Contoh 4.6.5 Suhu suatu plat persegi panjang yang dibatasi oleh $x = 0$, $y = 0$, $x = 3$, dan $y = 5$ adalah

$$T = xy^2 - x^2y + 100. \quad (4.36)$$

Carilah titik terpanas dan terdingin dari bidang tersebut !

Pertama-tama kita menghimpun turunan parsial T sama dengan nol untuk menemukan nilai minimal dan maksimal interior. Kita mendapatkan

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= y^2 - 2xy = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= 2xy - x^2 = 0. \end{aligned}$$

Jawaban untuk persamaan ini adalah $x = y = 0$ untuk $T = 100$.

Berikutnya kita akan menanyakan apakah nilai nilai di dalam plat tersebut lebih tinggi atau lebih rendah dari $T = 100$. Untuk melihat kejadiannya kita harus menggambar T sebagai fungsi x dan y yang berupa permukaan di atas bidang (x, y) . Permukaan matematika tidak berhenti pada $x = 3$ dan $y = 5$, tetapi bukan berarti masalah yang ditinjau boleh melampaui titik-titik tersebut. Kalkulus tidak akan memberikan nilai turunan nol, bahkan saat suhu pada daerah batas lebih besar atau lebih kecil dari titik-titik lain pada plat. Garis-garis $x = 0$, $y = 0$, $x = 3$, dan $y = 5$ merupakan batas, kita menganggap daerah ini adalah titik belok. Pada $x = 0$ dan $y = 0$ suhu bernilai 100. pada $x = 3$ kita memiliki

$$T = 3y^2 - 9y + 100.$$

Kita dapat menggunakan kalkulus saat nilai T maksimal atau minimal sebagai fungsi y sepanjang garis. Kita memiliki

$$\frac{dT}{dy} = 6y - 9 = 0,$$

$$y = \frac{2}{3}, \quad T = 93\frac{1}{4}.$$

Mirip dengan hal tersebut, sepanjang $y = 5$ kita memiliki

$$\begin{aligned} T &= 25x - 5x^2 + 100, \\ \frac{dT}{dx} &= 25 - 10x = 0, \\ x &= \frac{5}{2}, \quad T = 131\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Akhirnya kita mendapatkan T pada sudut-sudutnya, yaitu

$$\begin{aligned} T &= 100, \quad \text{pada } (0,0), (0,5) \text{ dan } (3,0), \\ T &= 130, \quad \text{pada } (3,5) \end{aligned}$$

Apabila semua hasil kita letakkan bersama-sama, kita akan melihat bahwa titik paling panas adalah $(\frac{5}{2}, 5)$ dengan $T = 131\frac{1}{4}$, dan titik paling dingin adalah $(3, \frac{3}{2})$ dengan $T = 93\frac{1}{4}$.

4.7 Perubahan Variabel

Salah satu manfaat diferensial parsial tercermin dalam pembuatan perubahan variabel. Contoh yang sering muncul dalam Mekanika dan Termodinamika yang terkait topik tersebut biasa dikenal sebagai **Transformasi Legendre**. Selain itu dalam mencari jawaban persamaan gelombang, perubahan ini juga biasa dilakukan.

4.7.1 Persamaan Gelombang

Salah satu contoh kasus yang melibatkan perubahan variabel adalah kasus persamaan gelombang. Bentuk persamaan gelombang secara umum adalah

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0. \quad (4.37)$$

Agar persamaan ini terlihat lebih mudah diselesaikan, kita dapat melakukan perubahan variabel. Perubahan yang dilakukan adalah

$$r = x + vt \quad (4.38)$$

$$s = x - vt, \quad (4.39)$$

dan kita akan memperoleh

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial F}{\partial s} = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial s} \right) F \quad (4.40)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} = v \frac{\partial F}{\partial r} - v \frac{\partial F}{\partial s} = v \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial s} \right) F. \quad (4.41)$$

Dengan kata lain kita dapat memperoleh perubahan variabel turunan terkait x dan t . Kita dapat menuliskan perubahan variabel ini dalam suatu *operator*, yaitu

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial s}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = v \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial s} \right) \quad (4.42)$$

Berdasarkan persamaan (4.40)-(4.42), kita akan memperoleh

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial s} = 0. \quad (4.43)$$

Jawaban persamaan terlihat lebih sederhana.

4.7.2 Transformasi Legendre

Perhatikanlah penguraian terkait Transformasi Legendre di bawah ini. Misal kita memiliki suatu fungsi

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy. \quad (4.44)$$

Andaikan didefinisikan $p = \partial f / \partial x$ dan $q = \partial f / \partial y$, kita dapat menulis kembali

$$df = p dx + q dy. \quad (4.45)$$

Jika df dikurangi suatu besaran $d(qy)$, akan diperoleh

$$df - d(qy) = p dx + q dy - q dy - y dq \quad \text{atau} \quad (4.46)$$

$$d(f - qy) = p dx - y dq \quad (4.47)$$

Berikutnya, andaikan suatu variabel g didefinisikan menurut

$$g = f - qy, \quad (4.48)$$

lalu persamaan (4.47) dapat ditulis kembali menurut

$$dg = p dx - y dq. \quad (4.49)$$

Oleh karena hanya terdapat dx dan dq yang muncul pada persamaan (4.49), kita dapat berpikir secara tepat bahwa g sebagai fungsi x dan fungsi q . Turunan g dapat dituliskan dalam bentuk sederhana, yaitu

$$\frac{\partial g}{\partial x} = p \quad \text{dan} \quad \frac{\partial g}{\partial q} = -y. \quad (4.50)$$

Berikutnya jika persamaan (4.50) pertama diturunkan terhadap g dan yang kedua terhadap x akan diperoleh

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial q} = \frac{\partial p}{\partial q} = -\frac{\partial y}{\partial x} \quad (4.51)$$

4.8 Turunan Integral; Aturan Leibneiz'

4.9 Soal-soal Latihan

Kerjakanlah soal-soal berikut!

1. Jika $z = \ln \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$, carilah $\partial z / \partial u$, $\partial z / \partial v$, dan $\partial z / \partial w$!
2. Jika $s = t''$, carilah $\partial s / \partial t$ dan $\partial s / \partial u$!
3. Jika $z = x^2 + 2y^2$, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, carilah

$$a. \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)_r \quad b. \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)_\theta \quad c. \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial y} \quad d. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial \theta}$$

4. Gunakanlah pendekatan diferensial untuk membuktikan bahwa

$$\frac{1}{(n+1)^3} - \frac{1}{n} \cong -\frac{3}{n^4}.$$

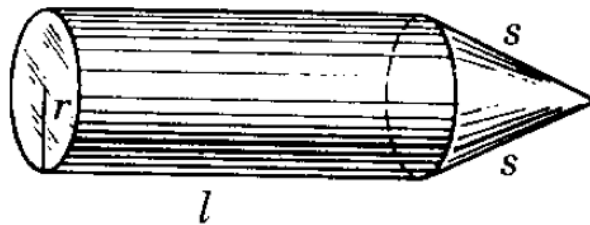
5. Rumusan titik fokus lensa tipis adalah

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{o} + \frac{1}{i}$$

dengan f adalah jarak fokus dan o dan i , masing-masing jarak lensa ke benda dan bayangan.

Jika $i = 15$ saat $o = 10$, gunakan pendekatan diferensial untuk mencari i , saat $o = 10.1$.

6. Jika diberikan $x = \ln(u^2 - v^2)$, $u = t^2$, $v = \cos t$, Carilah dx/dt .
 7. Jika diberikan $r = e^{-p^2 - q^2}$, $p = e^s$, $q = e^{-s}$, carilah dr/ds .
 8. Carilah proporsi yang memaksimalakan volume proyektil dari suatu silinder dengan ujung kerucut seperti yang diberikan pada gambar 4.5



Gambar 4.5: Proyektil.



5. Integral Lipat

Dalam kalkulus dan Fisika Dasar kita telah melihat berbagai penggunaan integral seperti saat mencari luasan, volume, massa, momen inersia, dan sebagainya. Pada bab ini, kita akan meninjau kembali contoh-contoh tersebut dan terapan lain terkait integral tunggal dan integral lipat. Kita akan mendiskusikan bagaimana penggunaan integral untuk mewakili besaran fisis dan metode untuk mengevaluasinya.

5.1 Beberapa Integral Dasar

$$\int ax^n dx = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + C$$

$$\int \frac{a}{x} dx = a \ln x + C$$

$$\int ae^{bx} dx = \frac{a}{b} e^{bx} + C$$

$$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C$$

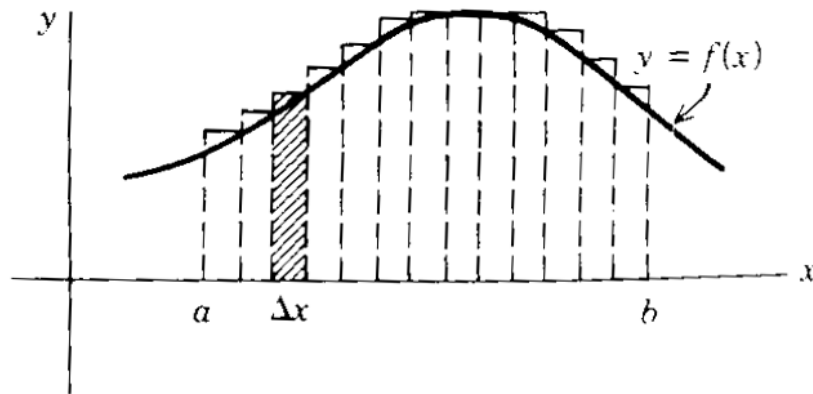
$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + C$$

$$\int \sin ax \cos ax dx = \frac{1}{2a} \sin^2 ax + C$$

5.2 Integral dua kali dan tiga kali

Mari kita tinjau lagi tentang kalkulus. $\int_a^b y dx = \int_a^b f(x) dx$ memberikan area di bawah kurva pada gambar 5.1. Kita tinjau juga definisi integral sebagai limit dari jumlahan: kita memperkirakan area dengan jumlahan dari persegi seperti pada gambar 5.1, yaitu persegi yang masing-masing memiliki lebar Δx . Kita dapat melihat, jika kita menambah kotak dan membuat lebarnya $\Delta x \rightarrow 0$, Luasan persegi akan mendekati luasan di bawah kurva. Kita mendefinisikan $\int_a^b f(x) dx$ sebagai limit jumlahan area persegi, lalu kita mengevaluasi integral sebagai *anti-turunan* dan menggunakan $\int_a^b f(x) dx$ untuk menghitung luasan di bawah kurva.

Kita akan menggunakan cara yang mirip dengan integral di atas untuk mencari volume silinder pada gambar 5.2 di bawah permukaan $z = f(x, y)$. Kita memotong bidang (x, y) menjadi persegi kecil dengan luasan $\Delta A = \Delta x \Delta y$ seperti gambar 5.2, lalu $\Delta x \Delta y$ ditarik ke atas menjadi kotak kecil panjang sampai ke permukaan z . Kita dapat memperkirakan bahwa volume silinder ini



Gambar 5.1: Pendekatan integral dengan jumlahan luasan persegi dengan lebar Δx dari a sampai b .

merupakan jumlahan dari kotak-kotak ini seperti kita memperkirakan luasan di bawah kurva dengan jumlahan persegi gambar 5.1. Jika kotak kecil kita tambah dan Δx dan $\Delta y \rightarrow 0$, tentu kita dapat melihat bahwa jumlah volume kotak akan mendekati volume bangun. Kita mendefinisikan integral ganda $f(x, y)$ melewati luasan A pada bidang (x, y) gambar 5.2 sebagai limit penjumlahan tersebut dan menuliskannya sebagai $\iint_A f(x, y) dx dy$. Sebelum kita menggunakan integral ganda untuk menghitung volume, kita akan melihat bagaimana mengevaluasi integral ganda terlebih dahulu.

Sekarang kita akan meninjau beberapa contoh bagaimana mengevaluasi integral ganda.

Contoh 5.2.1 Carilah volume suatu padatan (gambar 5.3 kiri) di bawah bidang $z = 1 + y$, dibatasi oleh bidang koordinat, dan bidang vertikal $2x + y = 2$. Berdasarkan diskusi di atas

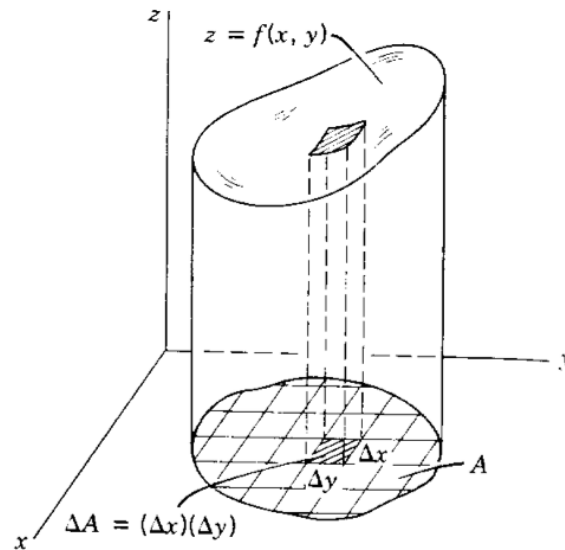
$$\iint_A z dx dy = \iint_A (1 + y) dx dy$$

dengan A adalah segitiga bayangan pada bidang (xy) (A ditunjukkan pada gambar 5.3 tengah dan kanan). Kita akan meninjau integral ganda ini dengan dua cara. Kita dapat berpikir bahwa segitiga A dipotong ke atas dalam persegi kecil $\Delta A = \Delta x \Delta y$ dan padatan utuh dipotong ke dalam kolom vertikal dengan tinggi z dan alas ΔA . Kita ingin menghitung limit jumlah volume dari kolom-kolom ini. Pertama, kita menjumlahkan kolom untuk nilai x yang pasti yang menghasilkan lempeng dengan ketebalan Δx . Hal ini sebanding dengan pengintegralan ke y (dengan menjaga x konstan) dari $y = 0$ ke y pada garis $2x + y = 2$, yaitu $y = 2 - 2x$, sehingga kita menemukan

$$\int_{y=0}^{2-2x} z dy = \int_{y=0}^{2-2x} (1 + y) dy = \left(y + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{2-2x}, \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} &= (2 - 2x) + (2 - 2x)^2 / 2, \\ &= 4 - 6x + 2x^2. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Sekarang kita akan menambahkan volume lempeng-lempeng tersebut, dengan menginte-



Gambar 5.2: Silinder di bawah permukaan $z = f(x, y)$.

gralkan hasil persamaan (5.2) mengacu ke x dari $x = 0$ ke $x = 1$, yang menghasilkan

$$\int_{x=0}^1 (4 - 6x + 2x^2) dx = \frac{5}{3} \quad (5.3)$$

Kita dapat menyingkat integral persamaan (5.2) dan (5.3) menurut

$$\int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^{2-2x} (1+y) dy \right) dx \quad \text{atau} \quad \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{2-2x} (1+y) dy dx$$

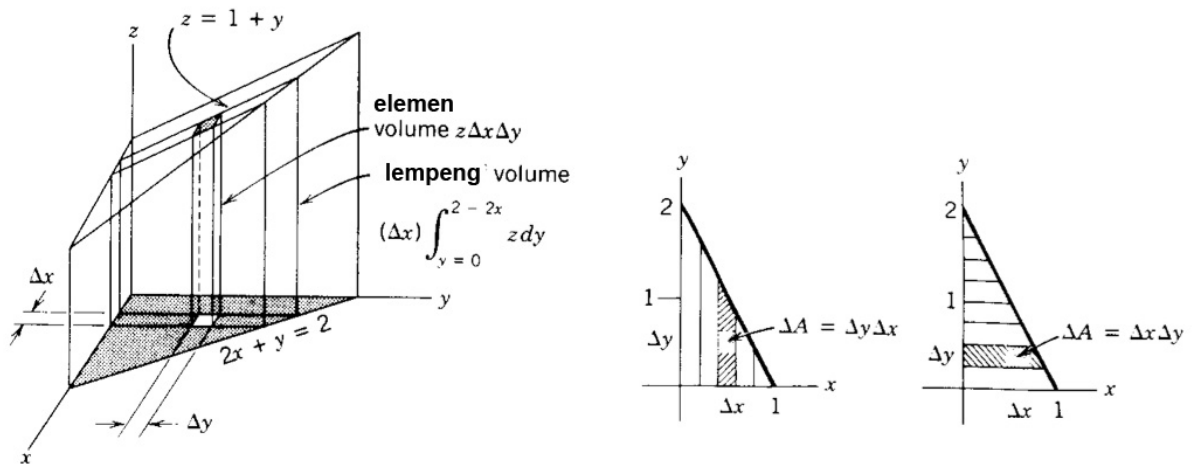
atau

$$\int_{x=0}^1 dx \int_{y=0}^{2-2x} dy (1+y)$$

Kita menyebut persamaan di atas dengan integral berulang. Integral lipat biasanya dievaluasi oleh penggunaan integral berulang. Perhatikanlah bahwa tanda kurung besar pada persamaan (??) tidak perlu digunakan jika kita selalu berhati-hati untuk menyatakan variabel yang diberikan pada batas integral, yaitu kita selalu menuliskan $\int_{x=0}^1$, tidak hanya \int_0^1 .

Sekarang kita juga menjumlahkan $z(\Delta A)$ dengan mengintegalkan ke x terlebih dahulu (untuk y yang tertentu, gambar 5.3 kanan) dari $x = 0$ sampai $x = 1 - y/2$ yang menghasilkan lempeng volume yang tegak lurus sumbu y gambar 5.3 kiri. Lalu, kita menjumlahkan lempeng tersebut dengan mengintegalkan ke y dari $y = 0$ ke $y = 2$. Kita dapat menulisnya sebagai

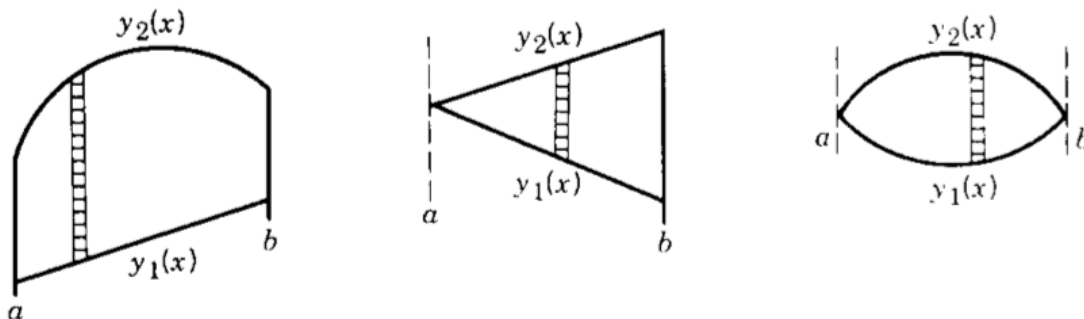
$$\begin{aligned} \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^{1-y/2} (1+y) dx dy &= \int_{y=0}^2 (1+y)x \Big|_{x=0}^{1-y/2} dy, \\ &= \int_{y=0}^2 (1+y)(1-y/2) dy, \\ &= \int_{y=0}^2 (1+y/2 - y^2/2) dy, \\ &= \frac{5}{3}. \end{aligned} \quad (5.4)$$



Gambar 5.3: Menghitung volume suatu prisma.

Kita telah melihat bahwa dari (5.3) dan (5.4) menunjukkan hasil yang sama. Kita telah memiliki dua metode untuk mengevaluasi integral dengan menggunakan integral berulang.

Sering kali salah satu dari dua metode di atas akan lebih nyaman digunakan dibandingkan metode yang lainnya, dan seharusnya kita memilih cara yang lebih mudah. Bagaimana cara menemukan jalan yang mudah akan kita pelajari menggunakan sketsa luasan A pada integral $\iint_A f(x,y) dx dy$ yang akan kita cari. Dalam masing-masing kasus kita dapat memikirkan kombinasi persegi kecil bentuk tipis dan dapat dikombinasi menjadi area yang utuh.



Gambar 5.4: Ilustrasi pemilihan elemen integral ke sumbu y terlebih dahulu.

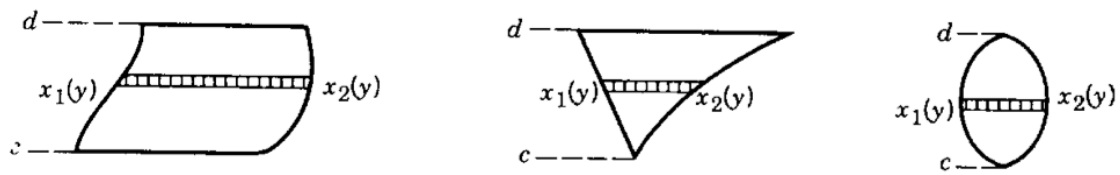
Luasan yang ditunjukkan gambar 5.4 diintegrasikan ke y terlebih dahulu. Perhatikan bahwa batas atas dan bawah luasan berupa kurva yang persamaannya diketahui, batas $x = a$ dan $x = b$ merupakan garis lurus atau titik. Kita akan menemukan

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \int_{x=a}^b \left(\int_{y=y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y) dy \right) dx. \quad (5.5)$$

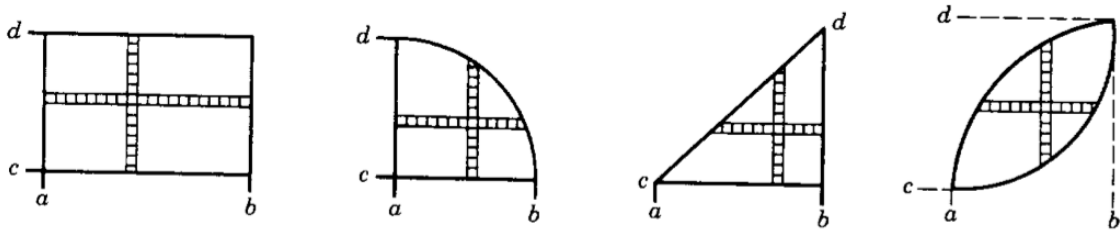
Luasan yang ditunjukkan gambar 5.5 diintegrasikan ke x terlebih dahulu. Perhatikanlah bahwa sisi kanan dan kiri luasan A merupakan kurva yang sudah diketahui persamaannya, batas $y = c$ dan $y = d$ merupakan garis lurus atau titik yang sudah jelas nilainya.

Kita akan menemukan

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \int_{y=c}^d \left(\int_{x=x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y) dx \right) dy \quad (5.6)$$



Gambar 5.5: Ilustrasi pemilihan elemen integral ke sumbu x terlebih dahulu.



Gambar 5.6: Ilustrasi pemilihan elemen integral ke sembarang pilihan.

Luasan yang ditunjukkan gambar 5.6 dapat diintegrasikan ke x atau ke y terlebih dahulu. Ilustrasi ini akan memenuhi kebutuhan persamaan (5.5) dan (5.6).

Kita akan menemukan

$$\begin{aligned} \iint_A f(x,y) dx dy &= \int_{x=a}^b \int_{y=y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y) dy dx, \\ &= \int_{y=c}^d \int_{x=x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y) dx dy. \end{aligned}$$

Kasus khusus penting adalah integral yang berupa persegi dengan batas x dan y yang keduanya konstan dan jika $f(x,y)$ merupakan hasil perkalian $f(x,y) = g(x)h(y)$. Lalu

$$\begin{aligned} \iint_A f(x,y) dx dy &= \int_{x=a}^b \int_{y=c}^d g(x)h(y) dy dx, \\ &= \left(\int_a^b g(x) dx \right) \left(\int_c^d h(y) dy \right). \end{aligned}$$

Contoh 5.2.2 Carilah massa suatu lempeng persegi yang dibatasi $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 1$, jika rapat massa persatuan luasan adalah $f(x,y) = xy$. Massa dari persegi kecil $\Delta A = \Delta x \Delta y$ diperkirakan $f(x,y) \Delta x \Delta y$, dengan $f(x,y)$ di evaluasi di beberapa titik dalam ΔA . Kita akan menambahkan luasan ini ke seluruh A agar diperoleh massa lempeng tersebut. Berdasarkan hal ini, kita akan mengevaluasi integral $dM = xy dx dy$. Kita menganggap M sebagai elemen massa,

berikutnya

$$\begin{aligned}
 M &= \iint_A xy \, dx \, dy, \\
 &= \int_{x=0}^2 \int_{y=0}^1 xy \, dx \, dy, \\
 &= \int_0^2 x \, dx \int_0^1 y \, dy, \\
 &= 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.
 \end{aligned}$$

Integral tiga kali fungsi $f(x,y,z)$ ke suatu volume, ditulis $\iiint_V f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz$, yang didefinisikan juga menurut limit penjumlahan dan dievaluasi dengan integral berulang.

Contoh 5.2.3 Carilah volume padatan gambar 5.2 kiri menggunakan integral tiga kali. Di sini, kita membayangkan bahwa padatan utuh dipotong ke dalam kotak kecil dengan volume $\Delta x \Delta y \Delta z$ dengan elemen volume $dx \, dy \, dz$. Pertama, kita menjumlahkan kotak ke atas untuk mendapatkan volume kolom. Hal ini berarti kita mengintegrasikan ke z dari 0 ke $1+y$ dengan x dan y konstan. Lalu, kita menjumlahkan volume kecil ini untuk mendapatkan lempeng dan mengintegrasikan lempeng untuk mendapatkan volume seperti pada contoh sebelumnya, yaitu

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_V dx \, dy \, dz, \\
 &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{2-2x} \int_{z=0}^{1+y} dz \, dy \, dx, \\
 &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{2-2x} (1+y) \, dy \, dx, \\
 &= \frac{5}{3}
 \end{aligned}$$

5.3 Beberapa Penerapan

Berbagai besaran fisika dinyatakan dengan integral. Mari kita melihat beberapa terapan untuk mengilustrasikan cara dan mengevaluasi integral di dalamnya. Ide dasar yang digunakan untuk mendesain integral dalam masalah ini adalah "limit suatu penjumlahan". Di situ kita membayangkan suatu objek fisis (massa, momen inersia, dll) yang akan kita cari dipotong ke lembaran-lembaran kecil yang banyak yang kita sebut sebagai *elemen*.

Andaikan diberikan kurva $y = x^2$ dari $x = 0$ sampai $x = 1$, carilah

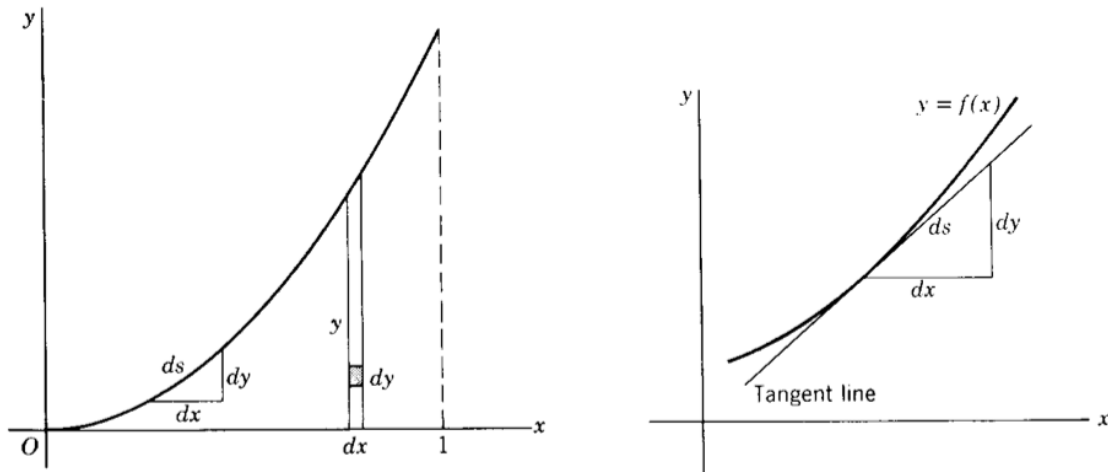
1. Luasan di bawah kurva yang dibatasi kurva tersebut dan sumbu x gambar 5.7.
2. Massa dari bidang tersebut jika kerapatannya xy .
3. Panjang kemiringan kurva.
4. Sentroid luasan
5. Sentroid kemiringan kurva
6. Momen inersia jika diputar menurut sumbu x, y , dan z dari bidang tersebut.

1. Luasannya adalah

$$A = \int_{x=0}^1 y \, dx = \int_0^1 x^2 \, dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Kita juga dapat menemukan luasan dengan integral ganda $dA = dy \, dx$, dan kita memiliki

$$\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{x^2} dy \, dx = \int_0^1 x^2 \, dx$$



Gambar 5.7: Ilustrasi pencarian luasan di bawah kurva $y = x^2$.

seperti sebelumnya.

2. Elemen luasan sebagai elemen integral ganda dalam metode di (a) adalah $dA = dy dx$. Oleh karena rapat luasan $\sigma = xy$ elemen massa dM adalah $dM = xy dy dx$, dan massa total adalah

$$\begin{aligned} M &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{x^2} xy dy dx, \\ &= \int_0^1 x dx \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{x^2}, \\ &= \int_0^1 \frac{x^5}{2} dx, \\ &= \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

3. Elemen panjang ds didefinisikan seperti pada gambar 5.7, sehingga kita memiliki

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \quad (5.7)$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx = \sqrt{(dx/dy)^2 + 1} dy. \quad (5.8)$$

Jika $y = f(x)$ memiliki turunan pertama dy/dx , kita dapat mencari arc panjang kurva $y = f(x)$ antara a dan b dengan menghitung $\int_a^b ds$. Contohnya, jika kita memiliki

$$\frac{dy}{dx} = 2x, \quad ds = \sqrt{1 + 4x^2} dx,$$

maka

$$\begin{aligned} s &= \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx, \\ &= \frac{2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5})}{4}. \end{aligned}$$

4. Mari kita lihat kembali rumusan terkait pusat massa pada fisika dasar, yaitu

Pusat massa suatu benda dengan koordinat $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ diberikan oleh persamaan

$$\int \bar{x} dM = \int x dM, \quad \int \bar{y} dM = \int y dM, \quad \int \bar{z} dM = \int z dM. \quad (5.9)$$

dengan dM adalah elemen massa dan integral dilakukan ke seluruh benda.

Jika benda hanya memiliki luasan saja, misalnya $\bar{z} = 0$, elemen massa dirumuskan menurut $dM = \sigma dA$, dengan σ adalah rapat luasan. Jika σ konstan kita dapat menuliskan

$$\int \bar{x} \sigma dA = \int x \sigma dA,$$

atau

$$\int \bar{x} dA = \int x dA. \quad (5.10)$$

Sentroid merupakan pusat massa jika rapat massa konstan.

Dalam contoh soal, kita memiliki

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{x^2} \bar{x} dy dx &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{x^2} x dy dx, \\ &= \frac{x^4}{4} \Big|_0^1, \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{x^2} \bar{y} dy dx &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{x^2} y dy dx, \\ &= \frac{x^5}{10} \Big|_0^1, \\ &= \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

5. Pusat massa (\bar{x}, \bar{y}) kawat yang dibatasi kurva $y = f(x)$ diberikan menurut

$$\int \bar{x} \lambda ds = \int x \lambda ds, \quad \int \bar{y} \lambda ds = \int y \lambda ds, \quad (5.11)$$

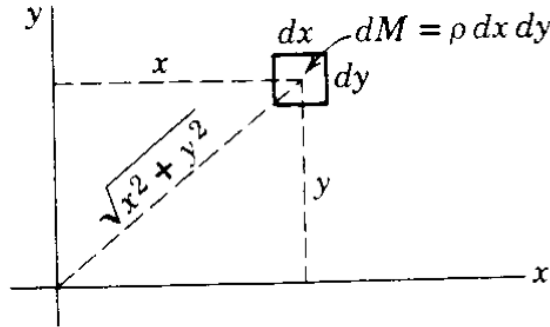
dengan λ adalah rapat massa persatuan panjang dan integral tunggal dengan ds diberikan oleh persamaan (5.8). Jika λ adalah konstanta, persamaan (5.11) mendefinisikan sentroid. Dalam contoh ini kita memiliki

$$\begin{aligned} \int_0^1 \bar{x} \sqrt{1+4x^2} dx &= \int_0^1 x \sqrt{1+4x^2} dx, \\ \int_0^1 \bar{y} \sqrt{1+4x^2} dx &= \int_0^1 y \sqrt{1+4x^2} dx, \\ &= \int_0^1 x^2 \sqrt{1+4x^2} dx. \end{aligned}$$

6. Kita memerlukan definisi berikut:

Momen Inersia I suatu titik massa m yang diputas pada suatu sumbu didefinisikan perkalian massa dengan kuadrat jarak l dari m ke sumbu putar. Jika massa berupa medium kontinyu yang dilakukan adalah mengintegralkan $l^2 dM$ melingkupi seluruh objek dengan l merupakan jarak dM ke sumbu putar.

Dalam contoh, kita memiliki $\sigma = xy$, dan $dM = xy \, dy \, dx$. Jarak dM ke sumbu x adalah y (gambar 5.8), jarak dM ke sumbu y adalah x , dan jarak dM ke sumbu z adalah $\sqrt{x^2 + y^2}$.



Gambar 5.8: Panjang elem dM ke sumbu koordinat.

Berikutnya momen Inersia ke masing-masing sumbu putar adalah

$$\begin{aligned} I_x &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{x^2} y^2 xy \, dy \, dx = \int_0^1 \frac{x^9}{4} dx = \frac{1}{40}, \\ I_y &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{x^2} x^2 xy \, dy \, dx = \int_0^1 \frac{x^7}{2} dx = \frac{1}{16}, \\ I_z &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{x^2} (x^2 + y^2) xy \, dy \, dx = I_x + I_y = \frac{7}{80}, \end{aligned}$$

Kita dapat melihat bahwa $I_x + I_y = I_z$ dalam lempeng pada kasus ini. Fakta ini diketahui sebagai *Teorema Sumbu Tegak*.

Biasanya jawaban momen inersia ini ditulis dalam bentuk perkalian massa. Oleh karena $M = \frac{1}{12}$ (jawaban (b)), kita akan memperoleh

$$I_x = \frac{12}{40} M = \frac{3}{10} M,$$

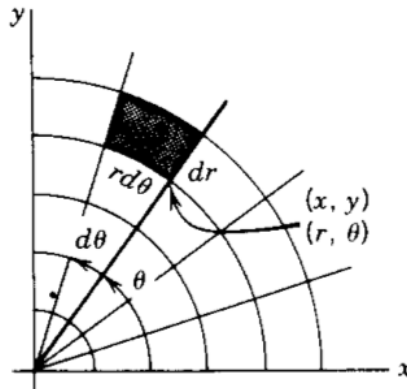
$$I_y = \frac{12}{16} M = \frac{3}{4} M,$$

$$I_z = \frac{7 \cdot 16}{80} M = \frac{21}{20} M.$$

5.4 Jacobian

Dalam banyak contoh kasus, kita akan lebih mudah menggunakan koordinat yang sesuai dengan masalah yang ditinjau, bukan menggunakan sistem koordinat kartesius yang paling kita kenal.

Koordinat polar akan sangat membantu tinjauan dua dimensi, koordinat silinder dan bola akan banyak membantu dalam ruang tiga dimensi. Oleh karena itu, penting bagi kita untuk mengetahui secara langsung bagaimana bentuk integral lipat dalam koordinat tersebut. Hal yang perlu diketahui adalah luasan, volume, elemen panjang terkait koordinat tersebut.

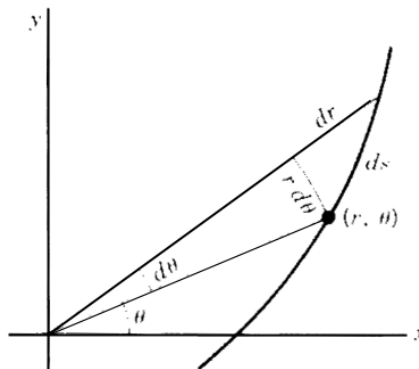


Gambar 5.9: Elemen luasan koordinat polar.

Dalam bidang (dua dimensi), koordinat polar r , θ dihubungkan dengan koordinat kartesius menurut

$$x = r \cos \theta, \quad (5.12)$$

$$y = r \sin \theta. \quad (5.13)$$



Gambar 5.10: Elemen panjang koordinat polar.

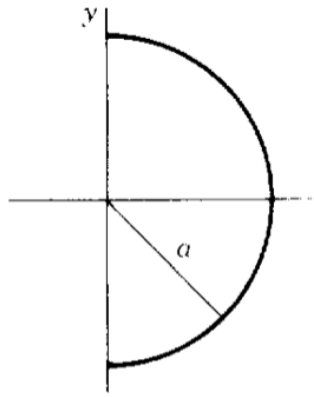
Mari kita lihat elemen luas $dx dy$ yang diperoleh dengan menggambar kisi garis $x = \text{konstanta}$ dan $y = \text{konstanta}$ yang memotong bidang ke dalam persegi kecil-kecil dx dengan dy . Luasan satu persegi kecil tersebut adalah $dx dy$. Kita dapat membuat konstruksi dalam koordinat polar dengan menggambar $\theta = \text{konstanta}$ dan $r = \text{konstanta}$. Berikutnya kita akan memperoleh kisi seperti gambar 5.9. Jika kita tinjau panjang sisi elemen luasan bukanlah dr dan $d\theta$, akan tetapi dr dan $r d\theta$, dan luasannya adalah

$$dA = dr \cdot r d\theta = r dr d\theta. \quad (5.14)$$

Lalu berdasarkan gambar 5.10, elemen panjang ds diberikan menurut

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2, \quad (5.15)$$

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} d\theta = \sqrt{\left(1 + r^2 \frac{d\theta}{dr}\right)^2} dr. \quad (5.16)$$



Gambar 5.11: Lembaran semi-lingkaran.

Contoh 5.4.1 Diberikan lembaran semi-lingkaran suatu material dengan jari-jari a dengan kerapatan konstan ρ , carilah

1. Sentroid luasan semi-lingkaran.
2. Momen Inersia material tersebut yang diputar menurut diameter pembentuk tepi semi-lingkaran tersebut
1. Pada gambar 5.11, berdasarkan geometri kita dapat melihat $\bar{y} = 0$, dan menurut persamaan (5.10) kita mendapatkan

$$\int \bar{x} r dr d\theta = \int x r dr d\theta \quad (5.17)$$

Perubahan x ke polar koordinat dan merubah batas yang terkait, kita memperoleh

$$\bar{x} \int_{r=0}^a \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} r dr d\theta = \int_{r=0}^a \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} r \cos \theta dr d\theta \quad (5.18)$$

Berikutnya, hasil integrasinya adalah

$$\begin{aligned} \bar{x} \frac{a^2}{2} \pi &= \frac{a^3}{3} \sin \theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{a^3}{3} \cdot 2, \\ \bar{x} &= \frac{4a}{3\pi}. \end{aligned}$$

2. Kita ingin momen inersia yang diputar menurut sumbu y gambar 5.11. Berdasarkan definisi $\int x^2 dm$. Dalam koordinat polar $dM = \rho dA = \rho r dr d\theta$. Oleh karena ρ konstan,

kita memiliki

$$\begin{aligned} I_y &= \rho \int x^2 r \, dr \, d\theta = \rho \int_{r=0}^a \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos^2 \theta \, r \, dr \, d\theta, \\ &= \rho \frac{\pi a^4}{8}. \end{aligned}$$

Oleh karena massa objek semi-lingkaran adalah

$$\begin{aligned} M &= \rho \int r \, dr \, d\theta = \rho \int_{r=0}^a \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} r \, dr \, d\theta, \\ &= \rho \frac{\pi a^2}{2}, \end{aligned}$$

sehingga

$$I_y = \frac{2M}{\pi a^2} \frac{\pi a^4}{8} = \frac{Ma^2}{4}.$$

Koordinat Silinder dan Bola

Dua sistem koordinat penting dalam tiga dimensi adalah koordinat silinder dan koordinat bola. Gambar 5.12 dan 5.13 menunjukkan secara geometri hubungan koordinat-koordinat tersebut dengan koordinat kartesius.

Transformasi koordinat dari koordinat kartesius ke koordinat silinder ditunjukkan dengan hubungan sebagai berikut:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad z = z. \quad (5.19)$$

Elemen volume dirumuskan menurut

$$dV = r \, dr \, d\theta \, dz. \quad \text{Elemen volume koordinat silinder} \quad (5.20)$$

Lalu, elemen panjang dirumuskan menurut

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2. \quad \text{elemen panjang koordinat silinder} \quad (5.21)$$

Transformasi koordinat dari koordinat kartesius ke koordinat bola dihubungkan menurut

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad (5.22)$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi, \quad (5.23)$$

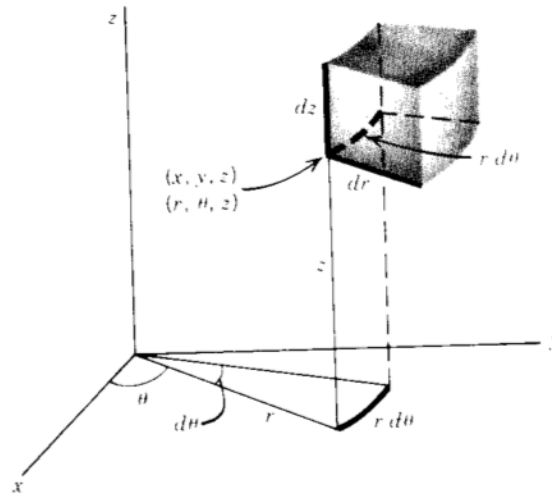
$$z = r \cos \theta. \quad (5.24)$$

Elemen volume dirumuskan menurut

$$dV = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi. \quad \text{Elemen volume koordinat bola} \quad (5.25)$$

Lalu, elemen panjang dirumuskan menurut

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \, d\phi^2. \quad \text{Elemen panjang koordinat bola} \quad (5.26)$$



Gambar 5.12: Elemen volume koordinat silinder.

Jacobian

Kita telah melihat bagaimana mencari luasan dan volume untuk koordinat polar, silinder, dan bola berdasarkan geometri. Bagaimanapun, akan lebih mudah jika kita mengetahui pencarian tersebut secara aljabar. Bahkan, secara aljabar, perubahan koordinat tersebut dapat kita lakukan ke sembarang koordinat yang asing bagi kita. Kita akan menggunakan beberapa teorema yang dapat mendeskripsikan transformasi ini. Contohnya, andaikan dalam dua dimensi x dan y diberikan sebagai fungsi suatu variabel baru s dan t . *Jacobian* x dan y yang mengacu pada s dan t adalah determinan yang diberikan persamaan (5.27) di bawah ini, yaitu:

$$J = J\left(\frac{x, y}{s, t}\right) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix}. \quad (5.27)$$

Lalu, elemen luasan $dx dy$ diganti dengan elemen dalam sistem s, t , dengan elemen luasan

$$dA = |J| ds dt. \quad (5.28)$$

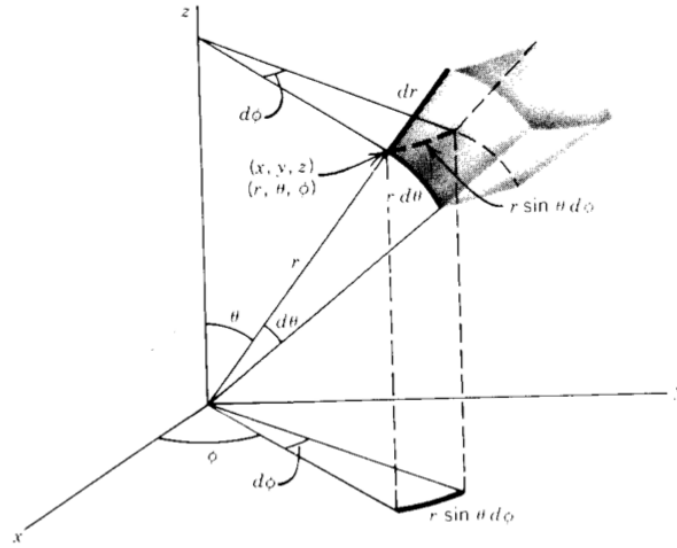
dengan $|J|$ merupakan nilai mutlak nilai Jacobian persamaan (5.27).

Mari kita tinjau Jacobian x, y yang mengacu ke koordinat polar r, θ yang akan menverifikasi persamaan (5.14). Metode geometri memberikan hasil yang sama dengan cara Jacobian untuk elemen luasan koordinat polar. Kita dapat memperoleh Jacobian

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r. \quad (5.29)$$

Apabila hasil ini kita masukkan ke persamaan (5.28), kita akan memperoleh (5.14).

Penggunaan Jacobian dapat diperluas ke variabel yang lebih banyak. Pernyataan teorema Jacobian yang lebih umum dituliskan menurut uraian di bawah ini.



Gambar 5.13: Elemen volume koordinat bola.

Anggaplah kita memiliki integral tiga kali

$$\iiint f(u, v, w) \, du \, dv \, dw, \quad (5.30)$$

dalam himpunan variabel u, v, w . Andaikan r, s, t merupakan himpunan variabel lain yang terkait dengan u, v, w sebagai

$$u = u(r, s, t), \quad v = v(r, s, t), \quad w = w(r, s, t). \quad (5.31)$$

Lalu, jika

$$J = \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(r, s, t)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{\partial w}{\partial r} & \frac{\partial w}{\partial s} & \frac{\partial w}{\partial t} \end{vmatrix} \quad (5.32)$$

merupakan Jacobian u, v, w yang terkait dengan r, s, t , sehingga integral tiga kali variabel baru adalah

$$\iiint f \cdot |J| \cdot dr \, ds \, dt, \quad (5.33)$$

dengan f, J dinyatakan dalam suku-suku variabel baru r, s, t tersebut.

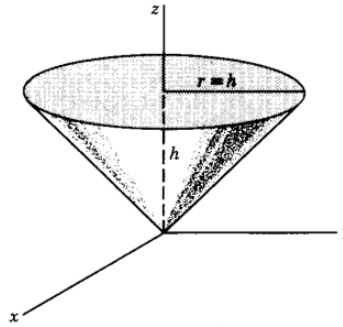
Kita dapat menggunakan Jacobian persamaan (5.32) untuk menverifikasi elemen volume koordinat silinder persamaan (5.20) dan elemen volume koordinat bola (5.25).

Andaikan kita akan menghitung jacobian untuk koordinat bola dengan transformasi persamaan

(5.22) sampai (5.24), kita memiliki

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} \\
 &= r^2 \sin \theta [-\sin^2 \phi (-\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \\
 &\quad - \cos^2 \phi (-\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)] \\
 &= r^2 \sin \theta.
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

Hasil ini merupakan Jacobian elemen volume koordinat bola $dV = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$.



Gambar 5.14: Kerucut terbalik dengan pusat pada sumbu z .

Contoh 5.4.2 Carilah sentroid z suatu kerucut seragam dengan tinggi h yang sama dengan jari-jari alasnya (gambar 5.14). Carilah juga momen inersia kerucut ini yang diputar pada sumbu z .

Menurut gambar kerucut tersebut, $z = r$. Oleh karena itu, penampang lintang berupa lingkaran dengan jari-jari yang sama dengan ketinggiannya. Massa diperoleh dengan mengintegrasikan $dM = \rho r \, dr \, d\theta \, dz$, dengan ρ adalah kerapatan konstan. Batas pengintegralan adalah

$$\theta : 0 \text{ sampai } 2\pi, \quad r : 0 \text{ sampai } z, \quad z : 0 \text{ sampai } h.$$

(belum selesai)

Contoh 5.4.3 Carilah momen inersia bola pejal dengan jari-jari a menurut salah satu diameternya.

Jika kita menggunakan koordinat bola, persamaan bola adalah $r = a$. Lalu massa bola

tersebut adalah

$$\begin{aligned} M &= \rho \int dV, \\ &= \rho \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^a r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi, \\ &= \rho \frac{a^3}{3} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho. \end{aligned}$$

Momen inersia yang diputar menurut sumbu z adalah

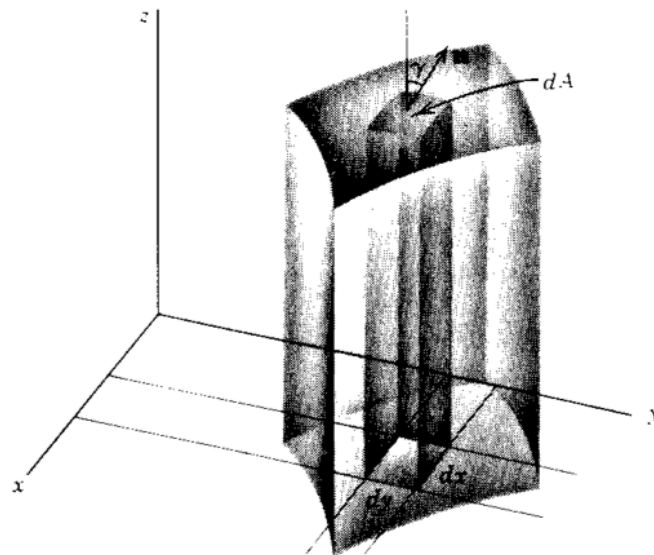
$$\begin{aligned} I &= \int (x^2 + y^2) dM, \\ &= \rho \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^a (r^2 \sin \theta) r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi, \\ &= \rho \frac{a^5}{5} \cdot \frac{4}{3} \cdot 2\pi = \frac{8\pi a^5 \rho}{15}, \end{aligned}$$

atau jika kita nyatakan dalam M akan diperoleh

$$I = \frac{2}{5} M a^2 \quad (5.35)$$

5.5 Integral Permukaan

Sekarang, kita akan meninjau integral permukaan secara umum. Tinjaulah bagian permukaan seperti gambar 5.15 dan proyeksinya pada bidang (x, y) . Kita menganggap bahwa garis-garis sejajar sumbu z hanya memotong permukaan satu kali.



Gambar 5.15: Ilustrasi integral permukaan.

Andaikan dA (gambar 5.15) adalah elemen permukaan yang diproyeksikan ke dx , dy dalam

bidang (x, y) dan andaikan γ sudut lancip antara dA dengan bidang (x, y) . Kita memiliki

$$dx dy = dA \cos \gamma \quad \text{atau} \quad dA = \sec \gamma dx dy$$

Luas area permukaan berikutnya adalah

$$\iint dA = \iint \sec \gamma dx dy \quad (5.36)$$

dengan batas pada x dan y harus semacam integral yang diproyeksikan ke bidang (x, y) .

Sekarang kita harus mencari $\sec \gamma$. Sudut antara dua bidang sama dengan sudut antara normal ke bidang. Jika \mathbf{n} merupakan vektor satuan normal ke bidang pada dA , lalu γ adalah sudut antara \mathbf{n} dan sumbu z yaitu antara vektor \mathbf{n} dan \mathbf{k} , sehingga $\cos \gamma = |\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}|$. Andaikan persamaan permukaan adalah $\phi(x, y, z) = \text{konstanta}$, maka

$$\text{grad } \phi = \nabla \phi = \mathbf{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (5.37)$$

adalah normal ke $\phi(x, y, z) = \text{konstanta}$. Lalu, \mathbf{n} memiliki arah yang sama dengan $\text{grad } \phi$, sehingga

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}. \quad (5.38)$$

Berdasarkan persamaan (5.37) dan (5.38) kita menemukan

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} &= \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla \phi}{|\nabla \phi|} = \frac{\partial \phi / \partial z}{|\nabla \phi|}, \\ \sec \gamma = \frac{1}{\cos \gamma} &= \frac{1}{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}|}, \end{aligned}$$

sehingga

$$\sec \gamma = \frac{|\nabla \phi|}{|\partial \phi / \partial z|} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2}}{|\partial \phi / \partial z|} \quad (5.39)$$

Seringkali persamaan permukaan diberikan dalam bentuk dalam bentuk $z = f(x, y)$. Dalam kasus $\phi(x, y, z) = z - f(x, y)$ sehingga $\partial \phi / \partial z = 1$, dan persamaan (5.39) dapat disederhanakan menjadi

$$\sec \gamma = \sqrt{(\partial f / \partial x)^2 + (\partial f / \partial y)^2 + 1}. \quad (5.40)$$

Bagian II

6	Analisis Vektor	113
6.1	Pendahuluan	
6.2	Contoh Perkalian Vektor	
6.3	Turunan Vektor	
6.4	Turunan Berarah	
6.5	Beberapa Ungkapan Terkait ∇	
6.6	Integral Garis	
6.7	Divergensi dan Teorema Green	
6.8	Curl dan Teorema Stokes	
7	Persamaan Diferensial Biasa	145
7.1	Pemisahan Variabel	
7.2	Persamaan Diferensial Orde Pertama	
7.3	Teknik lain Persamaan Linier Orde Pertama	
7.4	Persamaan Linier Orde Kedua	
8	Kalkulus Variasi	157
8.1	Geodesik	
8.2	Persamaan Euler	
8.3	Persamaan Euler-Lagrange	
9	Fungsi Khas	161
9.1	Fungsi Faktorial	
9.2	Fungsi Gamma	
9.3	Fungsi Beta	
9.4	Fungsi Error	
9.5	Integral dan Fungsi Eliptik	



6. Analisis Vektor

6.1 Pendahuluan

Pada bab 3, 4, dan 5, kita telah mendiskusikan ide-ide dasar untuk aljabar vektor. Topik yang akan ditinjau dalam bab ini adalah kalkulus vektor. Pertama-tama kita akan meninjau beberapa contoh terapan hasil kali vektor dalam Fisika. Lalu, kita akan mendiskusikan diferensial dan integral fungsi vektor. Turunan dan integral dalam berbagai terapan sangatlah penting. Hal ini yang membedakan mekanika klasik, listrik magnet, mekanika kuantum dan cabang-cabang fisika lainnya.

6.2 Contoh Perkalian Vektor

Pada bab 3 kita telah mendefinisikan hasil kali skalar dan hasil kali vektor antara dua buah vektor \mathbf{A} dan \vec{B} dengan sudutnya keduanya kurang dari 180° , menurut

$$\mathbf{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = \sum_{i=1}^3 A_i B_i, \quad (6.1)$$

dan

$$\mathbf{A} \times \vec{B} = \vec{C}, \quad \text{dengan } |C| = AB \sin \theta \quad (6.2)$$

dan arah \vec{C} tegak lurus keduanya dan memenuhi kaidah sekrup putar kanan.

Mari kita meninjau beberapa terapan berdasarkan definisi ini.

Usaha

Dalam Fisika dasar kita telah belajar bahwa usaha sama dengan gaya dikalikan perpindahan. Jika gaya dan perpindahan tidak sejajar, maka komponen gaya yang tegak lurus tidak digunakan.



Gambar 6.1: Ilustrasi hasil kali skalar untuk konsep usaha.

Usaha dalam kasus ini adalah komponen gaya yang sejajar pada perpindahan dikalikan dengan perpindahan, yaitu $W = (F \cos \theta) \cdot d = F d \cos \theta$ (gambar 6.1 kiri). Kita akan lebih mudah menyatakan dalam

$$W = Fd \cos \theta = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}. \quad (6.3)$$

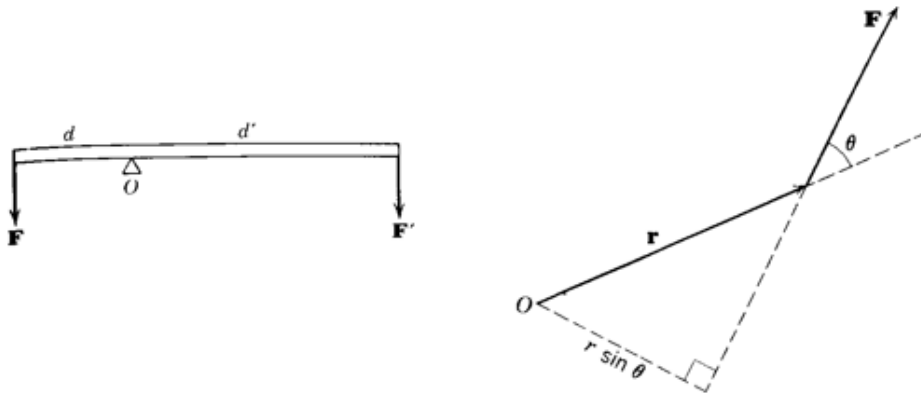
Jika besarnya gaya bervariasi terhadap jarak, dan mungkin juga arah gaya berubah, kita dapat menuliskan usaha untuk perpindahan infinitesimal dr (gambar 6.1 kanan) sebagai

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (6.4)$$

Kita akan melihat pada bagian berikutnya bagaimana mengintegralkan dW untuk memperoleh usaha total W yang dilakukan partikel yang didorong sepanjang lintasan dengan gaya bervariasi \mathbf{F} .

Torka

Dalam meninjau masalah papan jungkat-jungkit atau tuas (gambar 6.2) kita mengalikan gaya



Gambar 6.2: Ilustrasi hasil kali skalar untuk konsep usaha.

dengan jarak, yaitu besaran Fd yang disebut *torka atau momen gaya* dari gaya \mathbf{F} dan jarak d dari titik tumpu ke lengan gaya \mathbf{F} tersebut. Lengan tuas merupakan jarak tegak lurus dari O ke garis aksi \mathbf{F} . Lalu, secara umum Torka (gambar 6.2 kanan) didefinisikan sebagai hasil kali silang lengan tuas dengan gaya yaitu $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Besar torka tersebut adalah

$$|\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = rF \sin \theta, \quad (6.5)$$

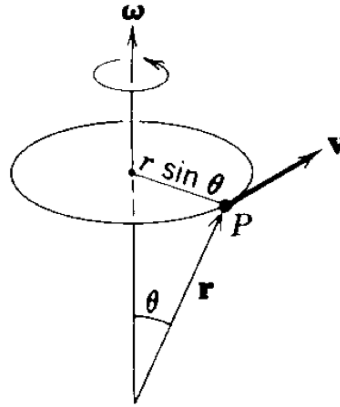
dengan arah yang saling tegak lurus keduanya (\mathbf{r} , \mathbf{F}) dan memenuhi kaidah sekrup putar kanan.

Kecepatan sudut

Vektor dapat digunakan untuk mewakili kecepatan sudut benda berotasi dengan cara yang sama seperti di atas. Arah vektor sepanjang sumbu rotasi dalam arah progresi sekrup putar kanan berbelok sesuai jalur perputaran benda. Andaikan titik P gambar 6.3 mewakili titik pada benda tegar yang berotasi dengan kecepatan sudut $\vec{\omega}$. Kita dapat menunjukkan bahwa kecepatan linier pada titik P adalah $\mathbf{v} = \vec{\omega} \times \mathbf{r}$. Arah \mathbf{v} tegak lurus bidang \mathbf{r} dan $\vec{\omega}$. Lalu, kita dapat menunjukkan bahwa besarnya \mathbf{v} adalah

$$v = |\vec{\omega} \times \mathbf{r}| = \omega r \sin \theta, \quad (6.6)$$

dan $r \sin \theta$ merupakan radius titik P dari sumbu putar.



Gambar 6.3: Ilustrasi perolehan kecepatan sudut.

6.2.1 Perkalian rangkap tiga

Terdapat dua jenis hasil kali yang melibatkan tiga vektor, yang pertama berupa skalar yang disebut *hasil kali rangkap tiga skalar*, dan yang kedua berupa vektor yang disebut *hasil kali rangkap tiga silang*.

Hasil kali skalar rangkap tiga

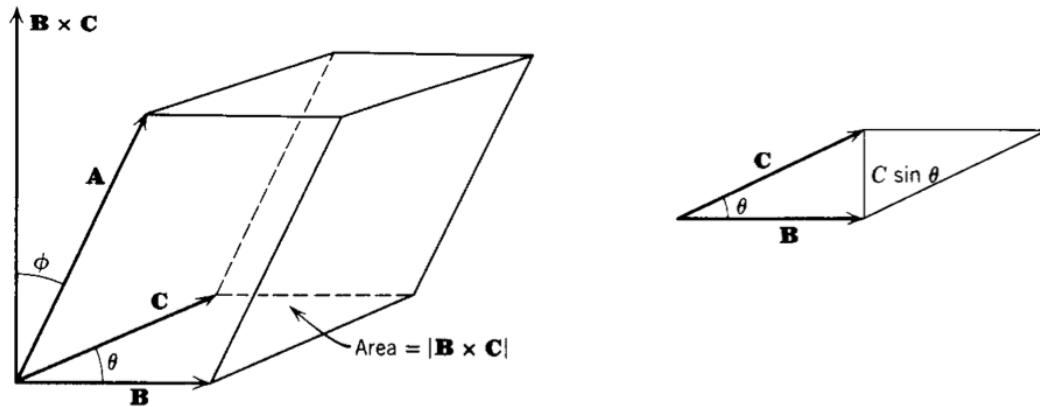
Hasil ini ditulis $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$. Ilustrasi geometri dari hasil ini ditunjukkan pada gambar 6.4 yang berupa *pipa sejajar* menggunakan $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ sebagai perpotongan ketiga tepinya. Lalu $|\mathbf{B} \times \mathbf{C}|$ merupakan area dasar (gambar 6.4 kanan) yang berupa jajaran genjang dengan sisi $|\mathbf{B}|, \mathbf{C}$ dan sudut keduanya θ . Tinggi pipa sejajar ini adalah $|\mathbf{A}| \cos \phi$ (gambar 6.4 kiri). Berikutnya volume bangun tersebut adalah

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = A |\mathbf{B} \times \mathbf{C}| \cos \phi = ABC \sin \theta \cos \phi. \quad (6.7)$$

Jika $\phi > 90^\circ$, luaran akan negatis, sehingga secara umum kita dapat mengatakan bahwa volume tersebut adalah $|\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})|$.

Perhitungan yang dilakukan pertama kali dalam hasil kali rangkap tiga skalar ini adalah $|\mathbf{B} \times \mathbf{C}|$ dengan menggunakan bentuk determinan seperti pada bab 3 yaitu

$$\mathbf{B} \times \mathbf{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}.$$



Gambar 6.4: Ilustrasi hasil kali rangkap tiga skalar.

Sekarang kita dapat menuliskan

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = A_x(\mathbf{B} \times \mathbf{C})_x + A_y(\mathbf{B} \times \mathbf{C})_y + A_z(\mathbf{B} \times \mathbf{C})_z.$$

Hal ini merupakan perluasan persamaan (??) dengan mengganti baris pertama dengan komponen-komponen \mathbf{A} , yaitu

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}. \quad (6.8)$$

Hasil kali silang rangkap tiga

Andaikan diketahui tiga buah vektor dalam komponen-komponennya

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= B_x \mathbf{i}, \\ \mathbf{C} &= C_x \mathbf{i} + C_y \mathbf{j}, \\ \mathbf{A} &= A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Kita dapat menemukan

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \times \mathbf{C} &= B_x \mathbf{i} \times (C_x \mathbf{i} + C_y \mathbf{j}), \\ &= B_x C_y (\mathbf{i} \times \mathbf{j}), \\ &= B_x C_y \mathbf{k}, \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \times (B_x C_y \mathbf{k}), \\ &= A_x B_x C_y (\mathbf{i} \times \mathbf{k}) + A_y B_x C_y (\mathbf{j} \times \mathbf{k}), \\ &= -A_x B_x C_y \mathbf{j} + A_y B_x C_y \mathbf{i}. \end{aligned}$$

Kita dapat menuliskan $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ sebagai kombinasi \mathbf{B} dan \mathbf{C} , dengan menjumlahkan dan mengurangkan dengan $A_x B_x C_x \mathbf{i}$ yaitu

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = -A_x B_x (C_x \mathbf{i} + C_y \mathbf{j}) + (A_y C_y + A_x C_x) B_x \mathbf{i}.$$

Masing-masing ungkapan elemen hasil di atas dapat ditulis dalam bentuk yang lebih sederhana, yaitu

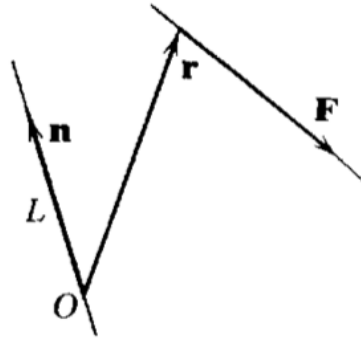
$$\begin{aligned} A_x B_x &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \\ A_y C_y + A_x C_x &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}, \\ C_x \mathbf{i} + C_y \mathbf{j} &= \mathbf{C}, \\ B_x \mathbf{i} &= \mathbf{B}, \end{aligned}$$

sehingga kita dapat menuliskan

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (6.9)$$

Penerapan Hasil Kali rangkap tiga Skalar

Kita telah menunjukkan bahwa torka dari suatu gaya \mathbf{F} di sekitar sumbu dapat ditulis $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ dalam suatu kasus khusus, katakanlah ketika \mathbf{r} dan \mathbf{F} tegak lurus pada sumbu tersebut. Sekarang kita akan

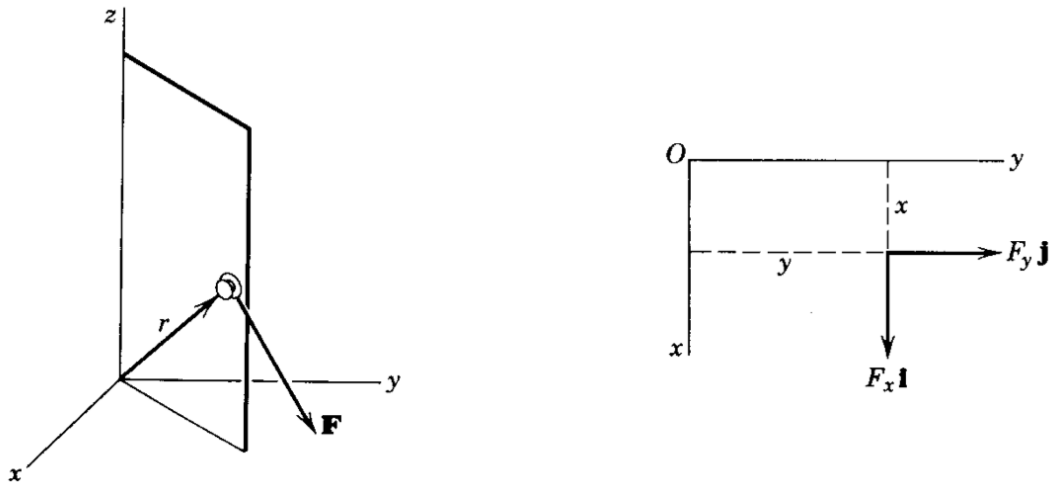


Gambar 6.5: Ilustrasi hasil kali rangkap tiga skalar.

meninjau kasus umum untuk menemukan torka dari gaya \mathbf{F} di sekitar garis sumbu L (gambar 6.5). Andaikan \mathbf{r} merupakan suatu titik pada L ke gaya aksi \mathbf{F} ; O adalah ekor \mathbf{r} . Kita dapat mendefinisikan torka pada titik O sebagai $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Perhatikanlah bahwa hasil ini tidak boleh kontradiktif dengan pembahasan torka sebelumnya karena torka berupa garis bukan titik. Bagaimanapun, kita harus menunjukkan bahwa dua notasi ini terubung. Perhatikanlah bahwa $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ jika kepala dari vektor \mathbf{r} berubah sepanjang \mathbf{F} .

Sekarang kita akan menunjukkan bahwa besarnya torka dari \mathbf{F} di sekitar L yang melewati titik O adalah $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$ dengan \mathbf{n} adalah vektor satuan sepanjang L . Untuk menyederhanakan perhitungan kita akan memilih \mathbf{n} searah sumbu z , sehingga $\mathbf{n} = \mathbf{k}$. Lalu pikirkan pintu yang dibuka diputar pada sumbu z seperti gambar 6.6. Andaikan gaya \mathbf{F} diterapkan pada kepala \mathbf{r} pada gagang pintu. Pertama-tama kita akan mencari torka dari \mathbf{F} di sekitar sumbu z dengan metode dan definisi dasar. Uraikan \mathbf{F} dalam komponen-komponennya. Komponen z sejajar dengan rotasi x sehingga tidak memiliki torka. Lalu, komponen x dan y akan lebih mudah jika digambarkan dalam bidang (x, y) (gambar 6.6 kanan). Torka pada sumbu z diproduksi dari F_x dan F_y yaitu $x F_y - y F_x$ berdasarkan metode dan definisi dasar. Kita akan menunjukkan bahwa hal ini sama dengan $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$ atau di sini $\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$. Berdasarkan persamaan (6.8) kita memperoleh

$$\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = x F_y - y F_x. \quad (6.10)$$



Gambar 6.6: Penguraian vektor saat pintu dibuka.

Simpulannya

dalam gambar 6.5 torka dari \mathbf{F} pada titik O adalah $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Torka dari \mathbf{F} pada garis L yang melewati titik O adalah $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$ dengan \mathbf{n} adalah vektor satuan sepanjang L .

Bukti ini dapat secara mudah diberikan tanpa referensi pada sistem koordinat. Andaikan lambang \parallel dan \perp menunjukkan arah sejajar dan tegak lurus pada sumbu \mathbf{n} yang diberikan. Lalu suatu vektor \mathbf{F} atau \mathbf{r} dapat ditulis sebagai penjumlahan vektor paralel ke sumbu dan tegak lurus ke sumbu, yaitu

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\perp} + \mathbf{r}_{\parallel}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}_{\perp} + \mathbf{F}_{\parallel}. \quad (6.11)$$

Lalu torka di sekitar titik O yang diperoleh dari \mathbf{F} adalah

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = (\mathbf{r}_{\perp} + \mathbf{r}_{\parallel}) \times (\mathbf{F}_{\perp} + \mathbf{F}_{\parallel}), \quad (6.12)$$

$$= \mathbf{r}_{\perp} \times \mathbf{F}_{\perp} + \mathbf{r}_{\perp} \times \mathbf{F}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\parallel} \times \mathbf{F}_{\perp} + \mathbf{r}_{\parallel} \times \mathbf{F}_{\parallel}. \quad (6.13)$$

Suku terakhir bernilai nol, juga untuk \mathbf{r}_{\parallel} dan \mathbf{F}_{\parallel} . Sehingga kita memiliki

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r}_{\perp} \times \mathbf{F}_{\perp}). \quad (6.14)$$

Contoh 6.2.1 Jika $\mathbf{F} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ beraksi pada titik $(1, 1, 1)$, carilah torka dari \mathbf{F} pada garis $\mathbf{r} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{k} + (2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k})t$.

Pertama-tama kita mencari torka pada suatu titik di garis tersebut, katakanlah titik tersebut $(3, 0, 2)$. Torka tersebut adalah

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}. \quad (6.15)$$

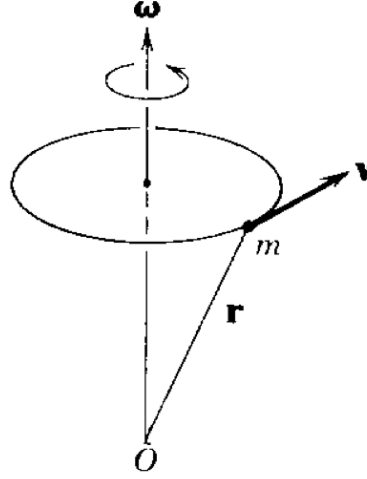
Torka pada garis adalah $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$ dengan \mathbf{n} vektor satuan sepanjang garis, yaitu $\mathbf{n} = \frac{1}{3}(2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k})$. Lalu, torka pada garis tersebut adalah

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = \frac{1}{3}(2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}) = 1. \quad (6.16)$$

■

Penerapan Hasil Kali rangkap tiga silang

Andaikan suatu partikel bermassa m diam pada permukaan benda tegar yang berotasi (misalnya pada permukaan bumi) yang diilustrasikan gambar 6.7. Momentum sudut m pada titik O menurut



Gambar 6.7: Ilustrasi hasil kali tiga kali vektor.

definisi adalah

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times (m\mathbf{v}) = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}. \quad (6.17)$$

dengan $\mathbf{v} = \vec{\omega} \times \mathbf{r}$ seperti ilustrasi gambar 6.4 sebelumnya. Sehingga

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \vec{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (6.18)$$

6.3 Turunan Vektor

Jika $\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$ dengan $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ vektor satuan dan A_x, A_y, A_z sebagai fungsi waktu, kita dapat mendefinisikan turunan $d\mathbf{A}/dt$ dengan persamaan

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{i} \frac{dA_x}{dt} + \mathbf{j} \frac{dA_y}{dt} + \mathbf{k} \frac{dA_z}{dt} \quad (6.19)$$

Turunan vektor \mathbf{A} tersebut berarti vektor yang komponen-komponenya adalah turunan dari komponen \mathbf{A} .

Contoh 6.3.1 Andaikan (x, y, z) merupakan koordinat suatu partikel yang bergerak pada waktu t , lalu x, y, z sebagai fungsi waktu. Vektor perpindahan partikel dari titik pusat pada waktu t adalah

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (6.20)$$

dengan \mathbf{r} merupakan vektor dari pusat koordinat ke partikel pada waktu t . Kita dapat mengatakan bahwa \mathbf{r} merupakan vektor posisi atau vektor koordinat partikel. Komponen kecepatan partikel pada waktu t adalah $dx/dt, dy/dt, dz/dt$, sehingga vektor kecepatan partikel adalah

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} \frac{dx}{dt} + \mathbf{j} \frac{dy}{dt} + \mathbf{k} \frac{dz}{dt}. \quad (6.21)$$

Lalu, percepatan partikel adalah

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{i} \frac{d^2x}{dt^2} + \mathbf{j} \frac{d^2y}{dt^2} + \mathbf{k} \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (6.22)$$

Hasil kali skalar dan vektor didefensialkan menurut aturan kalkulus dasar untuk hasil diferensial yaitu

$$\frac{d}{dt}(a\mathbf{A}) = \frac{da}{dt}\mathbf{A} + a\frac{d\mathbf{A}}{dt}, \quad (6.23)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B}, \quad (6.24)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B}. \quad (6.25)$$

Contoh 6.3.2 Ditinjau suatu gerak partikel dalam lingkaran dengan kelajuan konstan. Kita dapat menuliskan

$$r^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = \text{konstanta}, \quad (6.26)$$

$$v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \text{konstanta}. \quad (6.27)$$

Jika kedua persamaan ini dideferensialkan akan diperoleh

$$2\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0 \quad \text{atau} \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (6.28)$$

$$2\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0 \quad \text{atau} \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = 0. \quad (6.29)$$

Oleh karena diferensial $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 0$, diperoleh

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{atau} \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = -v^2. \quad (6.30)$$

Persamaan (6.28) mengatakan bahwa \mathbf{r} tegak lurus dengan \mathbf{v} , dan persamaan (6.29) mengatakan bahwa \mathbf{v} tegak lurus dengan \mathbf{a} . Berikutnya \mathbf{a} dan \mathbf{r} sejajar atau anti-sejajar dan sudut θ antara \mathbf{a} dan \mathbf{r} dapat bernilai 0° atau 180° . Berdasarkan persamaan (6.30) dan definisi hasil kali skalar, diperoleh

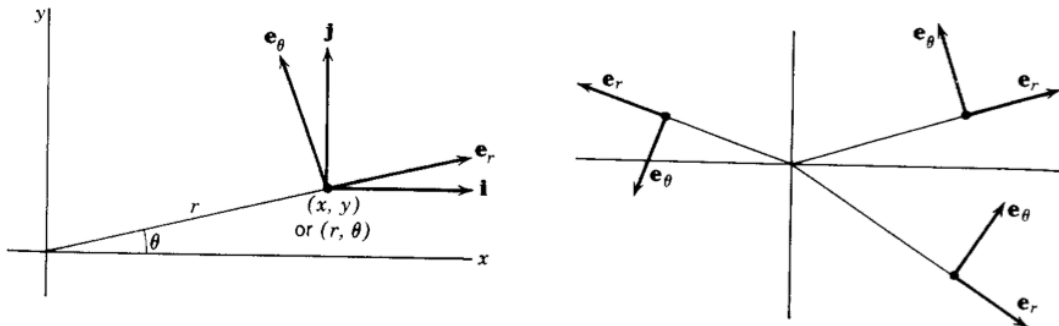
$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = r a \cos \theta = -v^2 \quad (6.31)$$

atau

$$r a (-1) = -v^2 \quad \text{atau} \quad a = \frac{v^2}{r}. \quad (6.32)$$

Kita telah memberikan bukti vektor bahwa gerak melingkar dengan kelajuan konstan memiliki percepatan ke arah pusat lingkaran dengan besar v^2/r .

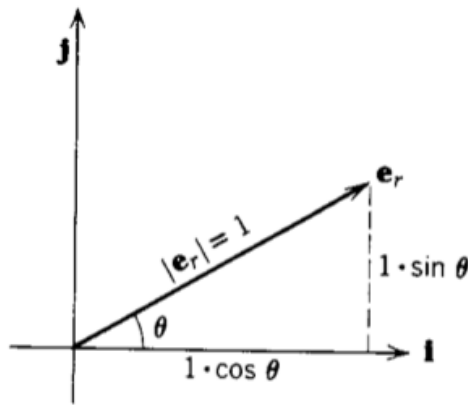
sejauh ini kita telah menulis vektor dalam koordinat kartesius dengan vektor satuan \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} . Terkadang kita akan lebih mudah menyatakan vektor dalam sistem koordinat lain. Contohnya koordinat polar untuk dua dimensi, dan koordinat silinder atau koordinat bola dalam tiga dimensi. Kita seharusnya dapat meninjau vektor dalam berbagai sistem koordinat, dan di sini kita akan meninjau penggunaan koordinat polar bidang. Dalam gambar 6.8 kita berpikir akan mengawali



Gambar 6.8: Ilustrasi perkalian vektor koordinat polar.

suatu titik (x, y) atau (r, θ) dan bergerak sepanjang $\theta = \text{konstanta}$ dengan r bertambah. Kita akan menyebut vektor satuan dalam arah r ini dengan \mathbf{e}_r . Mirip dengan hal ini kita akan menyebut vektor satuan arah θ dengan \mathbf{e}_θ . Dua vektor \mathbf{e}_r dan \mathbf{e}_θ ini merupakan vektor satuan basis dalam koordinat polar seperti \mathbf{i} dan \mathbf{j} dalam koordinat kartesius.

Kita dapat menuliskan vektor dalam suku-suku komponen \mathbf{e}_r dan \mathbf{e}_θ . Akan tetapi kita akan menemukan beberapa keruwetan di sini. Dalam koordinat kartesius, \mathbf{i} dan \mathbf{j} memiliki besar dan arah yang konstan, akan tetapi dalam koordinat polar vektor satuan memiliki arah yang berubah-ubah. Perhitungan turunan vektor yang ditulis dalam koordinat polar harus menyertakan turunan vektor satuan seperti komponen-komponennya. Kita dapat menyatakan \mathbf{e}_r dan \mathbf{e}_θ dalam suku-suku \mathbf{i} dan \mathbf{j} .



Gambar 6.9: Ilustrasi hasil kali tiga kali vektor.

Berdasarkan gambar 6.9 kita dapat merumuskan

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{i} \cos \theta + \mathbf{j} \sin \theta, \quad (6.33)$$

dan

$$\mathbf{e}_\theta = -\mathbf{i} \sin \theta + \mathbf{j} \cos \theta. \quad (6.34)$$

Pendefinisian \mathbf{e}_r dan \mathbf{e}_θ terhadap t adalah

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = -\mathbf{i} \sin \theta \frac{d\theta}{dt} + \mathbf{j} \cos \theta \frac{d\theta}{dt} = \mathbf{e}_\theta \frac{d\theta}{dt}, \quad (6.35)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = -\mathbf{i} \cos \theta \frac{d\theta}{dt} - \mathbf{j} \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = -\mathbf{e}_r \frac{d\theta}{dt}. \quad (6.36)$$

Contoh 6.3.3 Diberikan $\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_\theta \mathbf{e}_\theta$ dengan A_r dan A_θ merupakan fungsi waktu t , carilah $d\mathbf{A}/dt$!

Kita memperoleh

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{e}_r \frac{dA_r}{dt} + A_r \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} + \mathbf{e}_\theta \frac{dA_\theta}{dt} + A_\theta \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt}, \quad (6.37)$$

sehingga

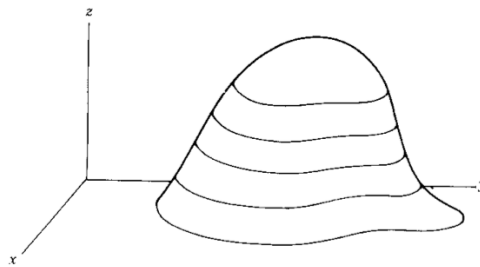
$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{e}_r \frac{dA_r}{dt} + \mathbf{e}_\theta A_r \frac{d\theta}{dt} + \mathbf{e}_\theta \frac{dA_\theta}{dt} - \mathbf{e}_r A_\theta \frac{d\theta}{dt}. \quad (6.38)$$

■

6.4 Turunan Berarah

Andaikan kita tahu bahwa suhu $T(x, y, z)$ pada setiap titik dalam ruangan atau pada sebatang besi. Berangkat dari satu titik yang diberikan, kita akan menanyakan perubahan suhu terhadap jarak yang kita gerakkan menjauh dari titik yang diberikan tersebut. Perubahannya adalah suhu akan bertambah menurut arah tertentu dan akan berkurang pada arah yang berlawanan. Rata-rata perubahan tersebut bergantung arah yang kita gerakkan. Konsekuensi ini disebut dengan *turunan berarah*. Secara simbolik kita akan mencari batas $\Delta T/\Delta s$ dengan ΔT adalah perubahan suhu dan Δs adalah elemen jarak yang diberikan, lalu turunan berarah dituliskan dT/ds . Kita juga akan menanyakan arah dengan dT/ds terbesar. Secara fisis hal ini kita kenal dengan aliran panas.

Sebelum kita mendiskusikan turunan berarah kita akan meninjau contoh lain terlebih dahulu. Andaikan kita berdiri pada suatu sisi bukit gambar 6.43 (bukit titik tertinggi), dan kita bertanya

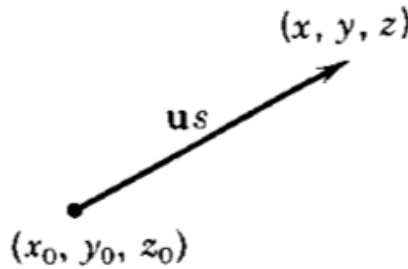


Gambar 6.10: Ilustrasi medan Ekuipotensial.

"Arah menurun mana dari kemiringan bukit ini yang paling cepat?" Arah ini maksudnya adalah arah jika kita kehilangan pijakan, yaitu arah yang paling mungkin kita sebut *lurus* ke bawah. Kita akan membuat gagasan samar-samar ini menjadi lebih jelas. Andaikan kita bergerak pajak jarak kecil Δs dan Δz merupakan arah ke atas (misalnya ke puncak bukit positif dan ke bawah negatif atau nol di bawah bukit). Lalu $\Delta z/\Delta s$ dan limitnya dz/ds bergantung pada arah ke mana kita bergerak, sehingga kita dapat menyebut dz/ds sebagai turunan berarah. Arah kemiringan

tercepat adalah arah dimana dz/ds memiliki nilai mutlak terbesar. Perhatikan, oleh karena tenaga potensial gravitasi benda bermassa m adalah $V = mgz$, memaksimalkan dz/ds sama saja dengan memaksimalkan dV/ds , dengan ekuipotensial pada bukit adalah $V(x, y) = mgz(x, y) = \text{konstanta}$.

Sekarang, mari kita menyatakan dan menjawab masalah umum dalam mencari turunan berarah. Andaikan diberikan medan skalar suatu fungsi $\phi(x, y, z)$. Kita ingin mencari $d\phi/ds$, rata-rata perubahan ϕ terhadap jarak, pada titik yang diberikan (x_0, y_0, z_0) dan arah yang diberikan. Andaikan $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ merupakan vektor satuan sepanjang arah yang diberikan. Dalam gambar 6.11 kita berangkat dari (x_0, y_0, z_0) bergerak sejauh $s (s \geq 0)$ searah \mathbf{u} menuju (x, y, z) . Lalu



Gambar 6.11: Arah turunan berarah dari (x_0, y_0, z_0) ke (x, y, z) dengan vektor satuan $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$.

$$(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) = \mathbf{u}s = (a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k})s \quad (6.39)$$

atau

$$\begin{cases} x = x_0 + as, \\ y = y_0 + bs, \\ z = z_0 + cs. \end{cases} \quad (6.40)$$

Persamaan (6.40) merupakan persamaan parametrik garis yang melewati (x_0, y_0, z_0) dalam arah \mathbf{u} dan jarak s sebagai parameter dan \mathbf{u} sebagai vektor sepanjang garis. Berdasarkan (6.40), kita melihat bahwa x, y, z masing-masing merupakan fungsi dengan variabel tunggal, katakanlah s . Jika kita mensubstitusikan x, y, z ke dalam $\phi(x, y, z)$, lalu ϕ menjadi fungsi variabel tunggal s . Oleh karena ϕ hanya bergantung pada s , kita dapat mencari $d\phi/ds$, yaitu

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{dz}{ds}, \quad (6.41)$$

$$= \frac{\partial\phi}{\partial x}a + \frac{\partial\phi}{\partial y}b + \frac{\partial\phi}{\partial z}c. \quad (6.42)$$

Ini merupakan hasil kali skalar \mathbf{u} dengan vektor $(\mathbf{i}\partial\phi/\partial x + \mathbf{j}\partial\phi/\partial y + \mathbf{k}\partial\phi/\partial z)$. Vektor ini disebut *gradien* dari ϕ yang ditulis sebagai *grad* ϕ atau $\nabla\phi$ (dibaca "del ϕ "). Menurut definisi

$$\nabla\phi = \mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z} \quad (6.43)$$

Lalu kita dapat menuliskan persamaan (6.42) sebagai

$$\frac{d\phi}{ds} = \nabla\phi \cdot \mathbf{u} \quad (\text{turunan berarah}). \quad (6.44)$$

Contoh 6.4.1 Carilah turunan berarah dari $\phi = x^y + xz$ pada $(1, 2, -1)$ dalam arah $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.
Di sini \mathbf{u} merupakan vektor satuan yang diperoleh dengan membagi \mathbf{A} dengan $|\mathbf{A}|$. Lalu, kita memiliki

$$\mathbf{u} = \frac{1}{3}(2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}). \quad (6.45)$$

Berikutnya, berdasarkan persamaan (6.43) kita memperoleh

$$\nabla\phi = \mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}, \quad (6.46)$$

$$= (2xy + z)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + x\mathbf{k}, \quad (6.47)$$

sehingga $\nabla\phi$ pada titik $(1, 2, -1)$ adalah

$$\nabla\phi = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}. \quad (6.48)$$

Lalu, turunan berarah terkait \mathbf{A} adalah

$$\frac{d\phi}{ds} = \nabla\phi \cdot \mathbf{u} = 2 - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \quad (6.49)$$

■

6.5 Beberapa Ungkapan Terkait ∇

Jika kita menuliskan $\nabla\phi$ dengan $[\mathbf{i}\partial/\partial x + \mathbf{j}\partial/\partial y + \mathbf{k}\partial/\partial z]\phi$, kita dapat menyebut yang berada dalam kurung adalah ∇ . ∇ tidak mempunyai arti jika berdiri sendiri, kita harus meletakkan suatu fungsi setelahnya agar memiliki arti.

Kita menyebut ∇ sebagai operator vektor, dan menuliskannya menurut

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}. \quad (6.50)$$

Sejauh ini kita telah meninjau $\nabla\phi$ dengan ϕ suatu skalar. Berikutnya kita akan meninjau saat ∇ beroperasi pada suatu vektor.

Andaikan $\mathbf{V}(x, y, z)$ suatu fungsi vektor, yang memiliki tiga komponen V_x , V_y , V_z yaitu

$$\mathbf{V}(x, y, z) = \mathbf{i}V_x(x, y, z) + \mathbf{j}V_y(x, y, z) + \mathbf{k}V_z(x, y, z) \quad (6.51)$$

Secara fisis \mathbf{V} mewakili medan vektor (contohnya medan listrik di sekitar muatan titik). Setiap titik dalam ruang terdapat suatu vektor \mathbf{V} , tetapi arah dan besarnya dapat bervariasi dari satu titik ke titik lain. Kita dapat memperoleh kombinasi yang bermanfaat dengan mengkombinasikan ∇ dengan \mathbf{V} yang didefinisikan dalam *divergensi* \mathbf{V} atau *div* \mathbf{V} atau $\nabla \cdot \mathbf{V}$ menurut

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \text{div } \mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (6.52)$$

Kita mendefinisikan *curl* \mathbf{V} , ditulis $\nabla \times \mathbf{V}$ menurut

$$\nabla \times \mathbf{V} = \text{curl } \mathbf{V} \quad (6.53)$$

$$= \mathbf{i} \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \quad (6.54)$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} \quad (6.55)$$

Definisi divergensi dan curl sebenarnya merupakan bentuk turunan parsial. Perhatikanlah bahwa hasil $\nabla \cdot \mathbf{V}$ berupa skalar dan $\nabla \times \mathbf{V}$ berupa vektor.

Besaran $\nabla \phi$ berupa vektor, lalu kita dapat mengandaikan $\mathbf{V} = \nabla \phi$, dan kita dapat mencari $\nabla \cdot \mathbf{V} = \nabla \cdot \nabla \phi = \text{div grad } \phi$ yang disebut *Laplacian* ϕ dan biasa ditulis $\nabla^2 \phi$ menurut

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot \nabla \phi \quad (6.56)$$

$$= \text{div grad } \phi \quad (6.57)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (6.58)$$

$$= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (6.59)$$

Laplacian merupakan bagian beberapa persamaan penting dalam fisika matematika, yaitu

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \text{merupakan persamaan Laplace.} \quad (6.60)$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad \text{merupakan persamaan Gelombang.} \quad (6.61)$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{a} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \text{merupakan persamaan aliran panas.} \quad (6.62)$$

Persamaan-persamaan ini muncul dalam berbagai masalah fisika seperti panas, termodinamika, listrik magnet, aerodinamik, elastisitas, optik, dan lain-lain.

Ada banyak ungkapan kompleks lain yang mengandung ∇ yang dapat berupa fungsi skalar atau vektor yang muncul dalam berbagai aplikasi analisis vektor. Kita akan meninjau beberapa ungkapan ini. Perhatikanlah dua jenis ungkapan di bawah ini:

1. Ungkapan yang mengandung dua kali ∇ semacam $\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi$
2. Kombinasi ∇ dengan dua buah fungsi vektor atau skalar semacam $\nabla \times (\phi \mathbf{V})$.

Kita dapat memverifikasi bahwa nilai yang diberikan dari dua ungkapan di atas dapat disederhanakan dengan menuliskan keluas komponen-komponennya.

Mari kita mengilustrasikan ungkapan $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V})$. Kita dapat menggunakan analogi persamaan (6.9) untuk memperoleh hasil operasi ini, yaitu

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{V} \quad (6.63)$$

$$= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \nabla^2 \mathbf{V} \quad (6.64)$$

Ini adalah vektor sebagaimana seharusnya.

Contoh kedua kita akan mencari $\nabla \cdot (\phi \mathbf{V})$ dengan ϕ suatu fungsi skalar dan \mathbf{V} fungsi vektor. Di sini kita harus mendiferensialkan perkalian, sehingga hasilnya mengandung dua suku. Kita dapat menulis ini sebagai

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{V}) = \nabla \phi \cdot (\phi \mathbf{V}) + \nabla V_{\mathbf{V}} \cdot (\phi \mathbf{V}), \quad (6.65)$$

dengan subskrips pada ∇ mencirikan fungsi yang didiferensialkan. Oleh karena ϕ adalah skalar, kita dapat memindahkan dot pada suku pertama ruas kanan sebagai

$$\nabla \phi \cdot (\phi \mathbf{V}) = (\nabla \phi \phi) \cdot \mathbf{V} = \mathbf{V} \cdot (\nabla \phi), \quad (6.66)$$

sehingga kita telah menghilangkan subskrips pada langkah tersebut. Berikutnya, ϕ suku kedua ruas kanan tidak didiferensialkan, sehingga kita dapat menuliskan suku ini sebagai $\phi(\nabla \cdot \mathbf{V})$. Apabila hasil ini dikumpulkan, kita dapat memperoleh

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{V}) = \mathbf{V} \cdot (\nabla \phi) + \phi(\nabla \cdot \mathbf{V}). \quad (6.67)$$

6.6 Integral Garis

Pada subbab 2 kita telah mendiskusikan kerja yang dilakukan oleh gaya \mathbf{F} pada suatu objek yang bergerak dengan perindahan $d\mathbf{r}$ yang ditulis menurut

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (6.68)$$

Andaikan suatu benda bergerak pada suatu lintasan (katakanlah dari A ke B gambar 6.12), dengan gaya \mathbf{F} yang beraksi pada benda tersebut dan bervariasi sesuai dengan lintasannya. Dalam tiga dimensi kita membutuhkan dua persamaan untuk menentukan suatu kurva (sebagai perpotongan dua bidang). Contohnya kita akan mengambil kurva yang hanya bergantung satu variabel saja. Lalu kita dapat menuliskan \mathbf{F} dan $\mathbf{r} = i dx + j dy + k dz$ sebagai fungsi variabel tunggal. Integral $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ sepanjang kurva yang diberikan menjadi integral dasar suatu fungsi satu variabel dan kita dapat mengevaluasinya sebagai kerja yang dilakukan oleh gaya \mathbf{F} dalam gerak objek. Integral

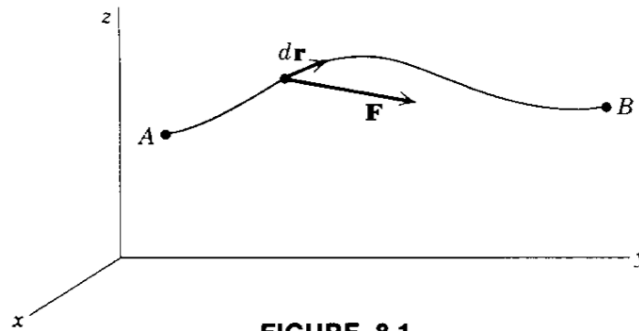


FIGURE 8.1

Gambar 6.12: Gaya berubah.

semacam ini biasa disebut sebagai *integral garis*. Integral garis berarti integral sepanjang kurva atau garis yaitu integral tunggal yang berbeda dengan integral lipat suatu luasan atau volume. Titik esensial yang harus dipahami tentang integral garis adalah terdapatnya satu variabel bebas, karena itu yang dibutuhkan suatu kurva. Dalam dua dimensi kita dapat menulis persamaan kurva dengan $y = f(x)$ dengan x sebagai variabel bebas, dalam tiga dimensi persamaan garis ditulis sebagai persamaan simetrik atau parametrik yang sudah dibahas dalam bab 3. Contohnya jika x adalah variabel bebas, maka kita harus mencari y dan z sebagai fungsi x .

Contoh 6.6.1 Diberikan suatu gaya $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} - y^2\mathbf{j}$, carilah kerja yang dilakukan \mathbf{F} sepanjang lintasan yang ditunjukkan gambar 6.13 dari $(0,0)$ sampai $(2,1)$.

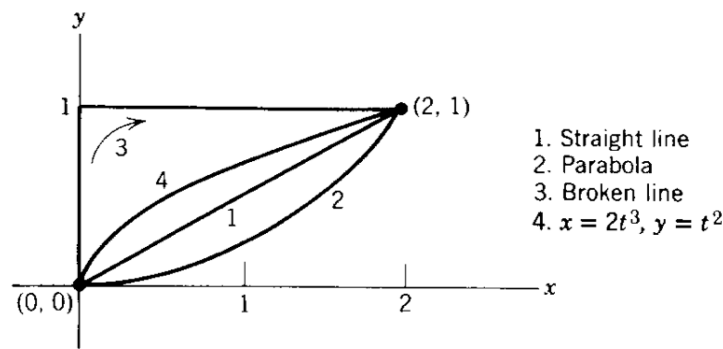
Oleh karena $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ pada bidang, kita memiliki

$$d\mathbf{r} = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy, \quad (6.69)$$

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = xy dx - y^2 dy. \quad (6.70)$$

Berikutnya kita akan mencari

$$W = \int (xy dx - y^2 dy). \quad (6.71)$$



Gambar 6.13: Gaya dengan lintasan berbeda.

Pertama-tama, kita harus menulis *integral* dalam satu variabel. Sepanjang lintasan 1 (garis lurus), $y = \frac{1}{2}x$, $dy = \frac{1}{2}dx$. Substitusi dua variabel ini ke persamaan (6.115), kita akan memperoleh integral pada suatu variabel x . batas pengintegralan x dari 0 sampai 2, sehingga kita mendapatkan

$$W_1 = \int_0^2 \left[x \frac{1}{2} dx - \left(\frac{1}{2}x \right)^2 \frac{1}{2} dx \right], \quad (6.72)$$

$$= \int_0^2 \frac{3}{8} x^2 dx, \quad (6.73)$$

$$= \frac{x^3}{8} \Big|_0^2 = 1. \quad (6.74)$$

Kita juga dapat merubah variabel ke y , yaitu $x = 2y$, $dx = 2 dy$ dan batas pengintegralan dari 0 sampai 1, sehingga kita mendapatkan hasil integral yang sama.

Sepanjang lintasan 2 (parabola), $y = \frac{1}{4}x^2$, $dy = \frac{1}{2}x dx$. Lalu, kita mendapatkan

$$W_2 = \int_0^2 \left(x \frac{1}{4} x^2 dx - \frac{1}{16} x^4 \frac{1}{2} x dx \right). \quad (6.75)$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{1}{4} x^3 - \frac{1}{32} x^5 \right) dx. \quad (6.76)$$

$$= \frac{x^4}{16} - \frac{x^6}{192} \Big|_0^2. \quad (6.77)$$

$$= \frac{2}{3} \quad (6.78)$$

Sepanjang litasan 3, kita menggunakan metode yang berbeda, pertama kita mengintegrasikan dari $(0, 0)$ ke $(0, 1)$, lalu dari $(0, 1)$ ke $(2, 1)$ dan menjumlahkan hasilnya. Sepanjang $(0, 0)$ ke $(0, 1)$, $x = 0$, $dx = 0$, sehingga kita harus menggunakan variabel y . Lalu, kita memperoleh

$$W_{31} = \int_{y=0}^1 (0 \cdot y \cdot 0 - y^2 \, dy) \quad (6.79)$$

$$= -\frac{y^3}{3} \Big|_0^1 \quad (6.80)$$

$$= -\frac{1}{3} \quad (6.81)$$

Sepanjang $(0, 1)$ ke $(2, 1)$, $y = 1$, $dy = 0$, sehingga kita harus menggunakan x . Lalu kita memperoleh

$$W_{32} = \int_{x=0}^2 (x \cdot 1 \, dx - 1 \cdot 0), \quad (6.82)$$

$$= \frac{x^2}{2} \Big|_0^2, \quad (6.83)$$

$$= 2. \quad (6.84)$$

Lalu, kerja total adalah

$$W_3 = W_{31} + W_{32}, \quad (6.85)$$

$$= -\frac{1}{3} + 2 = \frac{5}{3}. \quad (6.86)$$

Lintasan 4 menunjukkan teknik lain. Selain menggunakan x atau y sebagai variabel integral, kita dapat menggunakan t sebagai parameter. Bagi $x = 2t^3$, $y = t^2$, kita memiliki $dx = 6t^2$ dan $dy = 2t$. Pada titik pusat koordinat $t = 0$ dan pada $(2, 1)$, $t = 1$. Substitusi variabel ini kita memiliki

$$W_4 = \int_0^1 (2t^3 \cdot t^2 \cdot 6t^2 \, dt - t^2 \cdot 2t \, dt), \quad (6.87)$$

$$= \int_0^1 (12t^7 - 2t^5) \, dt, \quad (6.88)$$

$$= \frac{12}{8} - \frac{2}{6} = \frac{7}{6}. \quad (6.89)$$

■

Contoh 6.6.2 Carilah nilai

$$I = \int \frac{x \, dy - y \, dx}{x^2 + y^2} \quad (6.90)$$

sepanjang dua lintasan pada gambar 6.14 dari $(-1, 0)$ ke $(1, 0)$. Perhatikanlah bahwa kita dapat memberikan integral dalam bentuk $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ dengan $\mathbf{F} = (-\mathbf{i}y + \mathbf{j}x)/(x^2 + y^2)$, bagaimanapun banyak masalah yang muncul yang dapat kita bawa ke bentuk integral garis.

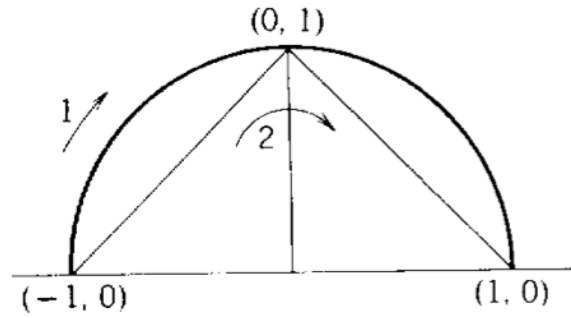
Sepanjang lintasan pertama (setengah lingkaran) akan lebih mudah jika diselesaikan dalam koordinat polar, dengan $r = 1$ pada semua titik, sehingga hanya menyisakan variabel θ . Kita dapat memberikan transformasinya menurut

$$x = \cos \theta \quad dx = -\sin \theta \, d\theta, \quad (6.91)$$

$$y = \sin \theta \quad dy = \cos \theta \, d\theta \quad x^2 + y^2 = 1, \quad (6.92)$$

sehingga

$$\frac{x \, dy - y \, dx}{x^2 + y^2} = \frac{\cos^2 \theta \, d\theta - \sin \theta (-\sin \theta) \, d\theta}{1} = d\theta. \quad (6.93)$$



Gambar 6.14: Gaya dengan lintasan setengah lingkaran dan segitiga.

Pada $(-1, 0)$, $\theta = \pi$, pada $(1, 0)$, $\theta = 0$. Lalu kita mendapatkan

$$I_1 = \int_{\pi}^0 d\theta = -\pi \quad (6.94)$$

Sepanjang lintasan 2 (segitiga) kita mengintegrasikan dari $(-1, 0)$ ke $(0, 1)$ dan dari $(0, 1)$ ke $(1, 0)$, dan menjumlahkan hasilnya. Garis lurus pertama memiliki persamaan $y = x + 1$, lalu $dy = dx$ dan integralnya adalah

$$\int_{-1}^0 \frac{x \, dx - (x+1)dx}{x^2 + (x+1)^2} = \int_{-1}^0 \frac{-dx}{2x^2 + 2x + 1}, \quad (6.95)$$

$$= \int_{-1}^0 \frac{-2 \, dx}{(2x+1)^2 + 1}, \quad (6.96)$$

$$= -\arctan(2x+1) \Big|_{-1}^0, \quad (6.97)$$

$$= -\arctan 1 + \arctan(-1), \quad (6.98)$$

$$= -\frac{\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}. \quad (6.99)$$

Sepanjang garis lurus kedua $y = 1 - x$, $dy = -dx$, dan integralnya adalah

$$-\int_0^1 \frac{x \, dx + (1-x)dx}{x^2 + (1-x)^2} = \int_0^1 \frac{-2 \, dx}{(2x-1)^2 + 1} \quad (6.100)$$

$$= -\arctan(2x-1) \Big|_0^1 \quad (6.101)$$

$$= -\frac{\pi}{2}. \quad (6.102)$$

Penjumlahan hasil integral ini sepanjang lintasan kedua adalah

$$I_2 = -\frac{\pi}{2} + \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\pi. \quad (6.103)$$

■

Medan Lestari

Perhatikanlah, bahwa pada contoh 6.6, hasil yang diperoleh berbeda-beda untuk integral dengan lintasan yang berbeda-beda, tetapi pada contoh 6.7, hasil yang diperoleh sama untuk dua lintasan yang berbeda. Kita dapat memberikan arti fisis pada dua fakta dua kejadian ini. Medan gaya untuk $W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ yang bergantung lintasan sampai titik akhir disebut *non-lestari*, secara fisis, ini dapat diakibatkan oleh disipasi, katakanlah gesekan. Sedangkan medan gaya yang tidak bergantung lintasan, hanya bergantung pada posisi awal dan posisi akhir disebut *medan lestari*.

Andaikan diberikan \mathbf{F} yang merupakan suatu fungsi dari $W(x, y, z)$ semacam

$$\mathbf{F} = \nabla W = \mathbf{i} \frac{\partial W}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial W}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial W}{\partial z}, \quad (6.104)$$

dengan

$$F_x = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial W}{\partial z}. \quad (6.105)$$

Lalu, dengan fakta bahwa $\partial^2 W / \partial x \partial y = \partial^2 W / \partial y \partial x$, kita memperoleh

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad (6.106)$$

dan mirip dengan hal tersebut

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}. \quad (6.107)$$

Berdasarkan penggunaan aturan *curl* \mathbf{F} , kita dapat melihat bahwa persamaan di atas mengatakan komponen *curl* \mathbf{F} sama dengan nol. Jika *curl* $\mathbf{F} = 0$ kita dapat mencari $W(x, y, z)$ yang semacam $\mathbf{F} = \nabla W$. Sekarang, jika $\mathbf{F} = \nabla W$, kita dapat menulis

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \nabla W \cdot d\mathbf{r} \quad (6.108)$$

$$= \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz \quad (6.109)$$

$$= dW, \quad (6.110)$$

sehingga

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B dW, \quad (6.111)$$

$$= W(B) - W(A). \quad (6.112)$$

Potensial

Dalam mekanika, jika $\mathbf{F} = \nabla W$ (yaitu \mathbf{F} lestari), lalu W merupakan kerja yang dilakukan oleh \mathbf{F} .

Contoh 6.6.3 Tunjukkan bahwa

$$\mathbf{F} = (2xy - z^3)\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - (3xz^2 + 1)\mathbf{k} \quad (6.113)$$

adalah lestari dan carilah potensial skalar ϕ semacam $\mathbf{F} = -\nabla \phi$. ■

Contoh 6.6.4 Carilah potensial skalar untuk medan listrik muatan q pada pusat koordinat.

Coba kita ingat kembali bahwa medan listrik pada suatu titik $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ berarti gaya setiap satuan muatan pada jarak \mathbf{r} berdasarkan pada q dan nilainya adalah

$$\mathbf{E} = \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r = \frac{q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{q}{r^3} \mathbf{r}. \quad (6.114)$$

Ungkapan ini merupakan Hukum Coulomb untuk muatan listrik. Jika kita mengambil tenaga potensial bernilai nol pada daerah tak hingga, lalu potensial skalar ϕ merupakan negatif kerja yang dilakukan oleh medan pada satuan muatan yang bergerak dari tak hingga ke \mathbf{r} . Nilai ini adalah

$$\phi = - \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = q \int_{\mathbf{r}}^{\infty} \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}}{r^3}. \quad (6.115)$$

Ini merupakan cara paling sederhana untuk mengevaluasi integral garis, yaitu menggunakan koordinat bola dengan variabel r sepanjang garis radial. Hal ini dibuktikan dengan menunjukkan $\text{curl } \mathbf{E} = 0$, yaitu \mathbf{E} lestari. Oleh karena diferensial $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})$ dapat ditulis $d(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = 2\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$, kita memiliki $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = r dr$, dan persamaan (6.115) memberikan

$$\phi = q \int_{\mathbf{r}}^{\infty} \frac{r dr}{r^3} = q \int_{\mathbf{r}}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = -\frac{q}{r} \Big|_{\mathbf{r}}^{\infty} = \frac{q}{r}. \quad (6.116)$$

■

Diferensial Eksak

Diferensial dW dalam persamaan (6.112) suatu fungsi $W(x, y, z)$ disebut dengan *diferensial eksak*

Contoh 6.6.5 Tinjaulah fungsi

$$W = \frac{1}{2}y - xz^2 - z. \quad (6.117)$$

Kita memiliki

$$dW = (2xy - z^2)dx + x^2dy - (3xz^2 + 1)dz. \quad (6.118)$$

Di sini, dW merupakan diferensial eksak menurut definisi karena kita memperolehnya dengan mendiferensialkan fungsi W . Kita dapat membuktikan secara mudah hal ini jika kita menuliskan $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, lalu persamaan (6.106) benar, sehingga kita dapat menuliskan

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2) = 2x = \frac{\partial}{\partial y}(2xy - z^3), \quad (6.119)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(-3xz^2 - 1) = -3z^2 = \frac{\partial}{\partial z}(2xy - z^3), \quad (6.120)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(-3xz^2 - 1) = 0 = \frac{\partial}{\partial z}(x^2). \quad (6.121)$$

■

6.7 Divergensi dan Teorema Green

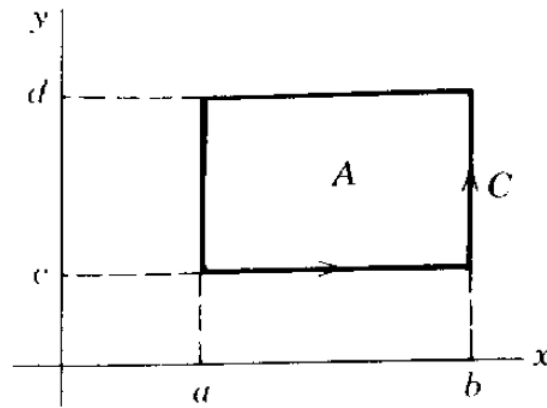
6.7.1 Teorema Green dalam Bidang

Teori fundamental kalkulus mengatakan bahwa integral dari turunan fungsi merupakan fungsi tersebut, atau secara lebih tepat

$$\int_a^b \frac{d}{dx} f(x) dx = f(b) - f(a). \quad (6.122)$$

Kita akan meninjau beberapa penggunaan umum teorema ini dalam dua dan tiga dimensi.

Andaikan $P(x, y)$ dan $Q(x, y)$ merupakan kontinyu turunan parsial pertama. Kita akan meninjau integral dua kali dari $(\partial/\partial x)Q(x, y)$ melewati suatu persegi A gambar 6.15 dan kita akan menunjukkan bahwa integral dua kali ini sama dengan integral garis mengelilingi batas persegi. Pertama



Gambar 6.15: Luasan A yang dibatasi oleh suatu persegi.

kita menulis integral dua kali sebagai integral perulangan dan melakukan integral ke x menggunakan persamaan (6.122) untuk mendapatkan

$$\iint_A \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dx dy, = \int_c^d \int_a^b \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dx dy, \quad (6.123)$$

$$= \int_c^d [Q(b,y) - Q(a,y)] dy. \quad (6.124)$$

Berikutnya, kita akan mengevaluasi $\oint Q(x,y) dy$ mengelilingi C berlawanan arah jarum jam. Lambang \oint berarti kita mengintegralkan fungsi mengelilingi kurva tertutup sampai kembali ke titik awal. Sepanjang sisi mendatar A , $dy = 0$ sehingga integralnya sama dengan nol. Sepanjang sisi kanan $x = b$, dan y bergerak dari c ke d . Sepanjang sisi kiri $x = a$, y bergerak dari d ke c . Hasil itu adalah

$$\oint_C Q(x,y) dy = \int_c^d Q(b,y) dy + \int_d^c Q(a,y) dy, \quad (6.125)$$

$$= \int_c^d [Q(b,y) - Q(a,y)] dy. \quad (6.126)$$

Lalu, dengan persamaan (6.124) dan (6.126) kita memiliki

$$\iint_A \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_C Q dy. \quad (6.127)$$

Mirip dengan hal tersebut di atas, kita memperoleh

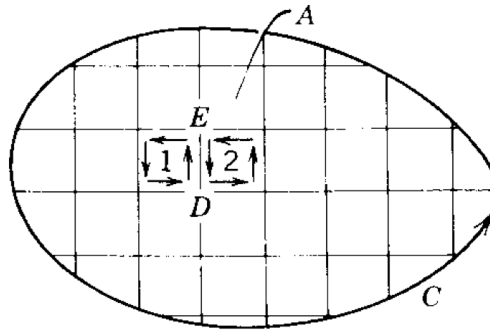
$$- \iint_A \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \oint_C P dx. \quad (6.128)$$

Kombinasi dua persamaan di atas menghasilkan

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (6.129)$$

Kita telah membuktikan persamaan (6.129) untuk persegi A . Berikutnya, mari kita meninjau luasan A dalam bidang (x,y) yang dibatasi oleh suatu kurva tertutup. Kita menganggap A terdiri batas dari persegi-persegi kecil. Jumlah semua integral dua kali (6.129) ke seluruh persegi kecil dalam 6.16 merupakan integral dua kali melewati seluruh luasan A . Integral garis melewati batas dalam saling meniadakan. Oleh karena itu persamaan (6.129) valid untuk luasan A gambar 6.16.

Lalu, kita memiliki

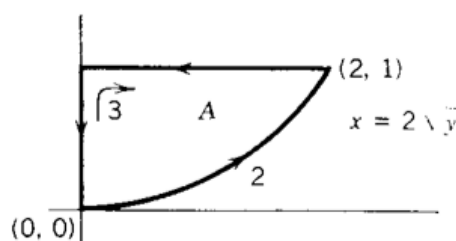


Gambar 6.16: Luasan A yang dibatasi kurva tertutup.

Teorema Green dalam bidang

$$\iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial A} P dx + Q dy \quad (6.130)$$

Integral garis memiliki arah yang berlawanan dengan arah jarum jam, $P = P(x, y)$ dan $Q = Q(x, y)$ memiliki turunan parsial pertama yang kontinu pada setiap titik dari A.



Gambar 6.17: Kurva tertutup.

Contoh 6.7.1 Andaikan integral garis persamaan (6.71) diterapkan pada gambar 6.129. Tentu, hal ini sama saja dengan melakukan integral garis persamaan (6.71) pada lintasan 2 dan lintasan 3 gambar 6.13 yang menghasilkan $W_2 - W_3 = \frac{2}{3} - \frac{5}{3} = -1$. Carilah integral garis kurva tertutup yang ditunjukkan gambar 6.17 menggunakan teorema green.

Mari kita mengevaluasi ini menggunakan Teorema Green. Berdasarkan persamaan (6.130) dan

(6.71), kita memiliki

$$W = \oint_{\partial A} xy \, dy - y^2 \, dx \quad (6.131)$$

$$= \iint_A \left[\frac{\partial}{\partial x}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(xy) \right] dx \, dy \quad (6.132)$$

$$= \iint_A -x \, dx \, dy \quad (6.133)$$

$$= - \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^{2\sqrt{y}} x \, dx \, dy \quad (6.134)$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} (2\sqrt{y})^2 dy \quad (6.135)$$

$$= \int_0^1 2y \, dy = 1, \quad (6.136)$$

uang sama dengan hasil evaluasi sebelumnya. ■

Contoh 6.7.2 Pada subbab sebelumnya kita telah mendiskusikan gaya lestari sehingga kerja yang dilakukan bebas lintasan. Menurut teorema Green, kerja yang dilakukan oleh gaya \mathbf{F} mengelilingi kura tertutup pada bidang (x, y) adalah

$$W = \oint_{\partial A} (F_x dx + F_y dy) = \iint_A \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) dx \, dy. \quad (6.137)$$

Jika $(\partial F_y / \partial x) - (\partial F_x / \partial y) = 0$, W mengelilingi kurva tertutup akan sama dengan nol, yang berarti kerja dari satu titik ke titik lain tidak bergantung lintasan.

Ada dua cara yang bermanfaat untuk menerapkan (6.130) ke integrasi fungsi vektor. Pertama, andaikan

$$Q = V_x, \quad P = -V_y \quad (6.138)$$

dengan $\mathbf{V} = \mathbf{i}V_x + \mathbf{j}V_y$. Lalu

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = \nabla \cdot \mathbf{V} = \text{div } \mathbf{V} \quad (6.139)$$

menurut persamaan (6.52) dengan $V_z = 0$. Sepanjang kurva yang membatasi luasan A gambar 6.18 vektor

$$d\mathbf{r} = \mathbf{i} \, dx + \mathbf{j} \, dy \quad (6.140)$$

merupakan vektor singgung dan vektor

$$\mathbf{n} \, ds = \mathbf{i} \, dy - \mathbf{j} \, dx \quad (6.141)$$

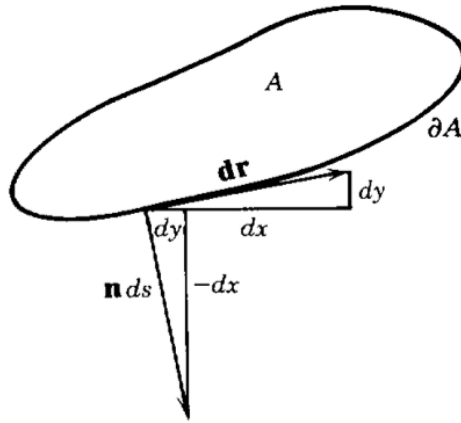
dengan \mathbf{n} merupakan vektor satuan dan $ds = \sqrt{x^2 + y^2}$,

merupakan vektor normal yang tegak lurus dengan vektor singgung. Apabila persamaan (6.141) dan (6.138) dikombinasi, kita dapat menuliskan

$$P \, dx + Q \, dy = -V_y \, dx + V_x \, dy \quad (6.142)$$

$$= (\mathbf{i} V_x + \mathbf{j} V_y) \cdot (\mathbf{i} \, dy - \mathbf{j} \, dx) \quad (6.143)$$

$$= \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, ds. \quad (6.144)$$



Gambar 6.18: Kurva tertutup yang membatasi luasan A.

Lalu, substitusi persamaan (6.138), (6.144) ke (6.130) menghasilkan

$$\iint_A \operatorname{div} \mathbf{V} \, dx \, dy = \int_{\partial A} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, ds. \quad (6.145)$$

Ini merupakan *teorema divergensi* dalam dua dimensi.

Lalu dalam tiga dimensi, teorema Green mengatakan (akan dibahas lagi pada subbab berikutnya)

$$\iiint_{\tau} \operatorname{div} \mathbf{V} \, d\tau = \iint_{\partial \tau} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, d\tau \quad \text{Teorema Divergensi.} \quad (6.146)$$

Mari kita meninjau penerapan lain persamaan (6.130) untuk fungsi vektor. Andaikan

$$Q = V_y, \quad P = V_x, \quad (6.147)$$

dengan $\mathbf{V} = \mathbf{i}V_x + \mathbf{j}V_y$. Lalu

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} = (\operatorname{curl} \mathbf{V}) \cdot \mathbf{k} \quad (6.148)$$

seperti persamaan (6.55) dengan $V_z = 0$. Substitusi persamaan (6.140) ke (6.147) menghasilkan

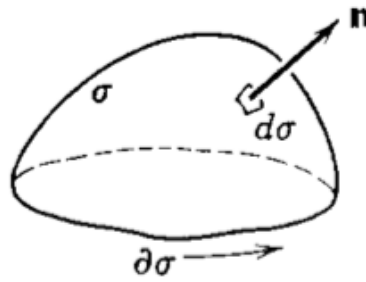
$$P \, dx + Q \, dy = (\mathbf{i}V_x + \mathbf{j}V_y) \cdot (\mathbf{i} \, dx + \mathbf{j} \, dy) = \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}. \quad (6.149)$$

Substitusi persamaan (6.148) dan (6.149) ke (6.130) menghasilkan

$$\iint_A (\operatorname{curl} \mathbf{V}) \cdot \mathbf{k} \, dx \, dy = \oint_{\partial A} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}. \quad (6.150)$$

Ini merupakan *Teorema Stokes* dalam dua dimensi. Ini dapat diperluas ke dalam tiga dimensi. Andaikan σ suatu permukaan terbuka, $\partial \sigma$ berarti kurva yang membatasi permukaan gambar 6.19. Andaikan \mathbf{n} merupakan vektor satuan normal ke permukaan. Lalu, teorema Stokes dalam tiga dimensi (akan dibahas pada bab berikutnya)

$$\iint_{\sigma} (\operatorname{curl} \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_{\partial \sigma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{Teorema Stokes.} \quad (6.151)$$



Gambar 6.19: Permukaan σ yang melingkupi suatu volume.

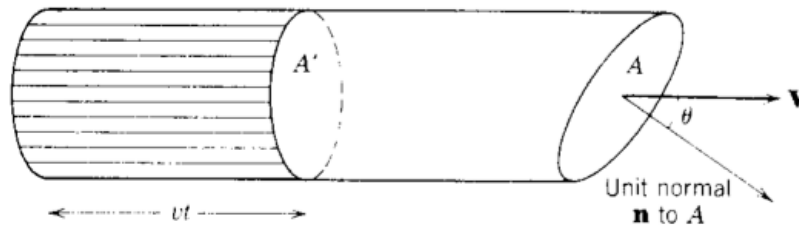
6.7.2 Teorema Divergensi

Kita telah mendefinisikan divergensi suatu fungsi $\mathbf{V}(x, y, z)$ sebagai

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \text{div } \mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}. \quad (6.152)$$

Berikutnya kita akan menginvestigasi dan penggunaan divergensi dalam terapan fisika.

Mari kita tinjau daerah dalam air yang mengalir. Kita dapat membayangkan dengan gambar vektor \mathbf{v} pada setiap titik sama dengan kecepatan air yang mengalir pada titik tersebut. Vektor fungsi \mathbf{v} mewakili medan vektor. Kurva singgung pada \mathbf{v} disebut *garis alir*. Kita dapat meninjau hal yang sama untuk aliran gas, panas, kelistrikan atau partikel dari sumber radioaktif. Kita akan menunjukkan jika \mathbf{v} mewakili kecepatan aliran material tersebut di atas, lalu $\text{div } \mathbf{v}$ terkait dengan jumlah substansi yang mengalir. Besaran yang sebanding dengan kuantitas yang mengalir dari substansi material disebut *fluks*.



Gambar 6.20: Aliran fluida pada suatu silinder.

Contohnya aliran air, andaikan $\mathbf{V} = \mathbf{v}\rho$, dengan ρ adalah kerapatan air. Jumlah air yang melintas pada waktu t pada luasan A' yang tegak lurus dengan arah aliran adalah jumlah air pada penampang lintang A' dan vt dalam silinder (gambar 6.20). Jumlah air ini adalah

$$(vt)(A')(\rho). \quad (6.153)$$

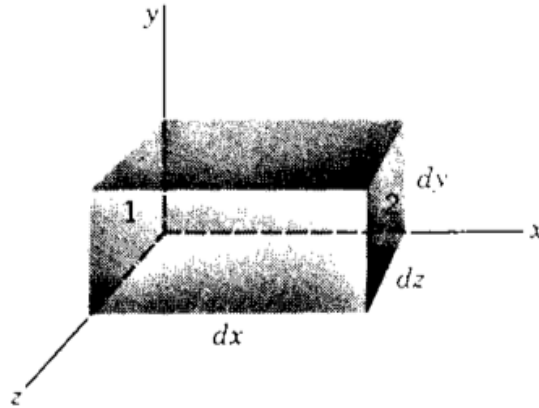
Jumlah air yang sama akan melintasi luasan A yang normal dengan sudut inklinasi θ pada \mathbf{v} . Oleh karena $A' = A \cos \theta$, maka

$$vt A' \rho = vt A \cos \theta. \quad (6.154)$$

Lalu jika air yang mengalir dalam arah \mathbf{v} membuat sudut θ dengan normal \mathbf{n} pada permukaan, jumlah air yang melintas persatuan luasan permukaan dalam satuan waktu adalah

$$v\rho \cos \theta = V \cos \theta = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}, \quad (6.155)$$

jika \mathbf{n} vektor satuan.



Gambar 6.21: Elemen volume.

Sekarang kita akan meninjau elemen volume $dx \, dy \, dz$ dalam daerah yang dilalui aliran air (gambar 6.21). Air mengalir baik yang masuk maupun keluar melalui enam permukaan elemen volume tersebut. Kita seharusnya menghitung aliran keluar berikutnya. Rata-rata pada aliran yang masuk ke $dx \, dy \, dz$ pada permukaan 1 adalah $\mathbf{V} \cdot \mathbf{i}$ persatuan luas atau $\mathbf{V} \cdot \mathbf{i} \, dy \, dz$ melewati $dy \, dz$ permukaan 1. Oleh karena $\mathbf{V} \cdot \mathbf{i} = V_x$, kita menemukan bahwa aliran air yang melintasi permukaan 1 adalah $V_x \, dy \, dz$. Ungkapan yang mirip dengan ini dapat kita berikan untuk aliran air yang keluar pada permukaan 2, nilainya sama hanya permukaannya berbeda. Kita akan mendiferensialkan dua V_x pada permukaan 1 dan permukaan 2, secara langsung memiliki tanda yang berlawanan pada y dan z yang sama. Untuk y dan z yang konstan, $dV_x = (\partial V_x / \partial x) dx$. Lalu arus bersih yang melewati dua permukaan ini adalah arus yang keluar permukaan 2 dikurangi arus yang masuk ke permukaan 1, katakanlah

$$[(V_x \text{ permukaan 2}) - (V_x \text{ permukaan 1})] \, dy \, dz = \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} dx \right) dy \, dz. \quad (6.156)$$

Kita juga mendapatkan ungkapan untuk aliran bersih dua pasangan permukaan lain, yaitu

$$\frac{\partial V_y}{\partial y} dx \, dy \, dz \quad \text{melewati atas dan bawah} \quad (6.157)$$

dan

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} dx \, dy \, dz \quad \text{melewati dua sisi lainnya.} \quad (6.158)$$

Lalu aliran net total air yang hilang dari $dx \, dy \, dz$ adalah

$$\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz = \nabla \cdot \mathbf{V}. \quad (6.159)$$

Jika kita membagi persamaan ini dengan $dx \, dy \, dz$, kita memiliki rata-rata hilangnya air persatuan volume. Hal ini secara fisis berarti divergensi. Kerapatan adalah massa persatuan volume, tapi jika kita mengevaluasinya dari titik ke titik, kita akan mendapatkan hasil yang berbeda-beda. Mirip dengan hal tersebut, divergensi yang dievaluasi pertitik, dapat menghasilkan nilai yang berbeda-beda.

Andaikan

ψ = kerapatan sumber minus kerapatan yang terbenam
 = massa bersih fluida yang terbentuk persatuan waktu
 persatuan volume

ρ = kerapatan fluida

$\partial\rho/\partial t$ = rata-rata waktu penambahan massa persatuan volume.

Lalu, rata-rata penambahan massa dalam $dx\,dy\,dz$ sama dengan rata-rata pembentukan dikurangi rata-rata aliran keluar, atau dalam lambang

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} dx\,dy\,dz = \psi\,dx\,dy\,dz - \nabla \cdot \mathbf{V}\,dx\,dy\,dz. \quad (6.160)$$

Apabila $dx\,dy\,dz$ dibuang, akan diperoleh

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \psi - \nabla \cdot \mathbf{V} \quad (6.161)$$

atau

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \psi - \frac{\partial\rho}{\partial t}. \quad (6.162)$$

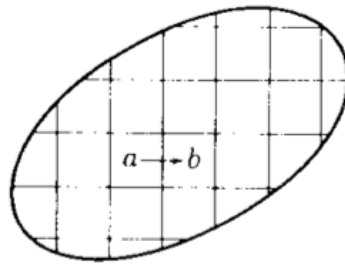
Jika tidak ada sumber atau pembedaan, $\psi = 0$, lalu hasilnya biasa disebut sebagai *persamaan kontinuitas* menurut

$$\nabla \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \quad \text{Persamaan Kontinuitas.} \quad (6.163)$$

Jika $\partial\rho/\partial t = 0$, lalu

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \psi. \quad (6.164)$$

Teorema Divergensi



Gambar 6.22: Penampang lintang suatu volume yang dipotong kecil-kecil.

Mari kita tinjau suatu volume besar τ , lalu bayangkan volume tersebut dipotong menjadi elemen volume $d\tau_i$ (penampang lintang ditunjukkan gambar 6.22). Aliran keluar dari masing-masing $d\tau_i$ adalah $\nabla \cdot \mathbf{V}\,d\tau_i$. Lalu, jika dijumlahkan semuanya, akan diperoleh

$$\sum_i \nabla \cdot \mathbf{V}\,d\tau_i. \quad (6.165)$$

Kita akan menunjukkan bahwa (6.165) merupakan aliran keluar dari volume besar tersebut. Tinjaulah aliran antara elemen a dan b yang ditunjukkan gambar 6.138. Aliran yang keluar dari a ke b sama dengan negatif aliran dari b ke a , sehingga semua aliran dalam permukaan dalam semacam ini dapat diabaikan. Lalu, jumlah total persamaan (6.165) sama dengan jumlah aliran yang keluar dari volume besar. Pendekatan jumlah volume ini dapat didekati dengan

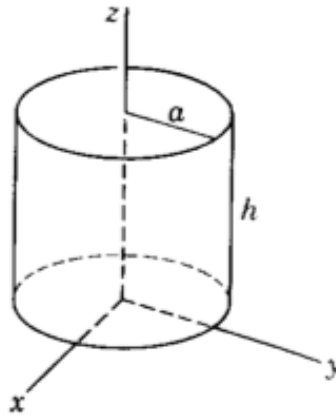
$$\iiint \nabla \cdot \mathbf{V} d\tau. \quad (6.166)$$

Lalu, *Teorema divergensi* mengatakan

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{V} d\tau = \iint \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\sigma \quad (6.167)$$

Contoh Teorema Divergensi

Andaikan $\mathbf{V} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$, evaluasilah $\oint \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\sigma$ melewati permukaan tertutup permukaan silinder gambar 6.23.



Gambar 6.23: Permukaan silinder.

Menurut teorema divergensi, integral tersebut sama dengan $\int \nabla \cdot \mathbf{V} d\tau$ melingkupi volume silinder. Lalu kita menemukan

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3. \quad (6.168)$$

Lalu menurut persamaan (6.167)

$$\oint_{\text{permukaan silinder}} \nabla \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\text{volume silinder}} \nabla \cdot \mathbf{V} d\tau = \int 3 d\tau = 3\pi a^2 h. \quad (6.169)$$

Hal ini lebih mudah dibandingkan dengan mengevaluasi $\oint \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\sigma$ secara langsung, tetapi mungkin kita bisa melakukannya untuk verifikasi. Kita membutuhkan permukaan normal \mathbf{n} . Pada bagian atas $\mathbf{n} = \mathbf{k}$, dan di sana $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{k} = z = h$. Lalu,

$$\int_{\text{luas atas silinder}} \nabla \cdot \mathbf{n} d\sigma = h \int d\tau = h \pi a^2. \quad (6.170)$$

Pada daerah bawah permukaan, $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$, $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = -z = 0$. Pada permukaan kurva kita dapat melihat bahwa $\mathbf{i}x + \mathbf{j}y$ normal ke permukaan, sehingga kita memiliki

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{i}x + \mathbf{j}y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\mathbf{i}x + \mathbf{j}y}{a}. \quad (6.171)$$

Lalu, pada permukaan kurva kita menemukan

$$\nabla \cdot \mathbf{n} = \frac{x^2 + y^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = a, \quad (6.172)$$

sehingga

$$\oint_{\text{permukaan silinder}} \nabla \cdot \mathbf{n} d\sigma = a \int d\sigma = a 2\pi ah \quad (6.173)$$

Nilai $\oint \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\sigma$ melingkupi seluruh permukaan silinder adalah

$$\pi a^2 h + 2\pi a^2 h = 3\pi a^2 h. \quad (6.174)$$

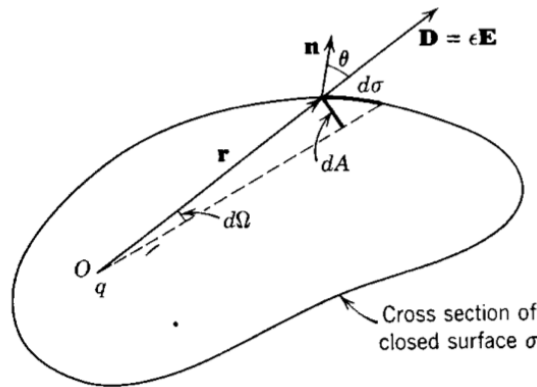
Hukum Gauss

Terima divergensi sangat penting dalam kelistrikan, lalu untuk mengetahui penggunaannya, kita perlu meninjau hukum dalam kelistrikan yang dikenal sebagai *hukum Gauss*. Mari kita menurunkan hukum ini dari hukum yang lebih dulu akrab dengan kita, yaitu hukum Coulomb. Hukum Coulomb memberikan bahwa pada medan listrik pada \mathbf{r} berdasarkan titik muatan q pada pusat koordinat

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{e}_r. \quad \text{Hukum Coulomb} \quad (6.175)$$

dengan ϵ adalah konstanta dielektrik dan $1/4\pi\epsilon = 9 \times 10^9$ dalam vakum dalam satuan mks. Perpindahan dielektrik \mathbf{D} didefinisikan sebagai $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, lalu

$$\mathbf{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \mathbf{e}_r. \quad (6.176)$$



Gambar 6.24: Muatan titik q di dalam area tertutup.

Andaikan σ merupakan permukaan tertutup mengelilingi muatan q pada pusat koordinat. Lalu, $d\sigma$ merupakan elemen luasan permukaan pada titik \mathbf{r} , dan \mathbf{n} merupakan vektor normal satuan

(gambar 6.24). Lalu, dA merupakan proyeksi $d\sigma$ ke bola pada radius r dan pusat koordinat O , dan $d\Omega$ merupakan sudut yang terbentuk dari dA atau $d\sigma$ pada O . Lalu menurut definisi sudut ini

$$d\Omega = \frac{1}{r^2} dA. \quad (6.177)$$

Berdasarkan gambar 6.24, persamaan (6.176) dan (6.177), kita mendapatkan

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} d\sigma = D \cos \theta d\sigma = D dA = \frac{q}{4\pi r^2} r^2 d\Omega = \frac{1}{4\pi} q d\Omega. \quad (6.178)$$

Kita ingin mencari integral permukaan $\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} d\sigma$ melewati permukaan tertutup σ , lalu kita memperoleh

$$\oint_{\text{permukaan } \sigma} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \frac{q}{4\pi} \int_{\text{sudut total}} d\Omega = \frac{q}{4\pi} 4\pi = q. \quad (6.179)$$

Ini merupakan kasus sederhana Hukum Gauss ketika kita hanya memiliki muatan titik q . Kita harus berhati-hati saat menurunkan persamaan (6.179), perhatikanlah q yang berada di dalam area terlingkup. Jika q berada di luar arean ini, kita akan menemukan kasus

$$\oint_{\sigma} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0. \quad (6.180)$$

Berikutnya, andikan terdapat beberapa muatan q dalam luasan terlingkup, masing-masing q_i akan sebanding dengan \mathbf{D}_i yang dapat ditulis seperti persamaan (6.179). Tetapi vektor perpindahan dielektrik total \mathbf{D} pada suatu titik berdasarkan semua q_i adalah vektor jumlah dari \mathbf{D}_i , yaitu

$$\oint_{\sigma} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \sum_i \oint_{\sigma} \mathbf{D}_i \cdot \mathbf{n} d\sigma = \sum q_i. \quad (6.181)$$

Berikutnya, untuk suatu distribusi muatan di dalam permukaan tertutup

$$\oint_{\sigma} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} d\sigma = q_{\text{enc}}. \quad \text{Hukum Gauss} \quad (6.182)$$

dengan q_{enc} adalah muatan di dalam permukaan tertutup.

Apabila muatan terisolasi, dengan rapat distribusi muatan ρ , muatan total adalah $\int \rho d\tau$, sehingga

$$\oint_{\sigma} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_V \rho d\tau. \quad \text{Hukum Gauss.} \quad (6.183)$$

Berikutnya, kita akan melihat hubungan teorema divergensi dengan hukum Gauss. Menurut teorema divergensi, integral permukaan pada ruas kiri persamaan (6.182) atau (6.183) sama dengan

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{D} d\tau. \quad (6.184)$$

Lalu, persamaan (6.183) dapat ditulis

$$\int \nabla \cdot \mathbf{D} d\tau = \int \rho d\tau, \quad (6.185)$$

sehingga

$$\oint_{\sigma} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int \nabla \cdot \mathbf{D} d\tau = \int \rho d\tau = q. \quad (6.186)$$

6.8 Curl dan Teorema Stokes

Kita telah mendefinisikan $\text{curl } \mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{V}$ dan meninjau contoh penerapannya. Di sini, kita akan meninjau satu contoh penerapan lain curl . Andaikan suatu benda tegar berotasi dengan kecepatan sudut konstan $\vec{\omega}$, hal ini berarti $|\vec{\omega}|$ besarnya kecepatan sudut dan $\vec{\omega}$ vektor sepanjang sumbu rotasi. Lalu kecepatan partikel dalam benda tegar adalah $\mathbf{v} = \vec{\omega} \times \mathbf{r}$, dengan \mathbf{r} merupakan vektor jarak dari suatu titik sumbu rotasi ke partikel. Mari kita menghitung $\nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r})$ dengan metode yang telah didiskusikan sebelumnya. Kita menggunakan rumusan hasil kali tiga kali vektor $\mathbf{A} \times (\mathbf{X} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$, lalu perhatikan bahwa ∇ bukan merupakan vektor dasar. Lalu

$$\nabla \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}) = (\nabla \cdot \vec{\omega})\mathbf{r} - (\vec{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{r}. \quad (6.187)$$

Oleh karena $\vec{\omega}$ konstan, suku pertama persamaan di atas berarti

$$\vec{\omega}(\nabla \cdot \mathbf{r}) = \vec{\omega} \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) = 3\vec{\omega}. \quad (6.188)$$

Lalu, untuk suku kedua, kita dapat menuliskan $\vec{\omega} \cdot \nabla$ sebagai $\nabla \cdot \vec{\omega}$ oleh karena $\vec{\omega}$ konstan dan ∇ hanya bekerja pada \mathbf{r} . Suku ini berarti

$$\left(\omega_x \frac{\partial}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z) = \mathbf{i}\omega_x + \mathbf{j}\omega_y + \mathbf{k}\omega_z = \vec{\omega} \quad (6.189)$$

karena $\partial y / \partial x = \partial z / \partial x$ dan seterusnya. Lalu

$$\nabla \times \mathbf{V} = \nabla \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}) = 2\vec{\omega} \quad (6.190)$$

atau

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{V}). \quad (6.191)$$

Hasil ini memberikan petunjuk mengenai $\text{curl } \mathbf{v}$, untuk contoh kasus sederhana $\text{curl } \mathbf{V}$ memberikan kecepatan sudut rotasi. Dalam kasus yang lebih kompleks seperti aliran fluida nilai $\text{curl } \mathbf{v}$ pada suatu titik adalah mengukur kecepatan sudut fluida dalam lingkungan sekitar titik tersebut. Ketika $\nabla \times \mathbf{v} = 0$, kecepatan medan \mathbf{v} dikatakan *irrotasional* pada daerah tersebut.

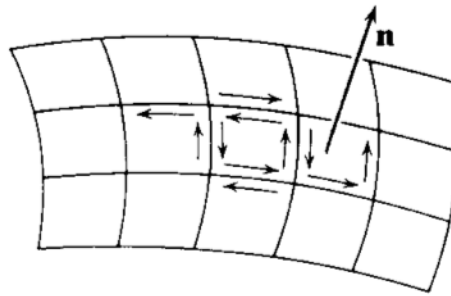
6.8.1 Teorema Stokes

Teori ini terkait dengan integral melewati permukaan terbuka ke integral garis suatu kurva yang membatasi permukaan tersebut (gambar ??). Permukaan yang akan kita tinjau di sini merupakan permukaan yang diperoleh dari deformasi suatu lengkungan. Secara khusus, permukaan yang akan ditinjau harus memiliki dua sisi. Ada permukaan yang memiliki satu sisi saja. Permukaan satu sisi ini dapat diperoleh dengan mengambil suatu pita kertas, lalu memutar setengah lingkaran bagian tengahnya, kemudiang menghubungkan ujung-ujungnya (gambar 6.25 kanan). Bangun ini disebut *Pita Moebius* dan dapat diverifikasi bahwa permukaannya hanya satu, yaitu dengan menyusuri permukaan pita dengan jari, yang akan sampai pada titik awal. Teorema Stokes tidak dapat diterapkan untuk permukaan semacam ini, karena kita tidak dapat mendefinisikan normal \mathbf{n} pada permukaan semacam ini. Kita membutuhkan kurva yang membatasi suatu permukaan dan tertutup.

Tinjaulah permukaan semacam yang dibutuhkan, lalu bayangkan kita membaginya ke dalam elemen luasan $d\sigma$ dengan kurva-kurva penghubung seperti gambar 6.26. Vektor satuan \mathbf{n} tegak lurus pada masing-masing elemen luasan. Arah \mathbf{n} tentu bervariasi dari elemen satu dan elemen lainnya. Tetapi, semua \mathbf{n} harus berada pada salah satu sisi saja. Masing-masing elemen dapat didekati dengan elemen singgung bidang pada suatu titik permukaan dalam $d\sigma$. Lalu kita memiliki



Gambar 6.25: Suatu permukaan yang dibatasi kurva tertutup.



Gambar 6.26: Elemen luasan.

$$\oint_{d\sigma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{d\sigma} (\nabla \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} d\sigma \quad (6.192)$$

untuk masing masing elemen. Jika kita menjumlahkan semua persamaan untuk semua elemen ke seluruh permukaan, akan diperoleh

$$\sum_{\text{semua } d\sigma} \oint_{d\sigma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\text{permukaan } \sigma} (\nabla \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} d\sigma. \quad (6.193)$$

Berdasarkan gambar 6.26 kita dapat melihat bahwa integral garis bagian dalam dapat dibuang, karena ada dua $d\sigma$ dengan dua integral yang saling berlawanan arah. Lalu ruas kiri persamaan (6.193) menjadi sederhana yaitu menjadi integral garis sepanjang kurva yang mengelilingi kurva luar batas permukaan tersebut. Ini disebut dengan *Teorema Stokes* yang dinyatakan dalam

$$\oint_{d\sigma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\text{permukaan } \sigma} (\nabla \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} d\sigma. \quad (6.194)$$

6.8.2 Hukum Ampere

Teorema Stokes cukup menarik jika diterapkan dalam teori kelistrikan dan kemagnetan. Hukum Ampere dalam suatu rangkaian menyatakan

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = I, \quad (6.195)$$

dengan \mathbf{H} merupakan intensitas kemagnetan, C adalah kurva tertutup, dan I adalah arus terhubung C , yaitu arus yang melintasi permukaan yang dibatasi C . Luasan permukaan dan kurva C dapat

dikaitkan dengan teorema Stokes. Jika kita berpikir tentang suatu untingan kawat yang terhubung kurva tertutup C (gambar 6.27 kiri) lalu menyebar. Kita dapat melihat bahwa sebaran arus ini sama dengan arus yang melintasi permukaan yang dibatasi kurva C . Sebagaimana hukum Gauss yang



Gambar 6.27: Kumpulan kawat berarus dalam kurva tertutup C .

sangat berguna untuk menghitung medan listrik, Hukum Ampere sangat berguna untuk menghitung medan magnetik. Tinjaulah suatu kawat lurus panjang yang membawa arus I , dengan intensitas medan magnet \mathbf{H} dari kawat yang menyinggung lingkaran berjari-jari r pada bidang yang tegak lurus kawat (gambar 6.27 kanan). Menurut simetri, $|\mathbf{H}|$ memiliki nilai yang sama pada setiap titik di lingkaran. Kita dapat mencari $|\mathbf{H}|$ menggunakan hukum Ampere. Dengan mengambil C sebagai lingkaran berjari-jari r , kita memiliki

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} H r d\theta = H r 2\pi = I \quad (6.196)$$

atau

$$H = \frac{1}{2\pi r}. \quad (6.197)$$

Jika dalam gambar 6.27 kiri, \mathbf{J} merupakan rapat arus, lalu $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} d\sigma$ merupakan arus yang melintasi elemen permukaan $d\sigma$ dan $\iint_\sigma \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} d\sigma$ melintasi permukaan σ yang dibatasi C adalah arus total yang terhubung dengan C . Lalu menurut hukum Ampere

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \iint_\sigma \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} d\sigma. \quad (6.198)$$

Menurut teorema Stokes

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \iint_\sigma (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} d\sigma, \quad (6.199)$$

sehingga kita memiliki

$$\iint_\sigma (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iint_\sigma \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} d\sigma. \quad (6.200)$$

Oleh karena hal ini benar, tentu kita dapat menuliskan

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad (6.201)$$

yang merupakan salah satu dari *Persamaan Maxwell*. Tanpa sengaja kita telah mengawali membahas persamaan Maxwell menggunakan hukum Ampere.



7. Persamaan Diferensial Biasa

Suatu persamaan yang mengandung turunan disebut *Persamaan Diferensial*. Apabila persamaan tersebut mengandung turunan parsial, maka disebut *Persamaan Diferensial Parsial*, selain itu, disebut *Persamaan Diferensial Biasa*.

Bagian ini akan menjelaskan beberapa metode untuk menjawab persamaan diferensial yang sering muncul dalam fisika. Mari kita lihat beberapa contoh tersebut.

Hukum dua Newton dituliskan dalam $\vec{F} = m\vec{a}$. Jika percepatan \vec{a} ditulis dalam $d\vec{v}/dt$ dengan \vec{v} adalah kecepatan, atau $d^2\vec{r}/dt^2$ dengan \vec{r} adalah perpindahan, hukum tersebut akan berupa persamaan diferensial. Persamaan tersebut merupakan permasalahan mekanika yang akan menggambarkan gerak suatu benda.

Rata-rata perubahan panas Q yang keluar melalui jendela, atau pipa (corong teko) air panas akan sebanding dengan luasan A dan perubahan suhu dT terhadap perubahan jarak dx yang sesuai arah aliran panas. Hal ini dirumuskan menurut

$$\frac{dQ}{dt} = kA \frac{dT}{dx}, \quad (7.1)$$

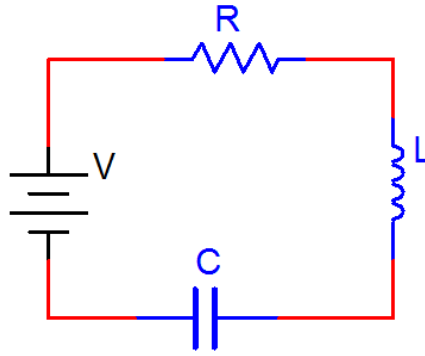
dengan k merupakan konduktivitas panas dan bergantung material yang dilalui aliran panas tersebut. Jumlah persamaan diferensial yang terkandung dalam persamaan tersebut sebanyak dua buah, yaitu dT/dx dan dQ/dt . Menjawab persamaan diferensial ini berarti menemukan suhu T sebagai fungsi jarak x , atau menemukan panas Q sebagai fungsi waktu t .

Perhatikan rangkaian pada gambar 7.1 yang mengandung hambatan R , kapasitansi C , induktansi L , dan suatu sumber V . Hukum II Kirchoff menyatakan bahwa jumlah tegangan pada rangkaian tertutup sama dengan nol. Arus yang mengalir pada rangkaian pada waktu t akan dinyatakan dengan $I(t)$, dan muatan dengan $q(t)$. Oleh karena tegangan pada resistor adalah IR , kapasitor q/C , dan induktor LdI/dt , hubungan hukum II Kirchoff akan memberikan

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{C} = V. \quad (7.2)$$

Apabila dilakukan substitusi $I = dq/dt$, akan diperoleh

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V. \quad (7.3)$$



Gambar 7.1: Rangkaian RLC sederhana

Masalah rangkaian RLC di atas dapat dijawab untuk memperoleh I sebagai fungsi waktu t , atau muatan q sebagai fungsi waktu t . Selain itu, masalah ini juga dapat dipandang untuk mencari tegangan V sebagai fungsi waktu, yaitu dengan menurunkan persamaan (7.2) terhadap waktu, sehingga diperoleh

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{dV}{dt}. \quad (7.4)$$

Banyak permasalahan fisika yang menghadapkan kita pada persamaan diferensial. Kita dapat menelusuri hal itu lebih jauh untuk topik-topik fisika yang lain.

Orde suatu persamaan diferensial tercermin dari orde turunan tertinggi dari persamaan tersebut. *Persamaan diferensial orde pertama* memiliki turunan tertinggi satu kali. Contohnya adalah

$$y' + xy^2 = 1, \quad (7.5)$$

$$xy' + y = e^x, \quad (7.6)$$

$$\frac{dv}{dt} = -g, \quad (7.7)$$

$$L \frac{dI}{dt} + RI = V. \quad (7.8)$$

Persamaan diferensial orde kedua memiliki turunan tertinggi sebanyak dua kali. Contohnya adalah

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -kr. \quad (7.9)$$

Contoh lain adalah persamaan (7.3) dan (7.4).

Jawaban suatu persamaan diferensial (dalam variabel x dan y) adalah hubungan antara x dan y yang jika tersubstitusi ke persamaan diferensial tersebut akan memberikan identitas.

Contoh 7.0.1 Hubungan

$$y = \sin x + c \quad (7.10)$$

merupakan jawaban dari persamaan diferensial

$$y' = \cos x, \quad (7.11)$$

karena jika kita substitusikan (7.10) ke persamaan (7.11) akan didapatkan identitas $\cos x = \cos x$. ■

Problem 7.1 1. Carilah jarak yang ditempuh suatu benda pada waktu y yang bergerak dari keadaan diam yang memiliki percepatan

$$\frac{d^2x}{dt^2} = ge^{-kt}. \quad (7.12)$$

Tunjukkan bahwa hasilnya adalah

$$x = \frac{1}{2}gt^2, \quad (7.13)$$

untuk t yang kecil, dan tunjukkan pula bahwa kecepatan benda dx/dt mendekati konstan untuk t yang sangat besar!

2. Carilah posisi x sebagai fungsi waktu t suatu partikel jika percepatannya

$$\frac{d^2x}{dt^2} = A \sin \omega t, \quad (7.14)$$

dengan A suatu konstanta!

3. Momentum p suatu elektron dengan kelajuan v mendekati kelajuan cahaya c bertambah menurut rumusan

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (7.15)$$

dengan m_0 merupakan massa benda. Jika elektron diberi suatu gaya konstan F menurut

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = F, \quad (7.16)$$

carilah kelajuan v sebagai fungsi waktu t ! Tunjukkan bahwa saat t mendekati takhingga, kecepatan benda adalah c ! Carilah jarak yang ditempuh elektron jika bergerak dari keadaan diam!

7.1 Pemisahan Variabel

Setiap kali mengevaluasi integral

$$y = \int f(x)dx, \quad (7.17)$$

sebenarnya kita sedang menjawab suatu persamaan diferensial, yaitu

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x). \quad (7.18)$$

Hal di atas merupakan contoh sederhana persamaan yang akan ditulis dengan suku-suku y hanya pada salah satu sisi dan suku-suku x hanya pada sisi persamaan yang lain, yaitu

$$dy = f(x)dx. \quad (7.19)$$

Saat kita dapat memisah variabel dalam persamaan diferensial dengan cara ini, persamaan ini disebut pemisahan variabel, lalu jawaban dapat diperoleh dengan mengintegalkan persamaan pada masing-masing sisi.

Contoh 7.1.1 Rata-rata peluruhan/pererasan suatu zat radioaktif sebanding dengan jumlah atom sisa. Jika pada $t = 0$ jumlah atom sebanyak N_0 , carilah jumlah atom pada waktu t .

Persamaan diferensial untuk masalah ini adalah

$$\frac{dN}{dt} \sim -N, \quad (7.20)$$

$$= -\lambda N. \quad (7.21)$$

Apabila dilakukan pemisahan variabel, akan diperoleh

$$\frac{1}{N}dN = -\lambda dt, \quad (7.22)$$

lalu persamaan ini dapat diintegralkan pada kedua sisi, sehingga

$$\int \frac{1}{N}dN = -\lambda \int dt, \quad (7.23)$$

$$\ln N = -\lambda t + C. \quad (7.24)$$

Besaran C dapat diperoleh dengan memasukkan syarat awal yang sudah ditentukan yaitu pada $t = 0$ jumlah atom sebanyak N_0 , sehingga

$$\ln N_0 = 0 + C, \quad (7.25)$$

$$C = \ln N_0, \quad (7.26)$$

Jadi,

$$\ln N = -\lambda t + \ln N_0, \quad (7.27)$$

$$\ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t, \quad (7.28)$$

$$(7.29)$$

lalu akan diperoleh

$$N = N_0 e^{-\lambda t}. \quad (7.30)$$

■

Pengosongan Kapasitor

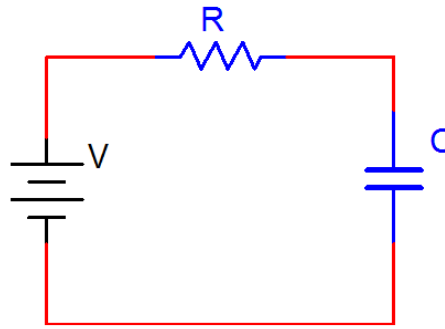
Perhatikanlah rangkaian di bawah ini.

Gambar 7.2 merupakan representasi rangkain RC. Masalah rangkaian RC ini biasanya muncul dalam dua model. Pertama, ketika saklar lepas sementara masih ada muatan dalam kapasitor. Kasus ini biasa disebut *pengosongan kapasitor*. Kedua, ketika saklar terhubung dan muatan pada kapasitor belum penuh. Kasus ini sering disebut *pengisian kapasitor*. Mari kita lihat jawaban masalah ini.

Bagian ini akan meninjau pengosongan kapasitor. Apabila saklar dilepas (muatan dalam kapasitor belum kosong). Menurut Hukum II Kirchoff, tegangan dalam rangkaian akan memenuhi

$$IR + \frac{q}{C} = V, \quad (7.31)$$

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{V}{R}. \quad (7.32)$$



Gambar 7.2: Rangkaian RC

Oleh karena $V = 0$ (saklar dilepas), akan diperoleh

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC}, \quad (7.33)$$

$$\frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} dt, \quad (7.34)$$

$$\int \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} \int dt, \quad (7.35)$$

$$\ln q = -\frac{t}{RC} + k. \quad (7.36)$$

Apabila diberikan syarat awal, pada $t = 0$ muatan pada kapasitor sejumlah q_0 , diperoleh

$$\ln q_0 = 0 + k, \quad (7.37)$$

$$k = \ln q_0, \quad (7.38)$$

sehingga

$$\ln q = -\frac{t}{RC} + \ln q_0, \quad (7.39)$$

$$\ln \frac{q}{q_0} = -\frac{t}{RC}. \quad (7.40)$$

$$(7.41)$$

Jika kedua ruas diangkat ke dalam pangkat eksponensial akan diperoleh

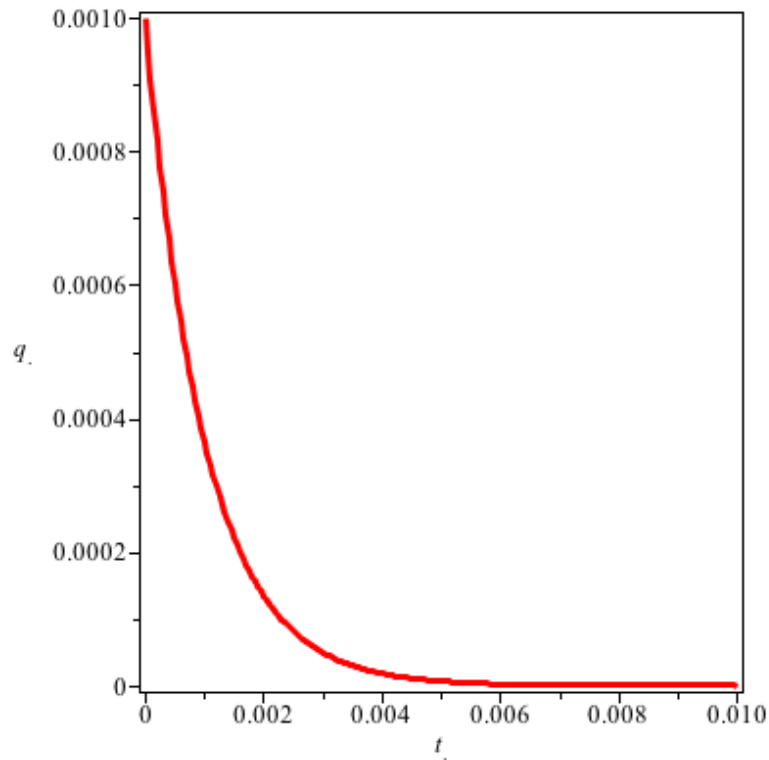
$$q = q_0 e^{-t/RC}. \quad (7.42)$$

Apabila persamaan ini digambarkan untuk q sebagai fungsi t akan diperoleh bentuk seperti gambar 7.3

7.2 Persamaan Diferensial Orde Pertama

Persamaan diferensial orde pertama mengandung y' atau hanya mengandung turunan berderajat satu. Persamaan linier orde pertama dapat ditulis dalam bentuk

$$y' + Py = Q, \quad (7.43)$$



Gambar 7.3: Grafik pengosongan kapasitor untuk $q_0 = 10^{-3}C$ dan $RC = 10^{-2}\Omega F$

dengan P dan Q merupakan fungsi terhadap x . Perolehan jawaban persamaan (7.43), akan diuraikan berikut ini. Andaikan dipilih kasus sederhana, yaitu $Q = 0$, sehingga diperoleh

$$y' + Py = 0 \quad \text{atau} \quad \frac{dy}{dx} = -Py \quad (7.44)$$

yaitu pemisahan variabel dan jawabannya dapat diuraikan menurut

$$\frac{dy}{y} = -Pdx \quad (7.45)$$

$$\ln y = -\int Pdx + c \quad (7.46)$$

$$y = e^{-\int Pdx + c} = Ae^{-\int Pdx}, \quad (7.47)$$

dengan $A = e^c$. Berikutnya notasi yang digunakan akan disederhakan, yaitu

$$I = \int Pdx, \quad (7.48)$$

lalu

$$\frac{dI}{dx} = P, \quad (7.49)$$

sehingga persamaan (7.47) dapat ditulis menurut

$$y = Ae^{-I} \quad \text{atau} \quad ye^I = A \quad (7.50)$$

Apabila persamaan (7.50) diturunkan akan diperoleh

$$\frac{d}{dx}(ye^I) = y'e^I + ye^I \frac{dI}{dx}, \quad (7.51)$$

$$= y'e^I + ye^I P, \quad (7.52)$$

$$= e^I(y' + Py), \quad (7.53)$$

$$= e^I Q. \quad (7.54)$$

Oleh karena Q dan e^I merupakan fungsi yang hanya bergantung pada x , maka kedua ruas dapat diintegrasikan dan diperoleh

$$ye^I = \int Qe^I dx + c, \quad (7.55)$$

atau

$$y = e^{-I} \int Qe^I dx + ce^{-I}, \quad (7.56)$$

dengan $I = \int P dx$.

Contoh 7.2.1 Jawablah $x^2 y' - 2xy = 1/x$!

Persamaan ini dapat ditulis dalam bentuk

$$y' - \frac{2}{x}y = \frac{1}{x^3} \quad (7.57)$$

Apabila jawaban persamaan (7.55) diterapkan, diperoleh

$$I = \int (-2/x) dx = -2 \ln x, \quad (7.58)$$

$$e^I = e^{-2 \ln x} = \frac{1}{x^2}, \quad (7.59)$$

$$ye^I = y \frac{1}{x^2} = \int \frac{1}{x^2} \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-5} dx = \frac{x^{-4}}{-4} + c, \quad (7.60)$$

$$y = -\frac{1}{4x^2} + cx^2. \quad (7.61)$$

■

Pengisian Kapasitor

Kita kembali lagi ke permasalahan kapasitor, Apabila saklar dihubungkan dan muatan dalam kapasitor belum penuh atau dianggap kapasitor kosong, persamaan (7.32) dapat ditulis kembali menurut

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{V}{R} \quad (7.62)$$

Persamaan ini memiliki bentuk yang cocok dengan persamaan diferensial orde pertama yaitu

$$q' + Pq = Q \quad (7.63)$$

dengan $P = 1/RC$ dan $Q = V/R$, sehingga

$$I = \int P dt, \quad (7.64)$$

$$= \int \frac{1}{RC} dt, \quad (7.65)$$

$$= \frac{t}{RC}. \quad (7.66)$$

Menurut persamaan (7.56) jawaban persamaan ini adalah

$$q = e^{-t} \int Q e^t dx + k e^{-t}, \quad (7.67)$$

$$= e^{-t/RC} \int \frac{V}{R} e^{t/RC} dt + k e^{-t/RC}, \quad (7.68)$$

$$= e^{-t/RC} V C e^{t/RC} + k e^{-t/RC}, \quad (7.69)$$

$$= VC + k e^{-t/RC}. \quad (7.70)$$

Apabila diberikan syarat awal, pada $t = 0$ muatan kapasitor $q = 0$, akan diperoleh

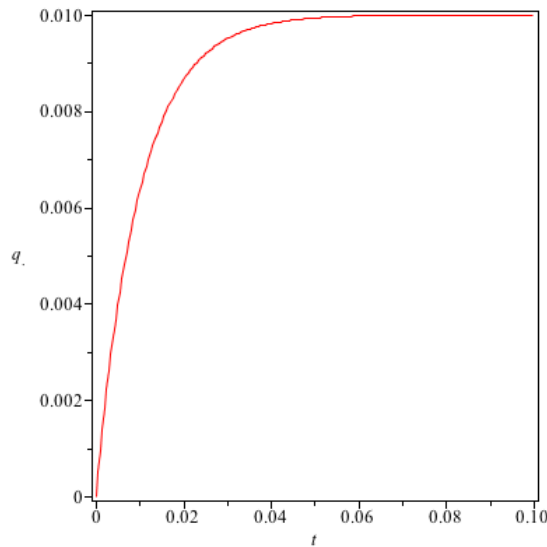
$$0 = VC + k, \quad (7.71)$$

$$k = -VC, \quad (7.72)$$

sehingga

$$q = VC(1 - e^{-t/RC}). \quad (7.73)$$

Persamaan ini merupakan proses *pengisian kapasitor*. Plot grafik persamaan ini untuk q sebagai fungsi t ditunjukkan oleh gambar 7.4.



Gambar 7.4: Grafik pengisian kapasitor untuk $V = 10\text{volt}$ dan $C = 10^{-3}F$ dan $R = 10\Omega$.

7.3 Teknik lain Persamaan Linier Orde Pertama

7.3.1 Persamaan Bernoulli

Persamaan diferensial

$$y' + Py = Qy^n, \quad (7.74)$$

dengan P dan Q suatu fungsi terhadap x , diketahui sebagai *Persamaan Bernoulli*. Persamaan ini tidak linier tetapi mudah direduksi menjadi persamaan linier, yaitu dengan merubah variabel yang terkait. Kita akan mengandaikan

$$z = y^{1-n}, \quad (7.75)$$

dan turunannya adalah

$$z' = (1-n)y^{-n}y'. \quad (7.76)$$

Apabila persamaan (7.74) dikalikan dengan $(1-n)y^{-n}$, dan membuat substitusi dari persamaan (7.75) dan (7.76), akan diperoleh

$$(1-n)y^{-n}y' + (1-n)Py^{1-n} = (1-n)Q, \quad (7.77)$$

$$z' + (1-n)Pz = (1-n)Q. \quad (7.78)$$

Persamaan yang diperoleh ini berbentuk persamaan linier orde pertama yang sudah dibahas pada subbab sebelumnya.

7.3.2 Persamaan Eksak

Persamaan ini muncul dalam contoh persamaan

$$dF(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy \quad (7.79)$$

dengan

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (7.80)$$

Jika persamaan ini dijaga, akan terdapat $F(x,y)$ semacam

$$P = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad Pdx + Qdy = dF. \quad (7.81)$$

Persamaan ini disebut eksak jika

$$Pdx + Qdy = dF = 0 \quad (7.82)$$

Jawaban persamaan ini adalah

$$F(x,y) = \text{konstanta}. \quad (7.83)$$

Kita semestinya telah membahas masalah ini pada mata kuliah sebelumnya.

Suatu persamaan yang tidak eksak sering dapat dibuat eksak dengan mengalikannya dengan faktor yang sesuai. Contohnya adalah persamaan

$$xdy - ydx = 0 \quad (7.84)$$

yang merupakan bukan persamaan eksak. Tetapi apabila persamaan tersebut kita bagi dengan x^2 , sehingga

$$\frac{xdy - ydx}{x^2} = \frac{1}{x}dy - \frac{y}{x^2}dx = 0. \quad (7.85)$$

Persamaan ini adalah persamaan eksak, dan jawabannya adalah

$$\frac{y}{x} = \text{konstanta}. \quad (7.86)$$

7.3.3 Persamaan Homogen

Persamaan homogen muncul dalam bentuk

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (7.87)$$

dengan P dan Q adalah fungsi homogen. Kita menulis persamaan ini dalam bentuk $y' = f(y/x)$ dengan merubah variabel $v = y/x$ atau

$$y = vx \quad (7.88)$$

yang akan membuat persamaan (7.87) menurun ke persamaan terpisahkan dalam variabel v dan x .

7.4 Persamaan Linier Orde Kedua

Persamaan linier order kedua secara umum dirumuskan menurut

$$a_0 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = 0 \quad (7.89)$$

dengan a_0, a_1 , dan a_2 suatu konstanta.

Untuk menyelesaikannya pertama-tama akan diperkenalkan notasi baru yaitu

$$D \equiv \frac{d}{dx} \quad (7.90)$$

sehingga persamaan (7.89) dapat dituliskan menurut

$$(D^2 + bD + c)y = 0. \quad (7.91)$$

dengan $b = a_1/a_0$ dan $c = a_2/a_0$. Persamaan ini seolah-olah berbentuk persamaan kuadrat. Persamaan kuadrat dengan bentuk seperti di atas dapat dijawab melalui bentuk akar persamaan kuadrat yang masing-masing bernilai

$$D_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}. \quad (7.92)$$

Nilai akar (yang berada dalam akar) dapat bernilai real, nol atau imajiner. Sekarang perhatikan nilai yang di dalam akar tersebut, yaitu $\sqrt{b^2 - 4c}$. Jika akar tersebut bernilai real, jawaban umum persamaan (7.89) adalah

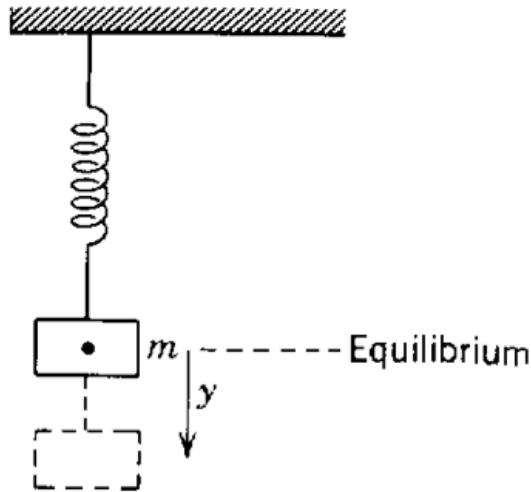
$$y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{\beta x}, \quad (7.93)$$

dengan α dan β merupakan D_1 dan D_2 , serta c_1, c_2 sembarang konstanta. Jika akar bernilai nol, jawabannya adalah

$$y = (Ax + B)e^{\alpha x}, \quad (7.94)$$

dengan α adalah $-b/2$. Lalu, jika akar bernilai imajiner, jawabannya adalah

$$y = c_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} (Ae^{i\beta x} + Be^{-i\beta x}) \quad (7.95)$$



Gambar 7.5: Benda bermassa m digantungkan pada pegas, lalu ditarik sejauh y

Contoh 7.4.1 Sebuah benda bermassa m digantungkan pada sebuah pegas seperti pada gambar 7.5.

1. Carilah posisi pegas jika pada $t = 0$, pegas diregangkan sejauh 10 satuan?
2. Apabila dianggap gesekan dengan udara tidak diabaikan dan gaya gesek tersebut sebanding dengan kecepatan, yaitu $f = -l dy/dt$, carilah jawaban umum dari kasus tersebut

Hukum II Newton untuk kasus ini diberikan menurut

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky, \quad (7.96)$$

dengan y pertambahan panjang pegas. Apabila dianggap $\omega^2 = k/m$, persamaan tersebut dapat ditulis menurut

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\omega^2 y. \quad (7.97)$$

Persamaan ini diuraikan menurut

$$D^2 y + \omega^2 y = 0, \quad (7.98)$$

dengan $D = d/dt$. Akar persamaan bantu adalah $D = \pm i\omega$, lalu jawaban yang diperoleh akan sesuai dengan persamaan (7.95), yaitu

$$y = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \quad (7.99)$$

$$= c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t \quad (7.100)$$

$$= c \sin(\omega t + \gamma). \quad (7.101)$$

Gerak semacam ini biasa disebut sebagai *gerak harmonik sederhana*.

Apabila gaya gesek tidak diabaikan dan dianggap sebanding dengan kecepatan dan dirumuskan menurut

$$f_s = -l \frac{dy}{dt}, \quad (7.102)$$

dengan l adalah koefien gesekan dan tanda negatif menunjukkan bahwa arah benda cenderung berlawanan dengan arah gaya gesek. Hukum II Newton akan memberikan

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} - l \frac{dy}{dt} = -ky. \quad (7.103)$$

Apabila dianggap $\omega^2 = k/m$, dan $2b = l/m$, persamaan ini dapat dituliskan menurut

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2b \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0. \quad (7.104)$$

Persamaan ini diuraikan dalam persamaan akar bantu

$$(D^2 + 2bD + \omega^2)y = 0. \quad (7.105)$$

Akar akar bantunya adalah

$$D = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4\omega^2}}{2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega^2}. \quad (7.106)$$

Ada tiga kemungkinan jawaban untuk kasus ini, bergantung pada nilai b^2 dan ω^2 , dan secara spesifik jenis-jenis gerakanya adalah

teredam berat jika	$b^2 > \omega^2$,
teredam kritis jika	$b^2 = \omega^2$,
teredam harmonik jika	$b^2 < \omega^2$,

■

Teredam Berat

Oleh karena $\sqrt{b^2 - \omega^2}$ bilangan real dan akar keduanya negatif, jawaban umum akan berupa kombinasi linier dari eksponensial negatif

$$y = Ae^{-\lambda t} + Be^{-\mu t}, \quad (7.107)$$

dengan $\lambda = b + \sqrt{b^2 - \omega^2}$ dan $\mu = b - \sqrt{b^2 - \omega^2}$.

Teredam Kritis

Oleh karena $b = \omega$ persamaan bantu memiliki akar yang sama, sehingga jawaban umum dirumuskan menurut

$$y = (A + Bt)e^{-bt}. \quad (7.108)$$

Teredam Harmonik

Dalam kasus ini, $b^2 < \omega^2$ sehingga $\sqrt{b^2 - \omega^2}$ bernilai imajiner. Andaikan $\beta = \sqrt{\omega^2 - b^2}$ maka $\sqrt{b^2 - \omega^2} = i\beta$ dan akar persamaan bantu adalah $-b \pm i\beta$. Jawaban umumn dirumuskan menurut

$$y = ce^{-bt} \sin(\beta t + \gamma). \quad (7.109)$$



8. Kalkulus Variasi

8.1 Geodesik

Apa yang dimaksud dengan jarak terdekat antara dua titik? Tentu, kita sudah mengetahui jawabannya dengan baik. Bagaimana membuktikannya? Semestinya kita dapat membuktikannya dengan baik. Mari kita ilustrasikan dengan suatu contoh. Contoh pertanyaannya adalah apa jarak terdekat antara dua titik pada permukaan bola? Kita tahu bahwa jawabannya adalah lintasan yang merupakan anggota lingkaran besar. Bagaimana jika pertanyaan yang sama ini diberikan untuk bentuk-bentuk permukaan yang lain, misalnya kerucut atau silinder. Kurva sepanjang permukaan yang menandai jarak terdekat antara dua titik pada suatu lingkungan disebut **geodesik**. Geodesik tidak dapat dianggap sebagai garis lurus, tetapi dapat dianggap sebagai *jarak paling lurus* antara dua titik. Pengetahuan tentang geodesik ini dapat diperoleh dengan *kalkulus variasi* yang akan diuraikan dalam bab ini.

Masalah-masalah yang muncul di sini dapat dimengerti dengan mengulas kembali *kalkulus dasar* saat membahas titik maksimum dan minimum suatu fungsi $f(x)$. Titik maksimum atau minimum dapat diperoleh ketika turunan $f'(x)$ suatu fungsi x bernilai nol. Selebihnya, pada bagian ini kita akan memfokuskan perhatian pada $f'(x) = 0$ yang dapat diidentifikasi sebagai keadaan minimum. Keadaan ini, lebih jauh akan kita sebut sebagai *keadaan setimbang*. Dalam kalkulus variasi masalah keadaan ini dapat dikatakan sebagai kuantitas yang diminimalkan.

Bagaimanakah kuantitas yang membuat nilai minimum? Bentuknya merupakan suatu integral

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx, \quad (8.1)$$

dengan

$$y' = \frac{dy}{dx}. \quad (8.2)$$

Masalah ini dapat dijawab dengan memberikan titik (x_1, y_1) dan titik (x_2, y_2) dan bentuk fungsi F sebagai fungsi x, y, y' , mencari fungsi $y(x)$ yang melewati titi-titik yang diberikan yang akhirnya membuat integral I memiliki nilai terkecil yang mungkin atau nilai setimbang. Mari kita lihat

contoh berikut. Anggaplah kita ingin mencari persamaan $y = y(x)$ yang menghubungkan dua buah titik dari (y_1, x_1) sampai (y_2, x_2) pada suatu bidang yang membuat jarak dua titik tersebut minimum. Berangkat dari sini, kita dapat mengetahui bahwa element luas

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \quad (8.3)$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \quad (8.4)$$

Nilai minimum dapat diperoleh dengan mengintegralkan ds tersebut, yaitu

$$I = \int ds, \quad (8.5)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{dx^2 + dy^2}, \quad (8.6)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (8.7)$$

Berdasarkan persamaan ini kita tahu bahwa

$$F = \sqrt{1 + y'^2}. \quad (8.8)$$

8.2 Persamaan Euler

Bagian sebelumnya kita telah membahas geodesik. Lalu, apa hubungan secara fisis hal tersebut dengan ilmu fisika yang kita pelajari. Dinamika suatu benda secara alamiah akan mencari lintasan geodesik sebagai lintasan geraknya. Dinamika tersebut secara singkat dapat dijelaskan akan menempuh lintasan geodesik jika memenuhi

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \quad (8.9)$$

Persamaan ini disebut sebagai **persamaan Euler**.

Contoh 8.2.1 Bagaimanakah geodesik dalam bidang menggunakan persamaan Euler?

Tentu, kita akan meminimalkan persamaan (8.8), dan kita dapat menghitung

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}, \quad (8.10)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0. \quad (8.11)$$

Berikutnya, persamaan Euler memberikan

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 0. \quad (8.12)$$

■

Besaran lain

Kita telah menggunakan besaran x dan y sebagai besaran yang termuat dalam kasus yang kita pelajari. Fisika sering kali menghadirkan besaran lain, misalkan saat kita meninjau koordinat polar r dan θ . Dalam koordinat tersebut, untuk meminimalkan lintasan dapat dilakukan dengan

$$I = \int F(r, \theta, \theta'), \quad (8.13)$$

dengan

$$\theta' = \frac{d\theta}{dr}. \quad (8.14)$$

Contoh 8.2.2 Carilah lintasan yang diberikan oleh sinar cahaya jika indeks bias (dalam koordinat polar) sebanding dengan r^{-2} . Keadaan setimbang diberikan oleh

$$\int nds \equiv \int r^{-2} ds \quad (8.15)$$

$$= \int r^{-2} \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} \quad (8.16)$$

$$= \int r^{-2} \sqrt{1 + r^2 \theta'^2} dr. \quad (8.17)$$

Berdasarkan persamaan geodesik, teridentifikasi bahwa

$$F = r^{-2} \sqrt{1 + r^2 \theta'^2}. \quad (8.18)$$

Oleh karena $\partial F / \partial \theta = 0$, diperoleh

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{r^{-2} r^2 \theta'}{\sqrt{1 + r^2 \theta'^2}} \right) = 0 \quad \text{atau} \quad \frac{\theta}{\sqrt{1 + r^2 \theta'^2}} = K, \quad (8.19)$$

dengan K suatu konstanta. Apabila persamaan ini diintegrasikan akan diperoleh

$$\theta'^2 = K^2 (1 + r^2 \theta'^2) \quad (8.20)$$

$$\theta' = \frac{d\theta}{dr} = \frac{K}{\sqrt{1 - K^2 r^2}} \quad (8.21)$$

$$\theta = \arcsin Kr + \text{konstanta} \quad (8.22)$$

■

Integral pertama Persamaan Euler

Dalam beberapa masalah integrasi F di dalam I dapat tidak mengandung y atau dengan kata lain F tidak mengandung variabel terikat sehingga

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad (8.23)$$

dan persamaan Euler dapat dituliskan menurut

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \text{konstanta} \quad (8.24)$$

Berdasarkan persamaan ini, kita dapat mengintegrasikan persamaan ini satu kali saja. Lalu persamaan ini disebut integral pertama persamaan Euler

8.3 Persamaan Euler-Lagrange

Bukanlah hal yang terlalu penting untuk membatasi masalah yang kita hadapi hanya dalam satu variabel terikat y . Contohnya adalah masalah dalam kalkulus dasar yaitu syarat untuk titik minimum pada $x = z(x)$ yang didefinisikan oleh $d/dx = 0$. Apabila kita memiliki dua variabel bebas $z = z(x, y)$, tentu syarat minimum diberikan oleh $\partial z / \partial x = 0$ dan $\partial z / \partial y = 0$. Dalam kalkulus variasi kita memiliki kasus dengan analogi yang mirip dengan hal tersebut.

Andaikan diberikan F yang merupakan fungsi $y, z, dy/dx, dz/dx$, dan x , dan kita ingin mencari integral I yang bergantung keduanya $y(x)$ dan $z(x)$, lalu hal yang sangat baik dilakukan dalam kasus ini adalah menyatakannya dalam dua persamaan Euler masing-masing untuk y dan untuk z menurut

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad (8.25)$$

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial z'} - \frac{\partial F}{\partial z} = 0. \quad (8.26)$$

Seperti yang sudah dibahas pada subbab sebelumnya, hal ini juga merupakan persamaan terapan penting dalam mekanika. Dalam fisika dasar, hukum II Newton

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (8.27)$$

merupakan persamaan fundamental. Dalam mekanika yang dikembangkan, akan lebih berguna jika kita mengawali dengan anggapan yang berbeda. Anggapan ini disebut **Prinsip Hamilton**. Prinsip tersebut menyatakan bahwa partikel akan selalu bergerak dalam lintasan geodesik

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad (8.28)$$

yang merupakan keadaan setimbang, dengan

$$L = T - V, \quad (8.29)$$

yang disebut *Lagrangan*, T merupakan tenaga kinetik dan V merupakan tenaga potensial.

Contoh 8.3.1 Gunakan prinsip Hamilton untuk menemukan persamaan gerak suatu benda yang bergerak di sekitar bumi di bawah pengaruh gravitasi.

Pertama-tama kita tuliskan dulu tenaga kinetik T yang ada, yang dirumuskan menurut

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x} + \dot{y} + \dot{z}). \quad (8.30)$$

Potensial di sekitar bumi dirumuskan menurut

$$V = mgz. \quad (8.31)$$

Sehingga Lagrangan L yang diperoleh adalah

$$L = T - V \quad (8.32)$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{x} + \dot{y} + \dot{z}) - mgz \quad (8.33)$$

Keadaan setimbang dapat diperoleh dengan memasukkan L ke dalam persamaan Euler. Terdapat tiga persamaan Euler masing-masing untuk x , y , dan z , menurut

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (8.34)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad (8.35)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \quad (8.36)$$

Apabila dilakukan substitusi Lagrangan ke persamaan di atas akan diperoleh

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0 \rightarrow \dot{x} = \text{konstanta} \quad (8.37)$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{y}) = 0 \rightarrow \dot{y} = \text{konstanta} \quad (8.38)$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{z}) + mg = 0 \rightarrow \dot{z} = -g \quad (8.39)$$

■



9. Fungsi Khas

Integral, deret, dan fungsi pada bab ini muncul dalam berbagai masalah fisika. Terkadang, kita harus mempelajari fungsi khusus, lalu memahami penggunaannya untuk berbagai pekerjaan yang lebih kompleks. Sejumlah detail dari fungsi khusus semacam ini akan kita lihat pada bab ini.

9.1 Fungsi Faktorial

Mari kita mulai dengan menghitung nilai suatu integral, yaitu

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha}. \quad (9.1)$$

Apabila kedua ruas, baik kiri maupun kanan kita turunkan terhadap α berulang-ulang, secara urut akan diperoleh

$$\int_0^{\infty} -x e^{-\alpha x} dx = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad (9.2)$$

atau

$$\int_0^{\infty} x e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha^2}, \quad (9.3)$$

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-\alpha x} dx = \frac{2}{\alpha^3}, \quad (9.4)$$

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-\alpha x} dx = \frac{3!}{\alpha^4}, \quad (9.5)$$

atau secara umum hasilnya adalah

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}. \quad (9.6)$$

Apabila kita pilih $\alpha = 1$ akan didapat

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n!, \quad (9.7)$$

dengan $n = 1, 2, 3, \dots$.

Hal tersebut di atas, merupakan cara memperoleh nilai dari $n!$ untuk integral positif. Berdasarkan ini kita dapat menghitung $0!$, yaitu dengan meletakkan $n = 0$, sehingga

$$0! = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{\infty} = 1. \quad (9.8)$$

9.2 Fungsi Gamma

9.2.1 Definisi Fungsi Gamma

Fungsi faktorial secara umum didefinisikan untuk n merupakan bilangan bulat tak negatif, dengan n suku nonintegral dalam integral tertentu. Suku n ini memberi andil dalam suatu integral, bagian ini akan melihat hubungan faktor ini dengan fungsi Γ . Rumusan fungsi Γ dinyatakan dalam hubungan berikut untuk $p > 0$, yaitu

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx, \quad p > 0. \quad (9.9)$$

Berdasarkan persamaan (9.7) dan (9.9), akan diperoleh

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = (n-1)!, \quad (9.10)$$

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n!. \quad (9.11)$$

Berangkat dari sini dapat diperoleh pula

$$\Gamma(1) = 0! = 1, \quad (9.12)$$

$$\Gamma(2) = 1! = 1, \quad (9.13)$$

$$\Gamma(3) = 2! = 2, \quad (9.14)$$

$$\Gamma(4) = 3! = 6, \quad (9.15)$$

$$\vdots \quad (9.16)$$

Contoh di atas digunakan jika n adalah bilangan bulat. Lalu, bagaimana jika n bukan bilangan bulat. Mari kita tinjau dengan mengganti variabel n dengan p (hanya diganti saja). Lalu, p kita rubah menjadi $p+1$, sehingga persamaan (9.9) menjadi

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{\infty} x^p e^{-x} dx = p!, \quad p > -1. \quad (9.17)$$

Berikutnya persamaan ini kita integralkan dengan teknik integral parsial dengan

$$du = px^{p-1} dx, \quad v = -e^{-x}, \quad (9.18)$$

sehingga

$$\Gamma(p+1) = -x^p e^{-x} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty (-e^{-x}) p x^{p-1} dx, \quad (9.19)$$

$$= p \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx, \quad (9.20)$$

$$= p\Gamma(p). \quad (9.21)$$

Persamaan ini

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) \quad (9.22)$$

disebut *hubungan perulangan* atau hubungan rekursi untuk fungsi Γ . Apabila diberikan suatu fungsi Γ untuk p , kita dapat menghitung nilai $\Gamma(p+1)$.

Fungsi Γ pada banyak buku referensi biasanya diberikan dalam suatu tabel untuk p antara 1 sampai 2. Apabila hubungan perulangan digunakan, tentu kita dapat menghitung $\Gamma(p)$ antara 2 sampai 3, bahkan untuk sembarang $\Gamma(p)$ dengan p bukan bilangan bulat.

Contoh 9.2.1

$$\Gamma(2.5) = 1.5\Gamma(1.5), \quad (9.23)$$

$$\Gamma(3.5) = 2.5\Gamma(2.5) = (2.5)(1.5)\Gamma(1.5), \quad (9.24)$$

dan seterusnya. Kemudian, untuk mencari $\Gamma(p)$ antara 0 sampai 1, kita menggunakan rumus

$$\Gamma(p) = \frac{1}{p}\Gamma(p+1). \quad (9.25)$$

Contoh 9.2.2

$$\Gamma(0.5) = \frac{1}{0.5}\Gamma(1.5). \quad (9.26)$$

9.2.2 Fungsi Gamma Negatif

Fungsi $\Gamma(p)$ sejauh ini tidak didefinisikan untuk $p \leq 0$. Akan tetapi kita dapat menggunakan hubungan perulangan seperti saat menghitung fungsi Γ untuk p antara 0 sampai 1, yaitu

$$\Gamma(p) = \frac{1}{p}\Gamma(p+1). \quad (9.27)$$

Contoh 9.2.3

$$\Gamma(-0.5) = \frac{1}{-0.5}\Gamma(0.5), \quad (9.28)$$

$$\Gamma(-1.5) = \frac{1}{-1.5} \frac{1}{-0.5}\Gamma(0.5), \quad (9.29)$$

dan seterusnya.

Oleh karena $\Gamma(1) = 1$, kita dapat melihat bahwa

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p} \rightarrow \infty \quad \text{saat } p \rightarrow 0. \quad (9.30)$$

9.2.3 Rumusan Penting terkait Fungsi Gamma

Pertama-tama kita akan mengevaluasi $\Gamma(\frac{1}{2})$. Menurut definisi

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty t^{1/2} e^{-t} dt. \quad (9.31)$$

Apabila kita merubah $t = y^2$, sehingga $dt = 2y dy$, lalu akan diperoleh

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty \frac{1}{y} e^{-y^2} 2y dy, \quad (9.32)$$

$$= 2 \int_0^\infty e^{-y^2} dy, \quad (9.33)$$

dan dengan cara yang sama, apabila $t = x^2$, akan diperoleh

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = 2 \int_0^\infty e^{-x^2} dx. \quad (9.34)$$

Berikutnya, kita kalikan $\Gamma(\frac{1}{2})$ dari pemisalan yang telah kita buat yaitu untuk x dan y , yang ditulis menurut

$$[\Gamma(\frac{1}{2})]^2 = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy, \quad (9.35)$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\theta, \quad (9.36)$$

$$= 4 \left. \frac{\pi e^{-r^2}}{-2} \right|_0^\infty, \quad (9.37)$$

$$= \pi. \quad (9.38)$$

Sehingga kita telah membuktikan bahwa

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}. \quad (9.39)$$

Kita juga dapat menyatakan bahwa (tidak melalui pembuktian)

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}. \quad (9.40)$$

9.2.4 Rumusan Stirling

Rumusan yang mengandung $n!$ atau $\Gamma(p)$ secara aljabar tidak mudah untuk diturunkan. Ada pendekatan rumusan untuk fungsi faktorial atau fungsi gamma yang diketahui sebagai *rumusan Stirling*. Rumusan tersebut adalah

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \quad \text{atau} \quad \Gamma(p+1) \sim p^p e^{-p} \sqrt{2\pi p}. \quad (9.41)$$

Tanda ' \sim ' dibaca asimtot pada yang berarti bahwa hal tersebut adalah rasio

$$\frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}. \quad (9.42)$$

9.3 Fungsi Beta

Fungsi beta didefinisikan dengan integral tertentu menurut

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \quad p > 0, q > 0. \quad (9.43)$$

Ada sejumlah transformasi sederhana yang berguna untuk menyatakan fungsi beta yaitu

$$B(p, q) = \int_0^a \left(\frac{y}{a}\right)^{p-1} \left(1 - \frac{y}{a}\right)^{q-1} \frac{dy}{a} = \frac{1}{a^{p+q-1}} \int_0^a y^{p-1} (a-y)^{q-1} dy. \quad (9.44)$$

Berikutnya, untuk memperoleh bentuk trigonometri fungsi beta, kita dapat mengandaikan $x = \sin^2 \theta$, sehingga

$$dx = 2 \sin \theta \cos \theta d\theta, \quad (9.45)$$

dan

$$(1-x) = 1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta, \quad (9.46)$$

serta $x = 1$ sebanding dengan $\theta = \pi/2$.

Akhirnya fungsi beta dapat dituliskan menurut

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2p-1} (\cos \theta)^{2q-1} d\theta. \quad (9.47)$$

Apabila kita andaikan

$$x = \frac{y}{1+y}, \quad (9.48)$$

fungsi beta dapat dirumuskan menurut

$$B(p, q) = \int_0^\infty \frac{y^{p-1} dy}{(1+y)^{p+q}}. \quad (9.49)$$

Hubungan antara Fungsi Beta dan Gamma

Kita tidak akan mendapatkan tabel fungsi beta dalam suatu buku. Akan tetapi dengan mengetahui hubungan antara fungsi beta dengan fungsi Γ , kita dapat menghitung fungsi beta. Kita akan membuktikan bahwa

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \quad (9.50)$$

Kita mulai dengan menuliskan kembali

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1} e^{-t} dt, \quad (9.51)$$

dengan merubah $t = y^2$, diperoleh

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{2p-1} e^{-y^2} dy, \quad (9.52)$$

lalu apabila kita rubah $t = x^2$, diperoleh

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{2p-1} e^{-x^2} dx. \quad (9.53)$$

Kemudian kita kalikan dua persamaan baru yang kita peroleh ini yang akan kita tulis dalam koordinat polar, sehingga

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty x^{2q-1} y^{2p-1} e^{-(x^2+y^2)} dx dy, \quad (9.54)$$

$$= 4 \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} (r \cos \theta)^{2q-1} (r \sin \theta)^{2p-1} e^{-r^2} r dr d\theta, \quad (9.55)$$

$$= \int_0^\infty r^{2p+2q-1} dr \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{2q-1} (\sin \theta)^{2p-1} d\theta. \quad (9.56)$$

Bentuk integral ini akan sesuai dengan bentuk fungsi beta yang telah didefinisikan sebelumnya, yaitu

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4 \frac{1}{2} \Gamma(p+q) \frac{1}{2} B(p, q), \quad (9.57)$$

sehingga

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \quad (9.58)$$

Ayunan Sederhana

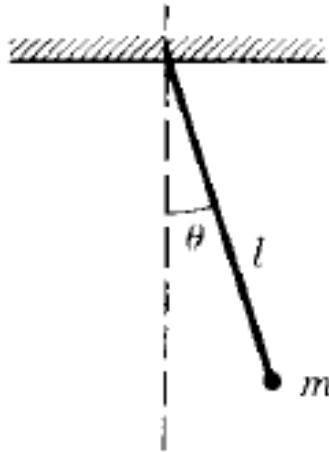
Sebuah bandul bermassa m digantungkan dengan tali tak bermassa dengan panjang l sehingga dapat berayun dalam bidang seperti ditunjukkan oleh gambar 9.1

Tenaga kinetik benda tersebut adalah

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m (l \dot{\theta})^2. \quad (9.59)$$

Jika tenaga potensial dianggap nol saat tali horisontal, maka tenaga potensial saat sudutnya θ adalah

$$V = -mgl \cos \theta. \quad (9.60)$$



Gambar 9.1: Transformasi Linier

Lalu, Lagrangian dapat dirumuskan menurut

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta, \quad (9.61)$$

dan persamaan Euler-Lagrange dituliskan menurut

$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\theta}) + mgl\sin\theta = 0 \quad (9.62)$$

$$l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0 \quad (9.63)$$

atau dapat ditulis pula

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta. \quad (9.64)$$

Apabila ayunan dilakukan hanya untuk sudut kecil, nilai $\sin\theta$ dapat didekati setara dengan nilai θ , sehingga

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta. \quad (9.65)$$

Jawaban umum persamaan ini adalah

$$\theta = A\sin\omega t + B\cos\omega t, \quad (9.66)$$

dengan

$$\omega = 2\pi\nu = \sqrt{g/l}, \quad (9.67)$$

sehingga periode geraknya adalah

$$T = \frac{1}{\nu} = 2\pi\sqrt{l/g}. \quad (9.68)$$

Berikutnya, kita akan meninjau jawaban untuk θ yang besar, yaitu ketika $\sin \theta$ tidak bisa lagi didekati dengan θ . Sekarang kita kembali lagi ke persamaan (9.64), kita kalikan kedua ruas dengan $\dot{\theta}$ dan diintegrasikan, sehingga diperoleh

$$\dot{\theta}\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta\dot{\theta}, \quad (9.69)$$

$$\dot{\theta}d\dot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta d\theta, \quad (9.70)$$

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{g}{l}\cos\theta + \text{konstanta}. \quad (9.71)$$

Coba kita kembali melihat ayunan sedikit lebih detail. Rentang ayunan adalah 180° yaitu bergerak dari -90° sampai $+90^\circ$. Untuk kasus ini tentu kita tahu bahwa $\dot{\theta} = 0$ untuk $\theta = 90^\circ$, sehingga konstanta pada persamaan (9.71) adalah nol, dan dapat ditulis

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{g}{l}\cos\theta, \quad (9.72)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\theta}, \quad (9.73)$$

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta}} = \sqrt{\frac{2g}{l}}dt. \quad (9.74)$$

Nilai θ dari 0 sampai 90° merupakan seperempat periode, lalu diperoleh

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta}} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \int_0^{T/4}, \quad (9.75)$$

$$= \sqrt{\frac{2g}{l}} \frac{T}{4}. \quad (9.76)$$

Sehingga periode ayunan adalah

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta}}. \quad (9.77)$$

Bentuk integral dalam persamaan ini adalah fungsi Beta yang dapat kita tulis lagi menurut

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1}\theta \cos^{2q-1}\theta d\theta, \quad (9.78)$$

dengan $p = 1/2$ dan $q = 1/4$, sehingga

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right). \quad (9.79)$$

9.4 Fungsi Error

Fungsi ini akan kita jumpai saat membahas teori peluang atau dalam mekanika statistik. Mungkin kita pernah mendengar *kurva normal*. Kurva tersebut adalah bentuk sabuk kurva

$$y = e^{-x^2}. \quad (9.80)$$

Fungsi error merupakan bagian area di bawah kurva tersebut. Fungsi error didefinisikan menurut

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt. \quad (9.81)$$

Meskipun ini merupakan definisi biasa dari fungsi error, terdapat beberapa bentuk integral yang mendekati fungsi ini dan sering digunakan dan sering ditabulasikan dan kadang-kadang juga didefinisikan sebagai fungsi error, yaitu

- Fungsi Gaussian atau Distribusi Normal

1.

$$P(-\infty, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right), \quad (9.82)$$

2.

$$P(0, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right). \quad (9.83)$$

- Fungsi Error Komplemen

1.

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt = 1 - \operatorname{erf}(x), \quad (9.84)$$

2.

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2/2} dt = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right). \quad (9.85)$$

Oleh karena distribusi normal sering ditabulasikan, sangat berguna untuk menuliskan fungsi error menurut

$$\operatorname{erf}(x) = 2P(0, x\sqrt{2}) = 2P(-\infty, x\sqrt{2}) - 1. \quad (9.86)$$

Berikutnya kita akan meninjau beberapa fakta terkait dengan fungsi error. Kita akan secara mudah membuktikan bahwa fungsi error adalah fungsi ganjil yaitu $\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x)$, lalu secara mudah kita dapat mengevaluasi fungsi $\operatorname{erf}(\infty)$ menurut

$$\operatorname{erf}(\infty) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2/2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} \sqrt{\pi} = 1. \quad (9.87)$$

Sedangkan untuk x yang sangat kecil, kita dapat memperluas fungsi error dalam bentuk deret menurut

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \left(1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \dots \right) dt, \quad (9.88)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \dots \right), \quad (9.89)$$

saat $|x| \ll 1$.

9.5 Integral dan Fungsi Eliptik

Ada beberapa kelompok integral dan hubungan fungsi yang sering dipelajari dan ditabulasi. Oleh karena hal itu muncul dalam berbagai permasalahan, mungkin ada baiknya kita mengetahui untuk bisa menggunakan tabel yang tersedia. Bagian ini akan sedikit membahas integral eliptik, lalu bisa melihat dan mengetahui beberapa transformasi ketika membutuhkannya.

Bentuk Legendre

Integral eliptik bentuk Legendre model pertama dan kedua adalah

$$F(k, \phi) = \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}, \quad (9.90)$$

dan

$$E(k, \phi) = \int_0^\phi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} d\phi, \quad (9.91)$$

dengan $0 \leq k \leq 1$, atau $k = \sin \theta$, dan $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

Integral eliptik Lengkap

Integral eliptik lengkap model pertama dan model kedua untuk $\phi = \pi/2$ didefinisikan menurut

$$K(k) = F(k, \frac{\pi}{2}) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}, \quad (9.92)$$

dan

$$E(k) = E(k, \frac{\pi}{2}) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} d\phi. \quad (9.93)$$

Bentuk Jacobi

Jika kita mengganti $\phi = 0$ pada integral eliptik bentuk Legendre, kita akan memperoleh integral eliptik bentuk Jacobi. Uraianya adalah

$$x = \sin \phi, \quad (9.94)$$

$$dx = \cos \phi d\phi, \quad (9.95)$$

atau

$$d\phi = \frac{dx}{\cos \phi} = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad (9.96)$$

dan $\phi = \pi/2$ sebanding dengan $x = 1$. Berikutnya jika kita substitusi ke bentuk Legendre, akan diperoleh

$$F(k, \phi) = \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}, \quad (9.97)$$

dan

$$E(k, \phi) = \int_0^\phi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} d\phi = \int_0^x \sqrt{\frac{1 - k^2 x^2}{1 - x^2}} dx, \quad (9.98)$$

sedangkan substitusi ke bentuk lengkap integral eliptik, diperoleh

$$K(k) = F(k, \frac{\pi}{2}) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}, \quad (9.99)$$

dan

$$E(k) = E(k, \frac{\pi}{2}) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k^2 x^2}{1 - x^2}} dx. \quad (9.100)$$

Contoh 9.5.1 Kita akan melanjutkan kasus ayunan sederhana sudut besar yang telah dibahas pada subbab sebelumnya. Kita tuliskan kembali rumusannya, yaitu

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l} \cos \theta + \text{konstanta}. \quad (9.101)$$

Kita menganggap $\dot{\theta} = 0$ pada $\theta = \pi/2$, sehingga konstanta sama dengan nol. Hal ini dilakukan jika ayunan dilakukan dengan rentang 180° .

Sekarang kita akan meninjau untuk amplitudo tertentu, misalkan α , sehingga $\dot{\theta} = 0$ pada $\theta = \alpha$, dan diperoleh

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l} (\cos \theta - \cos \alpha) \quad (9.102)$$

Persaman ini dapat dijawab menggunakan integral eliptik (lihat buku Boas). ■

Bagian III

10	Deret Fourier	175
10.1	Fungsi Periodik	
10.2	Koefisien Fourier	
10.3	Deret Fourier Bentuk Kompleks	
10.4	Interval lain	
10.5	Fungsi Ganjil dan Genap	
11	Jawaban Deret Persamaan Diferensial	187
11.1	Persamaan Legendre	
11.2	Persamaan Bessel	
12	Persamaan Diferensial Parsial	197
12.1	Persamaan Laplace: Suhu Keadaan Tunak	
12.2	Persamaan Difusi	
12.3	Persamaan Gelombang	
13	Transformasi Koordinat dan Pengenalan Tensor	209
13.1	Pendahuluan	
13.2	Transformasi Linier	
13.3	Transformasi Ortogonal	
13.4	Swanilai dan Swavektor	
13.5	Diagonalisasi Matriks	
13.6	Penerapan Diagonalisasi	
13.7	Koordinat Lengkung	
13.8	Operator Vektor dalam Koordinat Lengkung	
13.9	Tensor	
	Index	221

10. Deret Fourier

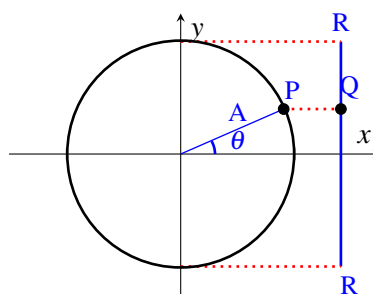
Masalah yang memuat getaran atau osilasi sering terjadi dalam fisika. Kita telah mendiskusikan deret pangkat untuk pendekatan fungsi kompleks pada bab sebelumnya. Dalam beberapa kasus, deret sering diangkat dalam deret pangkat, dan deret pangkat yang mengandung suku sinus-cosinus jauh lebih bermanfaat dibandingkan deret pangkat biasa. Bab ini akan membahas bagaimana menemukan dan menggunakan deret Fourier.

10.1 Fungsi Periodik

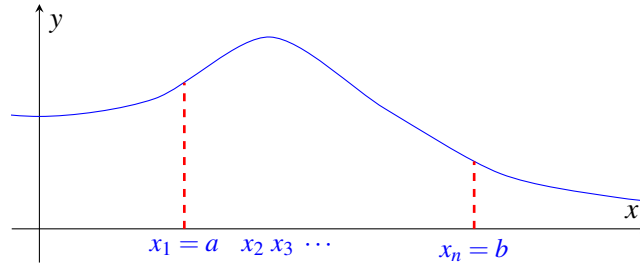
Kita membutuhkan banyak penggunaan notasi dan terminologi dalam mempelajari gerak harmonik sederhana dan gerak gelombang. Mari mendiskusikan singkat hal tersebut.

Andaikan partikel P (gambar 10.1) bergerak dengan kelajuan konstan mengelilingi lingkaran dengan radius A . Pada waktu yang sama, andaikan partikel Q bergerak ke atas dan ke bawah sepanjang garis lurus RS sedemikian rupa sehingga koordinat p untuk P dan Q selalu sama. Jika ω adalah kecepatan sudut P dalam radian perdetik, dan $\theta = 0$ ketika $t = 0$, lalu pada waktu berikutnya berlaku

$$\theta = \omega t. \quad (10.1)$$



Gambar 10.1: Proyeksi Gerak Harmonik Sederhana



Gambar 10.2: Contoh ilustrasi rata-rata fungsi

Koordinat y untuk Q yang selalu memiliki posisi yang sama dengan P , sehingga berlaku

$$y = A \sin \theta = A \sin \omega t. \quad (10.2)$$

Gerak Q disebut *Gerak Harmonik Sederhana*. Menurut definisi, gerak suatu benda disebut gerak harmonik sederhana jika perpindahannya dari kesetimbangan dapat ditulis sebagai $A \sin \omega t$.

Koordinat x dan y untuk partikel P (masih pada gambar (7.101)) adalah

$$x = A \sin \omega t, \quad (10.3)$$

$$y = A \sin \omega t. \quad (10.4)$$

Jika P dianggap sebagai sebuah titik $z = x + iy$ dalam bidang argan, kita dapat mendeskripsikan P dalam sebuah persamaan menurut

$$z = x + iy, \quad (10.5)$$

$$= A(\cos \omega t + i \sin \omega t), \quad (10.6)$$

$$= Ae^{i\omega t}. \quad (10.7)$$

Sering kali, notasi seperti ini juga diperlukan untuk menyatakan Q . Kita tahu bahwa posisi partikel Q merupakan komponen imajiner dari z . Apabila kita menghitung kecepatan Q juga dapat kita nyatakan sebagai komponen imajiner dari turunan z , yaitu

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}(Ae^{i\omega t}) = Ai\omega e^{i\omega t} = Ai\omega(\cos \omega t + i \sin \omega t). \quad (10.8)$$

Konsep rata-rata nilai suatu fungsi sangat berguna. Konsep ini akan kita pelajari melalui sebuah pertanyaan kecil. Bagaimana menemukan rata-rata suatu himpunan bilangan? Tentu sangat mudah, kita jumlahkan bilangan-bilangan tersebut, lalu kita bagi dengan jumlah bilangan tersebut. Berangkat dari proses ini, kita akan melakukan pendekatan untuk menghitung rata-rata suatu fungsi $f(x)$ pada interval (a, b) , lalu mencari rata-rata jumlah nilai $f(x)$ (ilustrasi gambar 10.2). Rata-rata fungsi dirumuskan menurut

$$\bar{f}(x) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}, \quad (10.9)$$

dengan $\bar{f}(x)$ merupakan rata-rata fungsi. Pendekatan ini akan memiliki hasil yang semakin bagus jika n semakin banyak. Apabila jarak antar elemen x_1, x_2, \dots adalah Δx , Lalu, pembilang dan penyebut dikalikan dengan Δx ini, akan diperoleh

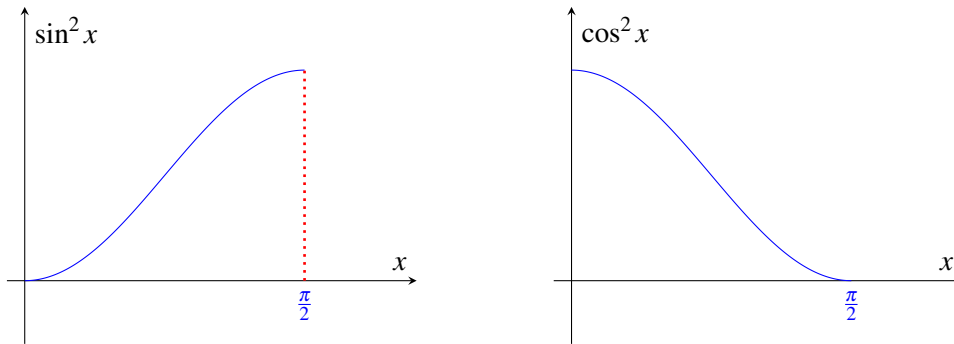
$$\bar{f}(x) = \frac{[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]\Delta x}{n\Delta x}. \quad (10.10)$$

Nilai $n\Delta x = b - a$. Apabila $\Delta x \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, sehingga pada limit ini notasi jumlah dapat diganti dengan integral, sehingga

$$\bar{f}(x) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}. \quad (10.11)$$

Nilai rata-rata suatu fungsi dalam beberapa terapan dapat bernilai nol. Contohnya adalah rata-rata fungsi sinus dalam satu periode adalah nol. Kecepatan rata-rata gerak harmonik sederhana dalam satu periode sama dengan nol. Dalam kasus semacam ini rata-rata kuadrat suatu fungsi juga menarik. Contohnya dalam aliran arus pada kawat rangkaian AC digambarkan dengan fungsi sinus, akar kuadrat rata-rata kuadrat sinusnya diketahui sebagai akar rata-rata kuadrat atau nilai arus efektif.

Berikutnya, kita akan sedikit lebih jauh meninjau rata-rata kuadrat suatu fungsi. Rata-rata kuadrat fungsi sinus ($\sin^2 x$) dan rata-rata kuadrat fungsi cosinus ($\cos^2 x$) adalah sama. Hal ini dapat dilihat dengan mudah melalui penggambaran grafik seperti gambar 10.3. $\frac{1}{4}$



Gambar 10.3: Rata-rata fungsi $\sin^2 x$ dan $\cos^2 x$

Nilai rata-rata yang sama tersebut dapat dituliskan menurut

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx. \quad (10.12)$$

Untuk sembarang frekuensi juga dapat dirumuskan menurut

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx. \quad (10.13)$$

Akan tetapi pada lain sisi, dengan menggunakan hubungan $\sin^2 nx + \cos^2 nx = 1$, kita dapat menghitung bahwa

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\sin^2 nx + \cos^2 nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi. \quad (10.14)$$

Oleh karena itu, tentu kita dapat menyimpulkan bahwa

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi. \quad (10.15)$$

Akhir kita dapat menuliskan bahwa nilai rata-rata dalam satu periode akan berlaku

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \frac{1}{2}. \quad (10.16)$$

10.2 Koefisien Fourier

Kita akan memperluas suatu fungsi periodik yang diberikan dalam fungsi sinus dan cosinus. Kita akan memulai hal ini untuk dengan periode 2π (untuk mempermudah pembahasan terlebih dahulu).

Suatu fungsi $f(x)$ dengan periode 2π dapat dirumuskan menurut

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \cdots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots, \quad (10.17)$$

dengan koefisien-koefisien a_n dan b_n merupakan faktor yang harus dicari.

Berikutnya, untuk mencari a_n dan b_n kita memerlukan nilai rata-rata fungsi di bawah ini:

Rata-rata nilai $\sin mx \cos nx$ (dalam satu periode)

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0, \quad (10.18)$$

Rata-rata nilai $\sin mx \sin nx$ (dalam satu periode)

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1/2, & m = n \neq 0 \\ 0, & m = n = 0 \end{cases} \quad (10.19)$$

Rata-rata nilai $\cos mx \cos nx$ (dalam satu periode)

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1/2, & m = n \neq 0, \\ 1, & m = n = 0. \end{cases} \quad (10.20)$$

Kita telah menunjukkan bahwa rata-rata fungsi $\sin^2 nx$ dan $\cos^2 nx$ adalah $\frac{1}{2}$. Berikutnya, kita akan membuktikan beberapa rata-rata fungsi lain terkait sinus dan cosinus. Cara termudah adalah dengan menyatakan fungsi sinus tersebut dalam bentuk kompleks. Kita akan menunjukkan salah satunya, yaitu

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{imx} - e^{-imx}}{2i} \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} dx. \quad (10.21)$$

Kita dapat melihat hasilnya tanpa mengalikan semua yang ada dalam integral. Semua suku di dalam integral memuat bentuk e^{ikx} dengan k bilangan bulat tidak nol. Kita dapat membuktikan bahwa integral suku-suku tersebut adalah nol menurut

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} dx = \frac{e^{ikx}}{ik} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{ik\pi} - e^{-ik\pi}}{ik} = 0. \quad (10.22)$$

Bentuk-bentuk integral lain dari persamaan (10.18) sampai (10.20) dapat dibuktikan dengan cara yang sama.

Sekarang kita akan menunjukkan bagaimana menemukan a_n dan b_n . Untuk memperoleh a_0 , kita akan mencari nilai rata-rata untuk masing-masing suku yang dapat dirumuskan menurut

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx + a_1 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx \quad (10.23)$$

$$+ a_2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x dx + \dots \quad (10.24)$$

$$+ b_1 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx + \dots \quad (10.25)$$

Nilai semua integral pada ruas kanan adalah nol, kecuali suku pertama, sehingga

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx = \frac{a_0}{2}, \quad (10.26)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx. \quad (10.27)$$

Jika diberikan $f(x)$ yang diperluas dalam deret Fourier, kita dapat mencari a_0 dengan menghitung integral persamaan (10.27).

Untuk mencari a_1 , kita mengalikan kedua sisi persamaan (10.17) dengan $\cos x$ lalu mencari nilai rata-rata fungsinya menurut

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x dx = \frac{a_0}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx + a_1 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx \quad (10.28)$$

$$+ a_2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x \cos x dx + \dots \quad (10.29)$$

$$+ b_1 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x dx + \dots \quad (10.30)$$

Kita dapat melihat bahwa suku ruas kanan bernilai nol, kecuali suku kedua, sehingga

$$\frac{a_1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx = a_1/2 \quad (10.31)$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x dx. \quad (10.32)$$

Metode yang digunakan untuk mencari a_0 dan a_1 semestinya dapat dipahami dengan baik. Berikutnya dengan metode yang sepadan, kita dapat mencari nilai a_n . Perkalian kedua sisi persamaan (10.17) dengan $\cos nx$, kemudian dicari rata-ratanya, akan memunculkan bentuk persamaan di bawah ini, yaitu

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx = \frac{a_0}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cos nxdx \quad (10.33)$$

$$+ a_1 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cos nxdx \quad (10.34)$$

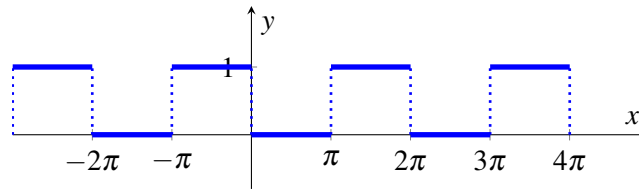
$$+ a_2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x \cos nxdx + \dots \quad (10.35)$$

$$+ b_1 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos nxdx + \dots \quad (10.36)$$

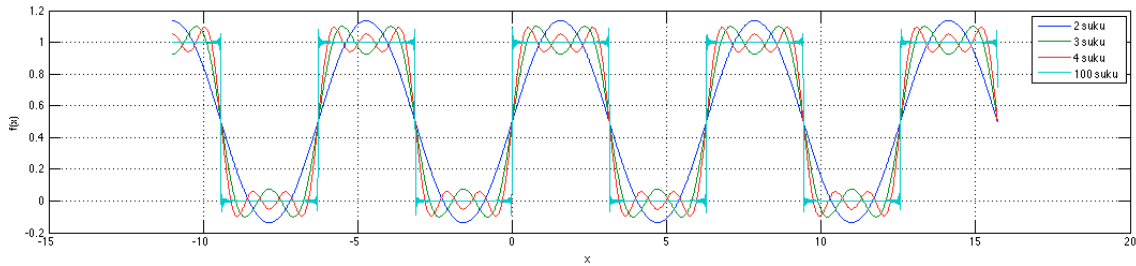
Nilai semua suku ruas kanan akan sama dengan nol, kecuali

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nxdx = 1/2, \quad (10.37)$$

sehingga kita dapat merumuskan bahwa



Gambar 10.4: Penggambaran persamaan (10.40)



Gambar 10.5: Penggambaran jawaban (10.41) untuk berbagai suku

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx. \quad (10.38)$$

Apabila metode yang sama digunakan untuk mencari b_n , tentu kita akan memperoleh bahwa

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx. \quad (10.39)$$

Problem 10.1 Dalam masalah berikut, akan diberikan fungsi pada interval $-\pi < x < \pi$. Gambarlah beberapa periode fungsi tersebut, carilah koefisien-koefisien yang terkait, dan tuliskanlah fungsi $f(x)$ umumnya!

1.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x < 0 \\ 0, & 0 < x < \pi \end{cases} \quad (10.40)$$

Penggambaran kasus ini diilustrasikan pada gambar 10.4. Jawaban untuk kasus ini adalah

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} \right) \quad (10.41)$$

Penggambaran jawaban persamaan (10.41) ditunjukkan pada gambar 10.5.

2.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases} \quad (10.42)$$

3.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \quad \text{dan} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & -\frac{\pi}{2} < x < 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases} \quad (10.43)$$

4.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases} \quad (10.44)$$

5.

$$f(x) = \begin{cases} x + \pi, & -\pi < x < 0 \\ -x, & 0 < x < \pi \end{cases} \quad (10.45)$$

10.3 Deret Fourier Bentuk Kompleks

Fungsi sinus dan cosinus dapat dinyatakan dalam bentuk kompleks eksponensial menurut

$$\sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}, \quad (10.46)$$

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}. \quad (10.47)$$

Jika kita mensubstitusikan persamaan (10.46) dan (10.47) ke dalam persamaan (10.17), kita akan mendapatkan suku-suku deret dalam bentuk e^{inx} dan e^{-inx} . Bentuk ini merupakan Deret Fourier bentuk kompleks.

Berikutnya kita akan mencari bagaimana nilai koefisien dalam bentuk kompleks. Deret Fourier ini dapat dituliskan menurut

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0 + c_1 e^{ix} + c_{-1} e^{-ix} + c_2 e^{i2x} + c_{-2} e^{-i2x} + \dots \\ &= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{inx}. \end{aligned} \quad (10.48)$$

Koefisien dalam fungsi $f(x)$ di atas dinyatakan dengan c_n dan n merupakan bilangan bulat bukan nol. Berikutnya, c_n dapat dicari dengan menemukan nilai rata-rata fungsi tersebut. Kita mulai dengan mencari c_0 , yaitu dengan menghitung nilai rata-rata fungsi persamaan (10.48) menurut

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = c_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \dots \quad (10.49)$$

$$= c_0 + 0 \quad (10.50)$$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx. \quad (10.51)$$

Berikutnya, untuk mencari c_n , persamaan (10.48) dikalikan dengan e^{-inx} , lalu nilai rata-rata fungsinya dicari. Uraianya adalah

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx &= c_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} dx + c_1 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} e^{ix} dx \\ &\quad + c_{-1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} e^{-ix} dx + \dots \end{aligned} \quad (10.52)$$

Suku ruas kanan yang mengandung bentuk eksponensial e^{ikx} akan bernilai nol (k merupakan sembarang bilangan bulat), sehingga nilai rata-rata fungsi tersebut dapat ditulis menurut

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = c_n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} e^{inx} dx, \quad (10.53)$$

$$= c_n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx, \quad (10.54)$$

$$= c_n, \quad (10.55)$$

atau dapat dituliskan bahwa nilai c_n yang kita peroleh adalah

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx. \quad (10.56)$$

Problem 10.2 Gambarkan beberapa periode untuk fungsi $f(x)$ dengan periode 2π dari

$$f(x) = x, \quad -\pi < x < \pi. \quad (10.57)$$

Ekspansikan fungsi tersebut dalam deret Fourier sinus-cosinus dan dalam bentuk kompleks!

10.4 Interval lain

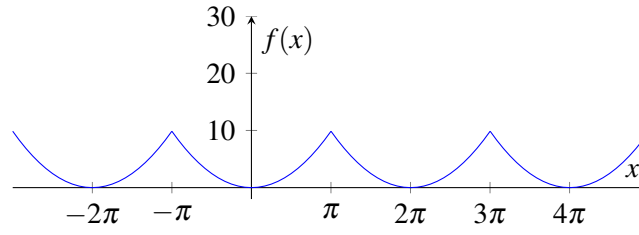
Fungsi $\sin x$, $\cos x$, dan e^{ix} yang telah kita bahas memiliki periode 2π . Kita telah membahas rentang $(-\pi, \pi)$ sebagai interval dasar dari panjang interval 2π . Apabila diberikan $f(x)$ pada $(-\pi, \pi)$, hal yang pertama kita lakukan adalah menggambar fungsi yang diberikan dalam interval dasar tersebut, berikutnya mengulangi langkah ini untuk interval lain $(\pi, 3\pi)$, $(3\pi, 5\pi)$, $(-3\pi, -\pi)$ dan seterusnya. Kita dapat melihat bahwa terdapat banyak interval dengan panjang 2π , yang dapat kita gunakan sebagai interval dasar. Jika diberikan suatu fungsi $f(x)$ pada suatu interval dasar tertentu, misalnya $(0, 2\pi)$, kita dapat menggambar $f(x)$ untuk interval dasar tersebut dan mengulangi menggambar untuk interval dengan periode yang sama yaitu 2π . Kita akan mengulas lagi koefisien Fourier yang harus dicari. Apabila periode tidak berubah, rumusan koefisien yang telah diuraikan juga tidak berubah. Misal: rentang yang digunakan dalam penguraian deret Fourier adalah dari $-\pi$ sampai π . Apabila rentang ini digeser dari 0 sampai 2π , hal ini tidak akan merubah rumusan, dan koefisien tersebut dapat dituliskan menurut

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx, \quad (10.58)$$

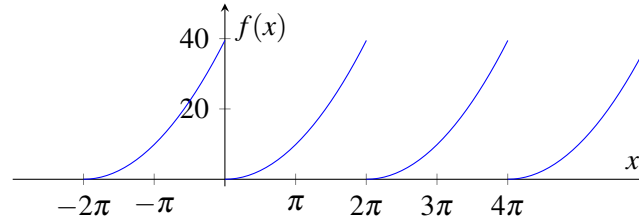
$$b_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx, \quad (10.59)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx. \quad (10.60)$$

Ketika menggambar grafik fungsi perhatikanlah interval dasar fungsi $f(x)$ yang sedang dibahas. Contohnya, apabila diberikan fungsi $f(x) = x^2$ pada interval (π, π) (gambar 10.6), akan sangat berbeda dengan fungsi $f(x) = x^2$ pada interval $(0, 2\pi)$ (gambar 10.7). Masalah fisika sering kali muncul dengan panjang interval tidak 2π . Andaikan rentang interval tidak lagi 2π , sebut saja rentang tersebut $2l$, Misalkan dari $(-l, l)$ atau $(0, 2l)$. Tentu fungsi $\sin(n\pi x/l)$, $\cos(n\pi x/l)$, dan $e^{in\pi x/l}$ memiliki periode $2l$. Sehingga, untuk periode $2l$, Deret Fourier persamaan (10.17) dapat dirumuskan menurut



Gambar 10.6: Ekspansi $f(x) = x^2$ pada interval $(-\pi, \pi)$.



Gambar 10.7: Ekspansi $f(x) = x^2$ pada interval $(0, 2\pi)$.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{\pi x}{l} + a_2 \cos \frac{2\pi x}{l} + \dots \quad (10.61)$$

$$+ b_1 \sin \frac{\pi x}{l} + b_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots \quad (10.62)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \quad (10.63)$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx/l}. \quad (10.64)$$

Berikutnya kita akan mencari a_n , b_n , dan c_n untuk deret yang baru ini. Oleh karena periode yang baru $2l$ kita akan mengganti suku

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rightarrow \frac{1}{2l} \int_{-l}^l. \quad (10.65)$$

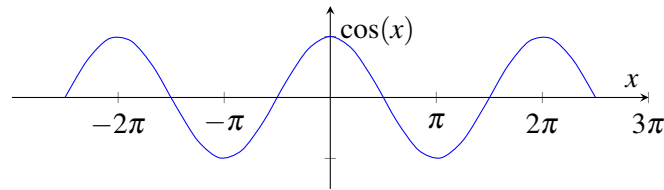
Analog dengan cara sebelumnya, untuk periode $2l$ kita akan mendapatkan

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad (10.66)$$

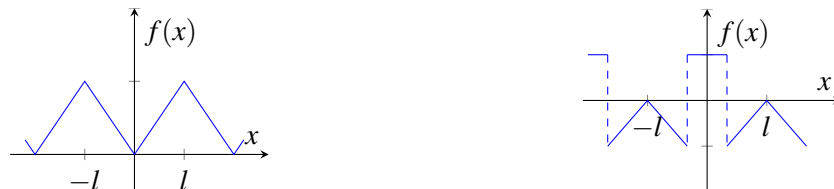
$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad (10.67)$$

$$c_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) e^{-in\pi x/l} dx. \quad (10.68)$$

Problem 10.3 Dalam masalah berikut, akan diberikan fungsi pada interval yang disebutkan. Gambarlah beberapa periode fungsi tersebut, carilah koefisien-koefisien yang terkait, dan tuliskanlah fungsi $f(x)$ umumnya!



Gambar 10.8: Fungsi Cosinus



Gambar 10.9: Contoh lain fungsi genap

1.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ 1, & 0 < x < 3 \end{cases} \quad (10.69)$$

2.

$$f(x) = x^2, \quad 0 < x < 10 \quad (10.70)$$

10.5 Fungsi Ganjil dan Genap

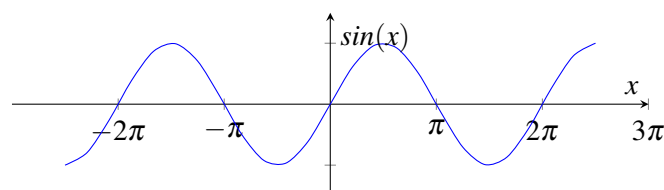
Nilai beberapa fungsi dapat kita prediksi dengan melihat bentuk grafiknya. Perhatikanlah gambar 10.8. Kita melihat bahwa nilai fungsi $f(x)$ dari $x = 0$ ke kanan sama dengan nilai $f(x)$ ke kiri. Kita akan memfokuskan untuk fungsi fungsi semacam ini. Selebihnya

$$f(x) \text{ merupakan fungsi genap jika } f(-x) = f(x).$$

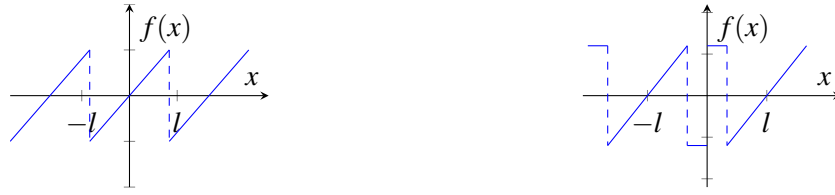
Contoh lain dapat dilihat pada gambar 10.9.

Sementara, bentuk selain yang disebutkan di atas, terdapat pula $f(-x) = -f(x)$ yang disebut fungsi ganjil yang diilustrasikan menurut gambar 10.10.

$$f(x) \text{ merupakan fungsi ganjil jika } f(-x) = -f(x).$$



Gambar 10.10: Fungsi sinus ganjil

**Gambar 10.11:** Contoh lain fungsi ganjil

Contoh fungsi ganjil dapat dilihat pada gambar 10.11.

Rumusan koefisien dalam fungsi ganjil dan fungsi genap dapat disederhanakan. Pertama kita akan mencari untuk fungsi $f(x)$ ganjil. Oleh karena $\sin n\pi x/l$ ganjil, $f(x) \sin n\pi x/l$ genap dan $f(x) \cos n\pi x/l$ ganjil. Kemudian a_n yang merupakan integral simetri $(-l, l)$ suatu fungsi ganjil $f(x) \cos n\pi x/l$ akan bernilai nol. Akan tetapi b_n yang merupakan simetri akan bernilai 2 kali dalam batas $(0, l)$, sehingga

Jika $f(x)$ adalah fungsi ganjil

$$\begin{cases} b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\ a_n = 0 \end{cases} \quad (10.71)$$

Analog dengan perolehan koefisien pada fungsi ganjil, untuk fungsi genap, nilai b_n akan sama dengan nol, sementara a_n akan bernilai dua kali untuk $(0, l)$, sehingga

Jika $f(x)$ adalah fungsi genap

$$\begin{cases} a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \\ b_n = 0 \end{cases} \quad (10.72)$$

Problem 10.4 1. Fungsi genap atau ganjilkah atau bukan keduanya dari fungsi-fungsi di bawah ini? Tulis dan gambarkan fungsi-fungsi tersebut!

- (a) e^{inx}
- (b) xe^x
- (c) $1 + e^x$

2. Fungsi-fungsi di bawah ini diberikan dalam satu periode. Untuk masing-masing fungsi, gambarlah beberapa periode dan putuskanlah fungsi tersebut termasuk fungsi ganjil atau genap! Lalu, ekspansikan fungsi tersebut dalam deret Fourier

(a)

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases} \quad (10.73)$$

(b)

$$f(x) = x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \quad (10.74)$$

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 < x < 0 \\ x-1, & 0 < x < 1 \end{cases} \quad (10.75)$$



11. Jawaban Deret Persamaan Diferensial

Masalah fisika yang lebih kompleks dalam berbagai bidang akan membawa kita ke persamaan diferensial yang harus dijawab. Beberapa kasus dapat dijawab dengan metode dasar yang telah dibahas terdahulu. Akan tetapi, apabila metode dasar tersebut tidak dapat diterapkan, mungkin kita perlu membawa permasalahan ini dalam jawaban deret. Mari kita ilustrasikan dulu metode deret untuk menjawab persamaan sederhana. Misalkan persamaan tersebut adalah

$$y' = 2xy. \quad (11.1)$$

Kita akan menganggap jawaban persamaan diferensial ini berupa deret pangkat, misalnya

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n, \end{aligned} \quad (11.2)$$

dengan a_n adalah suatu variabel yang harus dicari. Apabila persamaan ini diturunkan, akan diperoleh

$$\begin{aligned} y' &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots, \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}. \end{aligned} \quad (11.3)$$

Apabila persamaan (11.2) dan (11.3) disubstitusikan ke persamaan (11.1), kita akan memiliki persamaan deret pangkat. Andaikan persamaan diferensial tersebut terpenuhi untuk semua x , yaitu y' dan $2xy$ merupakan fungsi x , dan oleh karena fungsi yang diberikan hanya memiliki satu perluasan deret dalam pangkat x , dua deret tersebut, baik ruas kanan maupun ruas kiri harus identik. Koefisien dengan pangkat x yang sama harus memiliki nilai yang sama. Kita akan mendapatkan a_n pada persamaan tersebut, masing-masing

$$a_1 = 0, \quad a_2 = a_0, \quad a_3 = \frac{2}{3}a_1 = 0, \quad a_4 = \frac{1}{2}a_0, \quad (11.4)$$

atau secara umum

$$na_n = 2a_{n-2}, \quad a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ ganjil,} \\ \frac{2}{n}a_{n-2} & n \text{ genap.} \end{cases} \quad (11.5)$$

Apabila kita memberi pengandaian bahwa $n = 2m$, akan diperoleh

$$a_{2m} = \frac{2}{2m}a_{2m-2} \quad (11.6)$$

$$= \frac{1}{m}a_{2m-2} \quad (11.7)$$

$$= \frac{1}{m} \frac{1}{m-1}a_{2m-4} \quad (11.8)$$

$$= \dots \quad (11.9)$$

$$= \frac{1}{m!}a_0. \quad (11.10)$$

Substitusi nilai koefisien ini ke persamaan (11.2), akan diperoleh

$$y = a_0 + a_0x^2 + \frac{1}{2!}a_0x^4 + \dots + \frac{1}{m!}a_0x^{2m} + \dots, \quad (11.11)$$

$$= a_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{m!}. \quad (11.12)$$

Sekarang, kita coba membandingkan hasil ini dengan metode klasik di bawah ini, yaitu

$$\frac{dy}{y} = 2xdx, \quad (11.13)$$

$$\ln y = x^2 + \ln c, \quad (11.14)$$

$$y = ce^{x^2}. \quad (11.15)$$

Apabila hasil ini diperluas dalam deret pangkat untuk eksponensial x^2 akan diperoleh

$$y = c \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \dots \right), \quad (11.16)$$

$$= c \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{m!}. \quad (11.17)$$

Andaikan kita anggap $c = a_0$, maka jawaban ini akan sesuai dengan jawaban persamaan (11.12).

Problem 11.1 Kerjakanlah soal-soal berikut!

1. Jawablah persamaan diferensial berikut menggunakan deret pangkat dan dengan cara dasar!

(a) $xy' = xy + y$

(b) $y' = 3x^2y$

(c) $y'' + y = 4 \sin x$

2. Selesaikanlah persamaan diferensial berikut dengan menggunakan deret pangkat

(a) $y'' - x^2y' - xy = 0$

(b) $y'' + xy' + y = 0$

11.1 Persamaan Legendre

Persamaan diferensial Legendre dirumuskan menurut

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0 \quad (11.18)$$

dengan l suatu konstanta. Jawaban ini akan muncul dalam persamaan diferensial parsial pada koordinat bola dan dalam masalah-masalah fisika lain dengan koordinat bola.

Meskipun jawaban yang paling berguna dari persamaan ini adalah polinomial (lebih jauh akan disebut polinomial Legendre), alangkah baiknya, sebagai awalan, kita akan mencari jawaban persamaan ini dengan menganggap sebagai jawaban deret suatu persamaan diferensial. Jawaban deret yang akan diuraikan analog dengan pendahuluan sebelumnya, untuk itu y , y' , dan y'' dalam deret dituliskan menurut

$$\begin{cases} y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots \\ y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots \\ y'' = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \cdots \end{cases} \quad (11.19)$$

Berikutnya, persamaan (11.19) disubstitusikan ke persamaan (11.18), lalu koefisien-koefisien dikumpulkan menurut orde pangkat, dan ditabulasikan menurut

	c	x	x^2	$\cdots x^n \cdots$
y''	$2a_2$	$6a_3$	$12a_4$	$(n+2)(n+1)a_{n-2}$
$-x^2y''$			$-2a_2$	$-n(n-1)a_n$
$-2xy'$		$-2a_1$	$-4a_2$	$-2na_n$
$l(l+1)y$	$l(l+1)a_0$	$l(l+1)a_1$	$l(l+1)a_2$	$l(l+1)a_n$

Jumlah koefisien masing-masing orde pangkat harus sama dengan nol, karena persamaan ini sama dengan nol. Untuk beberapa orde pangkat awal diperoleh

$$2a_2 + l(l+1)a_0 = 0 \quad \text{atau} \quad a_2 = -\frac{l(l+1)}{2}a_0, \quad (11.20)$$

$$6a_3 + (l+1-2)a_1 = 0 \quad \text{atau} \quad a_3 = -\frac{(l-1)(l+2)}{6}a_1, \quad (11.21)$$

$$6a_4 + (l+1-6)a_2 = 0 \quad \text{atau} \quad a_4 = -\frac{(l-2)(l+3)}{12}a_2, \quad (11.22)$$

$$= \frac{l(l+1)(l-2)(l+3)}{4!}a_0, \quad (11.23)$$

dan untuk orde x^n diperoleh

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (l^2 + l - n^2 - n)a_n = 0. \quad (11.24)$$

Koefisien a_n tersebut dapat difaktorkan, sehingga

$$l^2 - n^2 + l - n = (l+n)(l-n) + (l-n) = (l-n)(l+n+1). \quad (11.25)$$

Berikutnya kita dapat menuliskan rumusan umum untuk a_{n+2} yang dinyatakan dalam suku a_n . Berdasarkan penguraian sebelumnya kita dapat menemukan bahwa koefisien genap merupakan perkalian dari a_0 , dan koefisien ganjil merupakan perkalian dari a_1 . Jawaban bagi persamaan (11.24) dapat dituliskan menurut

$$a_{n+2} = -\frac{(l-n)(l+n+1)}{(n+2)(n+1)}a_n. \quad (11.26)$$

Jawaban umum bagi persamaan (11.18) adalah jumlah deret yang mengandung koefisien a_0 dan a_1 yang dapat ditentukan sesuai dengan nilai awal yang diberikan. Jawaban tersebut dirumuskan menurut

$$y = a_0 \left[1 - \frac{l(l+1)}{2!}x^2 + \frac{l(l+1)(l-2)(l+3)}{4!}x^4 - \dots \right] + a_1 \left[x - \frac{(l-1)(l+2)}{3!}x^3 + \frac{(l-1)(l+2)(l-3)(l+4)}{5!}x^5 - \dots \right]. \quad (11.27)$$

Berdasarkan persamaan (11.27), kita dapat melihat bahwa deret ini konvergen untuk $x^2 < 1$. Ini dapat ditunjukkan bahwa secara umum deret ini tidak konvergen untuk $x = 1$. Sebagai contoh, kita lihat a_1 saat $l = 0$. Jika $x^2 = 1$, deret ini $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots$, merupakan deret harmonik yang divergen. Dalam beberapa aplikasi variabel x merupakan cosinus suatu sudut θ , dan l merupakan bilangan bulat tak negatif. Kita akan melihat jawaban yang konvergen untuk semua θ , yaitu jawaban yang konvergen pada $x = \pm 1$ sebaik $|x| < 1$. Kita selalu dapat menemukan satu (tidak bisa dua) jawaban semacam itu untuk integral l .

Polinomial Legendre

Polinomial merupakan suatu ekspresi panjang berhingga dari suatu variabel dan konstanta yang hanya mengandung operasi penjumlahan, pengurangan, pembagian, perkalian, dan eksponensial bilangan bulat tak negatif.

Kita telah melihat bahwa untuk $l = 0$, deret a_1 persamaan (11.27) divergen. Tetapi pada deret a_0 , hanya memberikan $y = 0$ untuk $l = 0$ karena suku-suku yang lain mengandung l . Jika kita pilih $l = 1$, a_0 akan memberikan deret divergen pada $x^2 = 1$, dan deret a_1 akan terhenti pada $y = a_1x$. Untuk sembarang l , satu deret dibuang yang menghasilkan polinomial, dan yang lainnya terhenti pada $x^2 = 1$. Berangkat dari sini kita memperoleh jawaban polinomial dari persamaan Legendre, masing-masing satu untuk integral l tidak negatif. Masing-masing jawaban mengandung sembarang faktor konstanta a_0 atau a_1 , untuk $l = 0$, $y = a_0$, untuk $l = 1$, $y = a_1x$ dan seterusnya. Jika a_0 atau a_1 dalam polinomial dipilih sedemikian rupa sehingga $y = 1$ untuk $x = 1$, hasil polinomial disebut **Polinomial Legendre**, yang ditulis $P_l(x)$. Berdasarkan persamaan (11.27), $P_l(1) = 1$. Kita akan melihat beberapa Polinomial Legendre awal, yaitu

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}3x^2 - 1 \quad (11.28)$$

kita dapat melanjutkan mencari polinomial Legendre dengan metode ini, tetapi mungkin akan lebih mudah menggunakan metode lain yang akan diuraikan. Meskipun $P_l(x)$ untuk integral l dapat ditemukan dengan metode ini, cara termudah menemukan polinomial Legendre adalah dengan melihat tabel yang akan diuraikan pada subbab berikutnya.

Problem 11.2 Kerjakanlah soal-soal berikut:

1. Carilah $P_2(x)$, $P_3(x)$, dan $P_4(x)$!
2. Tunjukkanlah bahwa $P_l(-1) = (-1)^l$!

11.1.1 Aturan Leibniz' untuk Hasil Diferensial

Marilah kita melantur sejenak untuk menyinggung metode yang sangat berguna untuk menemukan metode bagi hasil turunan dengan orde tinggi. Hal ini akan kita ilustrasikan dengan contoh berikut.

Contoh 11.1.1 Carilah $(d^9/dx^9)(x \sin x)$.

Kita seharusnya, tentu, menghitung sembilan kali turunan, tetapi ini membutuhkan kerja yang lebih banyak. Aturan Leibniz mengatakan bahwa jawabannya adalah

$$x \frac{d^9}{dx^9}(\sin x) + 9 \frac{d}{dx}(x) \frac{d^8}{dx^8}(\sin x) + \frac{9 \cdot 8}{2!} \frac{d^2}{dx^2}(x) \frac{d^7}{dx^7}(\sin x) + \dots \quad (11.29)$$

Hal ini mengingatkan kita pada ekspansi binomial

$$(a+b)^9 = a^9 b^0 + 9ab^8 + \frac{9 \cdot 8}{2!} a^2 b^7 + \dots \quad (11.30)$$

Koefisien dalam persamaan (11.29) merupakan koefisien binomial, dan jumlah orde dua turunan masing-masing suku adalah 9. Dalam contoh tersebut turunan yang mengandung $(d^2/dx^2)(x) = 0$ dan orde yang lebih tinggi. Sehingga kita memperoleh

$$\frac{d^9}{dx^9}(x \sin x) = x \frac{d^9}{dx^9}(\sin x) + 9 \frac{d^8}{dx^8}(\sin x) \quad (11.31)$$

$$x \cos x + 9 \sin x \quad (11.32)$$

■

Problem 11.3 Kerjakanlah soal-soal berikut:

1. Carilah rumusan untuk $(d^n/dx^n)(uv)$ menggunakan aturan Leibniz'
2. Carilah $(d^6/dx^6)(x^2 \sin x)$

11.1.2 Rumusan Rodrigues

Kita telah memperoleh Plinomial Legendre sebagai jawaban persamaan Legendre untuk integral l . Ada cara lain untuk memperoleh polinomial tersebut yaitu dengan *Rumusan Rodrigues*. Rumusan Rodrigues ditulis sebagai

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l. \quad (11.33)$$

Persamaan tersebut secara benar memberikan nilai Polinomial Legendre $P_l(x)$. Sekarang kita coba melakukan pembuktian persamaan tersebut. Pertama kita tunjukkan bahwa jika

$$v = (x^2 - 1)^l, \quad (11.34)$$

nilai $d^l v/dx^l$ merupakan jawaban persamaan Legendre. Berikutnya kita tunjukkan bahwa $P_l(1) = 1$ dalam persamaan (11.33). Untuk membuktikan bagian pertama, kita akan mencari dv/dx dan mengalikannya dengan $(x^2 - 1)$, yaitu

$$(x^2 - 1) \frac{dv}{dx} = (x^2 - 1) l (x^2 - 1)^{l-1} \cdot 2x = 2lxv. \quad (11.35)$$

Apabila persamaan ini diturunkan $(l+1)$ kali menggunakan aturan Leibniz akan diperoleh

$$(x^2 - 1)^l \frac{d^{l+2}v}{dx^{l+2}} + (l+1)(2x) \frac{d^{l+1}v}{dx^{l+1}} + \frac{l(l+1)}{2!} 2 \frac{d^l v}{dx^l} \quad (11.36)$$

$$= 2lx \frac{d^{l+1}v}{dx^{l+1}} + 2l(l+1) \frac{d^l v}{dx^l}. \quad (11.37)$$

Penyederhanaan persamaan ini akan diperoleh

$$(x^2 - 1) \left(\frac{d^l v}{dx^l} \right)' - 2x \left(\frac{d^l v}{dx^l} \right)' + l(l+1) \frac{d^l v}{dx^l} = 0. \quad (11.38)$$

Bentuk persamaan ini identik dengan persamaan Legendre yang telah dibahas pada awal bab ini.

Problem 11.4 Kerjakanlah soal-soal berikut:

1. Carilah $P_2(x)$, $P_3(x)$, dan $P_4(x)$!
2. Tunjukkanlah bahwa

$$\int_{-1}^1 x^m P_l(x) dx = 0, \quad \text{jika } m < l \quad (11.39)$$

11.2 Persamaan Bessel

Persamaan ini seperti persamaan Legendre, yaitu persamaan yang dinamai secara khusus yang akan kita pelajari dan jawaban yang diperoleh sudah ditabulasikan.

Persamaan Bessel dalam bentuk standar biasa dirumuskan menurut

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0, \quad (11.40)$$

dengan p adalah konstanta yang disebut *orde* persamaan Bessel y yang merupakan jawaban bagi persamaan (11.40). Kita dapat membuktikan secara mudah bahwa

$$x(xy')' = x^2 y'' + xy', \quad (11.41)$$

sehingga persamaan Bessel (11.40) dapat dituliskan menjadi lebih sederhana menurut

$$x(xy')' + (x^2 - p^2)y = 0. \quad (11.42)$$

Kita akan mencari jawaban umum deret pangkat dari persamaan ini dengan cara yang sama saat mencari jawaban persamaan Legendre. Apabila y kita tulis dalam ekspansi deret, y beserta turunannya yang terkait persamaan Bessel dapat ditulis menurut

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s}, \quad (11.43)$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+s) x^{n+s-1}, \quad (11.44)$$

$$xy' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+s) x^{n+s}, \quad (11.45)$$

$$(xy')' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+s)^2 x^{n+s-1}, \quad (11.46)$$

$$x(xy')' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+s)^2 x^{n+s}. \quad (11.47)$$

Jika persamaan ini kita masukkan ke persamaan Bessel dan kita tabulasikan, akan diperoleh

	x^s	x^{s+1}	x^{s+2}	\dots	x^{s+n}
$x(xy')'$	$s^2 a_0$	$(1+s)^2 a_1$	$(2+s)^2 a_2$		$(n+s)^2 a_n$
$x^2 y$			a_0		a_{n-2}
$-p^2 y$	$-p^2 a_0$	$-p^2 a_1$	$-p^2 a_2$		$-p^2 a_n$

Persamaan pada x^s memberikan ciri dan diperolehnya dua nilai s menurut

$$s^2 - p^2 = 0, \quad s = \pm p. \quad (11.48)$$

Koefisien x^{s+1} memberikan nilai $a_1 = 0$. Koefisien x^{s+2} memberikan nilai a_2 yang dinyatakan dalam a_0 , dan seterusnya. Akan tetapi sebaiknya mungkin kita menuliskan rumusan menurut kolom terakhir, yaitu

$$[(n+s)^2 - p^2]a_n + a_{n-2} = 0 \quad (11.49)$$

atau

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+s)^2 - p^2}. \quad (11.50)$$

Pertama-tama kita seharusnya mencari koefisien untuk kasus $s = p$. Berdasarkan persamaan (11.50), untuk $s = p$ kita akan memperoleh

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+p)^2 - p^2} = -\frac{a_{n-2}}{n^2 + 2np} = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2p)}. \quad (11.51)$$

Oleh karena $a_1 = 0$, semua fungsi ganjil sama dengan nol. Untuk fungsi genap kita akan mencoba mengganti n dengan $2n$, sehingga

$$a_{2n} = -\frac{a_{2n-2}}{2n(2n+2p)} = -\frac{a_{2n-2}}{2^2 n(n+p)}. \quad (11.52)$$

Rumusan untuk koefisien akan disederhanakan menggunakan notasi fungsi Gamma. Coba kita lihat kembali bahwa $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$, sehingga

$$\Gamma(p+2) = (p+1)\Gamma(p+1), \quad (11.53)$$

$$\Gamma(p+3) = (p+2)\Gamma(p+2) = (p+2)(p+1)\Gamma(p+1), \quad (11.54)$$

dan seterusnya. Lalu kita dapat memperoleh

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2(1+p)} = -\frac{a_0\Gamma(1+p)}{2^2\Gamma(2+p)}, \quad (11.55)$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{2^3(2+p)} = \frac{a_0}{2!2^4(1+p)(2+p)} = \frac{a_0\Gamma(1+p)}{2!2^4\Gamma(3+p)}, \quad (11.56)$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{3!2(3+p)} = -\frac{a_0}{3!2^6(1+p)(2+p)(3+p)} \quad (11.57)$$

$$= -\frac{a_0\Gamma(1+p)}{3!2^6\Gamma(4+p)}, \quad (11.58)$$

dan seterusnya. Lalu, jawaban deret untuk kasus $s = p$ adalah

$$y = a_0 x^p \Gamma(p+1) \left[\frac{1}{\Gamma(1+p)} - \frac{1}{\Gamma(2+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^2 \right. \quad (11.59)$$

$$\left. + \frac{1}{2!\Gamma(3+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{3!\Gamma(4+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots \right], \quad (11.60)$$

$$= a_0 2^p \left(\frac{x}{2}\right)^p \Gamma(p+1) \left[\frac{1}{\Gamma(1)\Gamma(1+p)} - \frac{1}{\Gamma(2)\Gamma(2+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^2 \right. \quad (11.61)$$

$$\left. + \frac{1}{\Gamma(3)\Gamma(3+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{\Gamma(4)\Gamma(4+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots \right]. \quad (11.62)$$

Kita telah memasukkan $\Gamma(1)$ dan $\Gamma(2)$ yang keduanya sama dengan 1 pada dua suku pertama, dan kita akan menuliskan $x^p = 2^p(x/2)^p$ untuk membuat deret yang muncul lebih sistematis. Jika kita mengambil

$$a_0 = \frac{1}{2^p \Gamma(1+p)} \quad \text{atau} \quad a_0 = \frac{1}{2^p p!}, \quad (11.63)$$

lalu y akan disebut *Fungsi Bessel* bentuk pertama dengan orde p , dan ditulis $J_p(x)$ dan dirumuskan menurut

$$J_p(x) = \frac{1}{\Gamma(1)\Gamma(1+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^p - \frac{1}{\Gamma(2)\Gamma(2+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2+p} \quad (11.64)$$

$$\frac{1}{\Gamma(3)\Gamma(3+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{4+p} - \frac{1}{\Gamma(4)\Gamma(4+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{6+p} + \dots \quad (11.65)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} \quad (11.66)$$

11.2.1 Jawaban kedua Persamaan Bessel

Kita telah menemukan satu dari dua jawaban persamaan Bessel, yaitu untuk $s = p$, berikutnya kita akan mencari jawaban untuk $s = -p$. Kita tidak akan melakukan hal detail lagi. Kita hanya akan mengganti p dengan $-p$. Jawaban ketika $s = -p$ biasanya ditulis dengan J_{-p} . Berdasarkan persamaan (11.66) kita peroleh

$$J_{-p}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n-p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}. \quad (11.67)$$

Jika p bukan bilangan bulat, $J_p(x)$ adalah deret yang dimulai dengan x^p dan $J_{-p}(x)$ adalah deret yang dimulai dari x^{-p} . $J_p(x)$ dan x^{-p} merupakan jawaban bebas dan kombinasi linier keduanya merupakan jawaban umum. Tetapi jika p bilangan bulat, beberapa suku pertama $J_{-p}(x)$ nol karena $\Gamma(n-p+1)$ dalam penyebut merupakan fungsi Γ bilangan bulat negatif yang tak hingga. Hal ini dapat ditunjukkan bahwa $J_{-p}(x)$ dimulai dengan suku x^p sebagai $J_p(x)$ dan dapat ditunjukkan bahwa

$$J_{-p}(x) = (-1)^p J_p(x) \quad \text{untuk integral } p \quad (11.68)$$

yaitu $J_{-p}(x)$ yang bukan jawaban bebas ketika p bilangan bulat. Jawaban kedua ini bukan deret Frobenius akan tetapi mengandung logaritma. $J_p(x)$ berhingga pada titik asal, akan tetapi jawaban kedua tak hingga, sehingga sangat berguna jika menggunakan penerapan ini untuk $x \neq 0$.

Meskipun $J_{-p}(x)$ jawaban kedua yang baik untuk non integral p , $J_{-p}(x)$ juga biasanya ditabulasikan. Tabulasi yang ada biasanya adalah kombinasi linier antara $J_p(x)$ dan $J_{-p}(x)$. Kombinasi yang dilakukan semacam $\sin x$ dan $(2 \sin x - 3 \cos x)$, bukan $\cos x$. Contoh latihannya adalah apabila terdapat persamaan diferensial $y'' + y = 0$, biasanya jawaban umumnya adalah kombinasi linier $\sin x$ dan $\cos x$ dengan sembarang konstanta. Akan tetapi di sini jawabannya adalah

$$A \sin x + B(2 \sin x - 3 \cos x) \quad (11.69)$$

yang juga merupakan kombinasi linier yang baik. Pengandaian ini juga dilakukan untuk jawaban kedua fungsi Bessel $J_p(x)$ dan $J_{-p}(x)$. Kombinasi lain ini yang dilakukan disebut *fungsi Neuman* atau *fungsi Webber* yang dinyatakan dengan N_p atau Y_p menurut

$$N_p(x) = Y_p(x) = \frac{\cos(\pi p)J_p(x) - J_{-p}(x)}{\sin(\pi p)}. \quad (11.70)$$

Jawaban umum fungsi Bessel biasanya ditulis sebagai

$$y = AJ_p(x) + BN_p(x), \quad (11.71)$$

dengan A dan B sembarang konstanta.

Problem 11.5 Hitunglah fungsi Bessel berikut menggunakan tabel fungsi Bessel:

1. $J_0(x)$
2. $J_1(x)$
3. $N_0(x)$
4. $N_1(x)$



12. Persamaan Diferensial Parsial

Banyak masalah fisika yang mengandung persamaan diferensial parsial. Metode matematika yang akan dipelajari pada bab ini dilakukan dengan memberikan ilustrasi kasus fisika. Sebagai awalan, mari kita lihat beberapa jenis masalah fisika yang menghadapkan kita pada persamaan diferensial parsial

Persamaan Laplace

$$\nabla^2 u = 0 \quad (12.1)$$

Fungsi u di sini dapat berupa potensial gravitasi dalam daerah tanpa materi, potensial listrik statis dalam area bebas muatan, temperatur keadaan tunak dalam daerah tanpa sumber atau potensial kecepatan untuk fluida tak terkompresi.

Persamaan Poisson

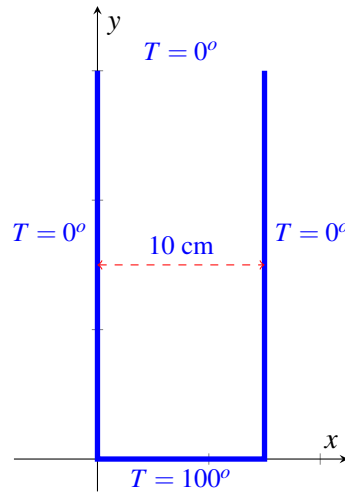
$$\nabla^2 u = f(x, y, z) \quad (12.2)$$

Fungsi u dapat mewakili kuantitas yang sama dengan persamaan Laplace, akan tetapi untuk daerah dengan materi, muatan listrik, atau sumber panas atau fluida, untuk berbagai kasus. Fungsi $f(x, y, z)$ disebut sebagai kerapatan sumber, contoh dalam kelistrikan adalah fungsi f yang sebanding dengan rapat muatan listrik.

Persamaan difusi atau aliran panas

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (12.3)$$

Fungsi u yang mungkin di sini adalah temperatur tidak tunak dalam area tanpa sumber panas, atau mungkin konsentrasi difusi. Besaran α^2 merupakan konstanta yang diketahui sebagai *difusivitas*.



Gambar 12.1: Plat besi persegi

Persamaan Gelombang

$$\nabla^2 u = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (12.4)$$

Fungsi u di sini dapat mewakili perpindahan dari kesetimbangan getaran tali atau membran atau getaran medium. Dalam kelistrikan u dapat berupa arus atau potensial sepanjang jalur transmisi. Besaran v di sini merupakan kelajuan propagasi gelombang.

Persamaan Helmholtz

$$\nabla^2 F + k^2 F = 0 \quad (12.5)$$

Kita akan melihat nantinya, bahwa F di sini mewakili bagian keruangan dari jawaban persamaan difusi atau persamaan gelombang.

12.1 Persamaan Laplace: Suhu Keadaan Tunak

Kita akan menyelesaikan suatu permasalahan yang diilustrasikan oleh gambar 12.1. Plat besi persegi sangat panjang memiliki dua sisi batas panjang dengan suhu 0° , pada daerah jauh juga memiliki suhu 0° , dan suhu pada daerah dasar 100° . Lebar plat 10 cm. Carilah distribusi suhu keadaan tunak di dalam plat tersebut.

Kita akan menyederhanakan masalah, pertama-tama plat yang sangat panjang dibandingkan dengan lebarnya akan memberikan suatu pendekatan matematika yaitu panjang plat y dapat dianggap mendekati tak hingga.

Suhu T dalam plat memenuhi persamaan Laplace tanpa sumber panas, yaitu

$$\nabla^2 T = 0 \quad \text{atau} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0. \quad (12.6)$$

Kita menuliskan ∇^2 dalam koordinat kartesian karena batas plat adalah persegi dan kita dapat menghilangkan suku z karena plat berada dalam dua dimensi. Untuk menjawab masalah ini, kita

dapat memberikan suatu anggapan bahwa jawaban yang akan kita peroleh berupa

$$T(x, y) = X(x)Y(y) \quad (12.7)$$

dengan X merupakan fungsi yang hanya bergantung pada x dan Y merupakan fungsi yang hanya bergantung pada y . Berikutnya, sesegera mungkin kita pasti bertanya: kenapa jawabannya dapat muncul dalam bentuk seperti ini? Bagaimanapun seperti yang akan kita lihat, bahwa melalui jawaban yang kita andaikan tersebut, kita dapat mengkombinasikan prediksi tersebut untuk mencari jawaban yang sebenarnya.

Apabila persamaan (12.7) kita substitusikan ke persamaan (12.6), akan diperoleh

$$Y \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0. \quad (12.8)$$

Apabila kedua ruas persamaan ini kita bagi dengan XY akan diperoleh

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0. \quad (12.9)$$

Langkah berikutnya adalah melakukan pemisahan variabel. Kita akan mengatakan bahwa masing-masing suku dalam persamaan (12.9) merupakan suatu konstanta karena suku pertama adalah fungsi yang hanya bergantung x , dan suku kedua adalah fungsi yang bergantung pada y . Apabila kita memiliki dua buah fungsi yang tidak saling bergantung dan penjumlahan kedua fungsi tersebut adalah nol, kita dapat menjamin bahwa fungsi tersebut pastilah suatu konstanta atau nol. Oleh karena kita sudah mengetahui anggapan tersebut, marilah kita uraikan lagi dengan menganggap konstanta tersebut adalah k^2 , sehingga kita dapat menuliskan

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -k^2 \quad \text{dan} \quad \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = k^2 \quad \text{dengan } k \geq 0, \quad (12.10)$$

atau

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -k^2 X \quad \text{dan} \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = k^2 Y. \quad (12.11)$$

Jawaban persamaan ini adalah

$$X = \begin{cases} \sin kx \\ \cos kx, \end{cases} \quad Y = \begin{cases} e^{ky} \\ e^{-ky}. \end{cases} \quad (12.12)$$

Berikutnya kita dapat merumuskan bahwa jawaban persamaan (12.6) merupakan kombinasi X dan Y yang dapat dituliskan menurut

$$T = XY = \begin{cases} e^{ky} \sin kx, \\ e^{-ky} \sin kx, \\ e^{ky} \cos kx, \\ e^{-ky} \cos kx. \end{cases} \quad (12.13)$$

Keempat kemungkinan jawaban persamaan ini, secara dasar belum tentu memenuhi syarat batas yang diberikan. Kita harus menyeleksi terlebih dahulu, manakah dari keempat persamaan

tersebut yang dapat memenuhi syarat batas, yaitu dengan memasukkan syarat batas yang diberikan ke setiap persamaan.

Kita akan membuang jawaban yang mengandung e^{kx} karena tidak memenuhi syarat batas yang diberikan, yaitu $T \rightarrow 0$ untuk $y \rightarrow \infty$. Berikutnya kita juga akan membuang jawaban yang mengandung $\cos x$ karena tidak memenuhi $T = 0$ ketika $x = 0$. Praktis jawaban yang tersisa adalah

$$T = e^{-ky} \sin kx, \quad (12.14)$$

dan k di sini masih berupa variabel yang harus ditentukan. Apabila kita masukkan syarat batas $T = 0$ ketika $x = 10$ kita akan mendapatkan $\sin(10k) = 0$. Sehingga k dapat diperkirakan sebagai

$$k = \frac{n\pi}{10}, \quad (12.15)$$

dengan n bilangan bulat, yaitu $n = 1, 2, 3, \dots$.

Berangkat dari nilai ini, jawaban T dapat dituliskan kembali menurut

$$T = e^{-n\pi y/10} \sin \frac{n\pi x}{10} \quad (12.16)$$

yang memenuhi ketiga syarat batas yang diberikan.

Berikutnya kita harus memberikan syarat batas $T = 100$ saat $y = 0$. Syarat ini tidak sepenuhnya memenuhi persamaan (12.16) untuk seluruh n . Akan tetapi kombinasi linier semacam persamaan (12.16) merupakan jawaban bagi (12.6). Mari kita coba mencari kombinasi linier tersebut. Untuk mencari semua kemungkinan jawaban, kita akan menuliskan T dalam deret tak hingga menurut

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n\pi y/10} \sin \frac{n\pi x}{10}. \quad (12.17)$$

Pada saat $y = 0$, haruslah nilai $T = 100$, sehingga

$$T_{y=0} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{10} = 100. \quad (12.18)$$

Kita dapat melihat bahwa bentuk ini merupakan deret Fourier dengan $f(x) = 100$ dan $l = 10$. Kita dapat mencari koefisien b_n seperti yang sudah dijelaskan pada bab deret Fourier, yaitu

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad (12.19)$$

$$= \frac{2}{10} \int_0^{10} 100 \sin \frac{n\pi x}{10} dx, \quad (12.20)$$

$$= 20 \frac{10}{n\pi} \left(-\cos \frac{n\pi x}{10} \right) \Big|_0^{10}, \quad (12.21)$$

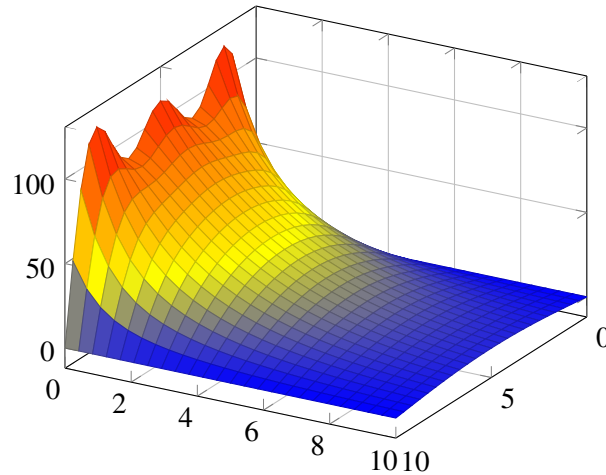
$$= -\frac{200}{n\pi} [(-1)^n - 1], \quad (12.22)$$

$$= \begin{cases} 400/(n\pi), & n \text{ ganjil,} \\ 0, & n \text{ genap.} \end{cases} \quad (12.23)$$

Berikutnya, kita dapat menuliskan

$$T = \frac{400}{\pi} \left(e^{-\pi y/10} \sin \frac{\pi x}{10} + \frac{1}{3} e^{-3\pi y/10} \sin \frac{3\pi x}{10} + \dots \right). \quad (12.24)$$

Ilustrasi sebaran suhu untuk jawaban sampai tiga suku pertama ditunjukkan pada gambar 12.2.



Gambar 12.2: Ilustrasi jawaban (12.24) untuk tiga suku pertama

Persamaan ini dapat digunakan untuk menghitung jika $\pi y/10$ tidak terlalu kecil karena deret akan konvergen secara cepat. Contohnya, saat $x = 5$ dan $y = 5$, kita peroleh

$$T = \frac{400}{\pi} \left(e^{-\pi/2} \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} e^{-3\pi/2} \sin \frac{3\pi}{2} + \dots \right), \quad (12.25)$$

$$= \frac{400}{\pi} (0.208 - 0.003 + \dots), \quad (12.26)$$

$$= 26.1^\circ. \quad (12.27)$$

Apabila kasus ini kita modifikasi dengan memberikan suhu pada batas bawah $f(x)$ selain 100, sementara batas lain masih sama, kita dapat memecahkan masalah baru ini dengan cara yang sama. Kita hanya perlu memperluas $f(x)$ yang diberikan ke dalam deret Fourier dan mensubstitusikan koefisien yang diperoleh ke persamaan (12.17).

Berikutnya, mari kita coba menganalisis kasus lain. Andaikan kita memiliki plat berhingga dengan tinggi 30 cm dengan batas atas memiliki suhu $T = 0$, dan batas lain masih seperti gambar 12.1. Pada kasus ini, kita tidak memiliki alasan untuk membuang suku jawaban e^{ky} karena y tidak tak hingga. Kita sekarang mengganti e^{-ky} dengan kombinasi linier $ae^{-ky} + be^{ky}$ yang nol ketika $y = 30$. Kombinasi yang lebih bagus lagi jika kita memilih

$$\frac{1}{2} e^{k(30-y)} - \frac{1}{2} e^{-k(30-y)}, \quad (12.28)$$

sehingga, ketika $y = 30$, persamaan ini akan memberikan $e^0 - e^0 = 0$, tepat seperti yang kita inginkan. Berikutnya persamaan ini akan kita tulis sebagai $\sinh k(30 - y)$, sehingga jawaban untuk plat berhingga ini

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh \frac{n\pi}{10} (30 - y) \sin \frac{n\pi x}{10}. \quad (12.29)$$

Masing masing suku deret ini akan memiliki $T = 0$ pada tiga sisi plat. Dan kita memberikan $T = 100$ pada $y = 0$, sehingga

$$T_{y=0} = 100 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh(3n\pi) \sin \frac{n\pi x}{10}, \quad (12.30)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{10}, \quad (12.31)$$

dengan $b_n = B_n \sinh 3n\pi$ atau $B_n = b_n / \sinh 3n\pi$. Berikutnya kita akan mencari b_n , dan kita dapat memperoleh distribusi suhu dalam plat berhingga ini adalah

$$T = \sum_{n \text{ genap}} \frac{400}{n\pi \sinh 3n\pi} \sinh \frac{n\pi}{10}(30-y) \sin \frac{n\pi x}{10}. \quad (12.32)$$

Dalam persamaan (12.24) dan (12.32) kita menemukan fungsi $T(x, y)$ yang keduanya memenuhi persamaan Laplace (12.6) dan semua batas yang diberikan. Fakta eksperimen menunjukkan bahwa untuk daerah batas dengan pemberian suhu batas, akan memunculkan hanya satu jawaban $T(x, y)$ yang memenuhi persamaan Laplace dan syarat batas yang diberikan. Hal ini adalah *sense* yang dapat kita peroleh dari plat persegi.

Sekarang, mungkin kita bertanya, mengapa konstanta yang digunakan $-k^2$? Apa yang akan terjadi jika konstanta yang kita gunakan $+k^2$. Apabila kita menggunakan konstanta $+k^2$, akan kita peroleh

$$T = XY = \begin{cases} e^{kx} \sin ky, \\ e^{-kx} \sin ky, \\ e^{kx} \cos ky, \\ e^{-kx} \cos ky. \end{cases} \quad (12.33)$$

Apabila pilihan ini digunakan, kita tidak akan menemukan jawabannya. Oleh karena itu, pemilihan tanda positif atau negatif konstanta k sangat penting.

Problem 12.1 Kerjakanlah soal-soal berikut:

1. Carilah distribusi suhu keadaan tunak dari masalah plat semi-tak hingga jika suhu pada batas bawah adalah $T = f(x) = x$, dan sisi-sisi yang lain nol!
2. Jawablah masalah plat semi-tak hingga jika batas bawah memiliki lebar 20 dan

$$T = \begin{cases} 0^\circ, & 0 < x < 10 \\ 100^\circ & 10 < x < 20, \end{cases} \quad (12.34)$$

dan sisi-sisi yang lain nol!

3. Carilah distribusi suhu keadaan tunak plat besi persegi dengan sisi 10 cm jika salah satu suhu sisinya dijaga 100° sementara sisi yang lainnya nol!

12.2 Persamaan Difusi

Persamaan aliran panas adalah

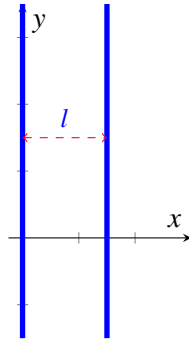
$$\nabla^2 u = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (12.35)$$

dengan u merupakan suhu dan α^2 merupakan konstanta karakteristik material yang dilalui aliran panas. Hal yang sangat berharga jika kita memisah persamaan ini ke dalam persamaan ruang dan persamaan waktu. Persamaan ruang yang lebih dari satu dimensi harus dipisah dalam persamaan diferensial biasa dalam x dan y , atau x , y , dan z atau r , θ , ϕ dan seterusnya. Kita dapat menganggap bahwa jawaban persamaan difusi tersebut di atas adalah

$$u = F(x, y, z)T(t). \quad (12.36)$$

Substitusi persamaan (12.36) ke persamaan (12.35) menghasilkan

$$T \nabla^2 F = \frac{1}{\alpha^2} F \frac{dT}{dt}. \quad (12.37)$$



Gambar 12.3: lempeng difusi

Berikutnya, apabila persamaan ini dibagi dengan FT , akan diperoleh

$$\frac{1}{F} \nabla^2 F = \frac{1}{\alpha^2} \frac{1}{T} \frac{dT}{dt}. \quad (12.38)$$

Ruas kiri dari identifikasi ini merupakan fungsi yang hanya bergantung pada variabel ruang x, y, z dan ruas kanan merupakan fungsi yang hanya bergantung waktu. Kemudian, kedua ruas persamaan tersebut merupakan suatu konstanta yang sama, sehingga kita dapat menuliskan

$$\frac{1}{F} \nabla^2 F = -k^2 \quad \text{atau} \quad \nabla^2 F + k^2 F = 0,$$

dan

$$\frac{1}{\alpha^2} \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = -k^2 \quad \text{atau} \quad \frac{dT}{dt} = -k^2 \alpha^2 T. \quad (12.39)$$

Persamaan waktu dapat diintegrasikan menjadi

$$T = e^{-k^2 \alpha^2 t}. \quad (12.40)$$

Kita akan memperlihatkan alasan fisis mengapa konstanta yang dipilih adalah $(-k^2)$. Oleh karena t bertambah, suhu benda mungkin akan menurun pada $x = 0$ sebagaimana disebut oleh persamaan (12.40), tetapi jika t tidak menuju tak hingga, mungkin sebaiknya kita menggunakan $+k^2$ dalam (12.39) dan (12.40). Persamaan ruang dalam persamaan (12.39) merupakan persamaan Helmholtz. Kita juga akan menemukan bahwa bagian ruang persamaan gelombang juga merupakan persamaan Helmholtz.

Mari kita mengandaikan aliran panas yang melewati suatu lempeng tipis l . Kita juga akan menganggap bahwa lebar lempeng ini sangat besar sehingga kita bisa mengabaikan efeknya dan kita dapat pula menganggap hanya ada aliran pada arah x seperti pada gambar 12.3.

Masalah ini identik dengan masalah aliran panas dalam suatu batang yang sisi-sisinya terisolasi, karena dalam kedua kasus ini, aliran panas hanya berada pada sumbu x saja.

Kita anggap lempeng memiliki distribusi suhu keadaan tunak awal $T = 0$ untuk $x = 0$ dan $T = 100$ untuk $x = l$. Berangkat dari keadaan ini, lalu kita akan mencari suhu pada posisi x dan pada waktu t .

Kita perhatikan lagi keadaan tunak awal. Kita mungkin tahu bahwa keadaan ini linier, tetapi kita lihat terlebih dahulu persamaannya. Keadaan tunak awal u_0 ini memenuhi persamaan Laplace dalam kasus satu dimensi menurut

$$\frac{d^2 u_0}{dx^2} = 0. \quad (12.41)$$

Jawaban persamaan ini adalah

$$u_0 = ax + b, \quad (12.42)$$

dengan a dan b suatu konstanta yang dapat ditemukan dengan memasukkan syarat yang diberikan. Oleh karena $u_0 = 0$ pada $x = 0$, dan $u = 100$ pada $x = l$, kita memiliki

$$u_0 = \frac{100}{l}x. \quad (12.43)$$

Ketika $t = 0$ dimulai, u memenuhi aliran panas persamaan (12.35). Berikutnya kita siap untuk memisah jawaban. Jawaban persamaan (12.36) dengan $T(t)$ diberikan oleh persamaan (12.40) dan $F(x)$ memenuhi persamaan pertama (12.39), yaitu

$$\nabla^2 F + k^2 F = 0 \quad \text{atau} \quad \frac{d^2 F}{dx^2} + k^2 F = 0. \quad (12.44)$$

Jawaban persamaan ini adalah

$$F(x) = \begin{cases} \sin kx, \\ \cos kx, \end{cases} \quad (12.45)$$

dan jawaban umum persamaan difusi (12.35) adalah

$$u = \begin{cases} e^{-k^2 \alpha^2 t} \sin kx, \\ e^{-k^2 \alpha^2 t} \cos kx. \end{cases} \quad (12.46)$$

Kita akan membuang jawaban $\cos kx$ untuk masalah ini karena diberikan $u = 0$ pada $x = 0$. Kita juga menginginkan $u = 0$ pada $x = l$, hal ini terpenuhi jika $\sin kl = 0$, sehingga $kl = n\pi$ atau $k = n\pi/l$. Jawaban dasar yang memenuhi adalah

$$u = e^{-(n\pi\alpha/l)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (12.47)$$

dan jawaban ini akan muncul dalam bentuk deret, yaitu

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-(n\pi\alpha/l)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (12.48)$$

Kita ingin $u = u_0$ pada $t = 0$ sebagaimana persamaan (12.43), yaitu:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} = u_0 = \frac{100}{l}x. \quad (12.49)$$

Hal ini berarti kita mencari deret Fourier untuk $(100/l)x$ pada $(0, l)$. Koefisien yang diperoleh adalah

$$b_n = \frac{100}{l} \frac{2l}{\pi} \frac{1}{n} (-1)^{n-1} = \frac{200}{\pi} \frac{(-1)^{n-1}}{n}. \quad (12.50)$$

Berikutnya kita akan mendapatkan jawaban akhir dengan mensubstitusikan persamaan (12.50) ke persamaan (12.48), yaitu

$$u = \frac{200}{\pi} \left(e^{-(\pi x/l)^2 t} \sin \frac{\pi x}{l} - \frac{1}{2} e^{-(2\pi x/l)^2 t} \sin \frac{2\pi x}{l} + \frac{1}{3} e^{-(3\pi x/l)^2 t} \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots \right). \quad (12.51)$$

Kita dapat melakukan variasi dari masalah ini. Anggap suhu akhir muka yang diberikan sebagai konstanta yang berbeda dari nol. Berikutnya, seperti kasus keadaan awal tunak, diberikan keadaan akhir tunak sebagai fungsi jarak. Jawaban deret akan cenderung menuju keadaan tunak akhir nol. Lalu, untuk memperoleh keadaan tunak akhir yang lain, kita akan menambahkan fungsi linier u_f yang mewakili keadaan tunak akhir yang sebenarnya. Hal ini yang membuat kita menuliskan kembali persamaan (12.48) dalam bentuk

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-(n\pi x/l)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l} + u_f. \quad (12.52)$$

Berikutnya pada $t = 0$, sebanding dengan persamaan (12.49) didapatkan

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} + u_f \quad (12.53)$$

atau

$$u_0 - u_f = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (12.54)$$

Problem 12.2 Kerjakanlah soal-soal berikut:

1. Suatu lempeng tak hingga dengan ketebalan l , mula-mula pada muka $x = 0$ memiliki suhu 0° dan muka $x = l$ memiliki suhu 100° . Lalu pada $t = 0$, dilakukan perubahan suhu menjadi 100° pada muka $x = 0$ dan suhu 0° pada muka $x = l$, carilah distribusi suhu pada waktu t !
2. Dua buah lempeng dengan ketebalan masing-masing 1 cm, masing-masing salah satu mukanya memiliki suhu 0° sementara muka yang lainnya 100° . Pada $t = 0$ kedua lempeng tersebut ditumpuk pada muka yang sama-sama memiliki suhu 100° , dan permukaan-permukaan luar yang baru diberi suhu 100° . Carilah $u(x, t)$ untuk $t > 0$!

12.3 Persamaan Gelombang

Andaikan suatu senar dibentangkan kuat dan ujungnya dikencangkan pada $x = 0$ dan $x = l$. Ketika senar bergetar, perpindahan y dari posisi kesetimbangan bergantung pada x dan t . Kita menganggap bahwa perpindahan y selalu sangat kecil dan slop $\partial y / \partial x$ senar pada suatu posisi pada suatu waktu sangat kecil, atau dengan kata lain, senar tak pernah jauh dari keadaan kesetimbangan, sehingga kita sulit untuk membedakan panjang tali dan jarak dari ujung yang satu ke ujung yang lainnya. Perpindahan y dengan anggapan seperti di atas akan memenuhi persamaan gelombang

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (12.55)$$

Konstanta v bergantung pada tegangan dan kerapatan linier senar yang disebut kecepatan gelombang. Kecepatan ini muncul karena gangguan yang diberikan pada suatu titik yang akhirnya menyebar ke sepanjang senar. Kita akan memprediksi bahwa jawaban persamaan gelombang adalah

$$y = X(x)T(t). \quad (12.56)$$

Jika persamaan ini kita substitusikan ke persamaan (12.55) akan diperoleh

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{v^2} \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -k^2,$$

atau

$$\begin{aligned} X'' + k^2 X &= 0, \\ \ddot{T} + k^2 v^2 T &= 0. \end{aligned} \quad (12.57)$$

Kita akan melihat secara fisis mengapa kita menggunakan konstanta separasi negatif. Jawaban yang mendeskripsikan getaran diwakili oleh fungsi sinus dan cosinus, bukan eksponensial. Tentu, jika kita mengambil $+k^2$, kita tidak akan memperoleh syarat batas yang memenuhi k sebagai bilangan real.

Kita akan mengulas lagi beberapa besaran yang terkait dengan fenomena gelombang, di antaranya

$$v = \text{frekuensi} \qquad \omega = 2\pi v \quad \text{frekuensi sudut} \qquad (12.58)$$

$$\lambda = \text{panjang gelombang} \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \text{bilangan gelombang} \qquad (12.59)$$

$$v = \lambda v. \qquad (12.60)$$

Jawaban persamaan (12.57) dinyatakan menurut

$$X = \begin{cases} \sin kx, \\ \cos kx, \end{cases} \quad T = \begin{cases} \sin kv t = \sin \omega t, \\ \cos kv t = \cos \omega t. \end{cases} \qquad (12.61)$$

Berikutnya, jawaban y bagi persamaan gelombang adalah

$$y = \begin{cases} \sin kx \sin \omega t, \\ \sin kx \cos \omega t, \\ \cos kx \sin \omega t, \\ \cos kx \cos \omega t, \end{cases} \quad \text{dengan } \omega = kv. \qquad (12.62)$$

Oleh karena senar dikencangkan pada $x = 0$ dan $x = l$, kita harus memiliki nilai $y = 0$ untuk ujung-ujung tersebut pada setiap posisi dan setiap waktu. Hal ini mengakibatkan hanya persamaan yang mengandung suku $\sin kx$ dari persamaan (12.62) yang memenuhi. Selain itu kita juga harus memilih bahwa k sedemikian rupa sehingga $\sin kl = 0$, atau $k = n\pi/l$, sehingga jawaban persamaan (12.62) adalah

$$y = \begin{cases} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi v t}{l}, \\ \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi v t}{l}. \end{cases} \qquad (12.63)$$

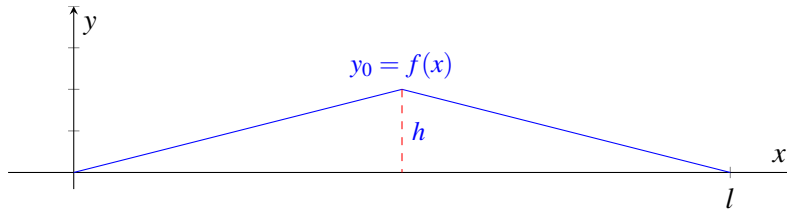
Kombinasi jawaban persamaan (12.63) yang akan kita ambil bergantung pada syarat awal yang diberikan. Contoh, andaikan keadaan senar diawali dengan menarik senar sejauh h dari titik tengah, kemudian dilepaskan, kita akan memperoleh bentuk senar pada keadaan awal katakanlah pada $t = 0$, $y = f(x)$ seperti gambar 12.4.

Berangkat dari sini, kita tahu bahwa kecepatan $\partial y / \partial t$ titik pada senar adalah nol pada $t = 0$, sehingga kita akan membuang jawaban yang mengandung $\sin(n\pi v t / l)$. Selanjutnya, kita dapat menulis jawaban untuk masalah ini sebagai

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi v t}{l}. \qquad (12.64)$$

Koefisien b_n juga harus ditentukan sedemikian rupa sehingga pada $t = 0$, kita memiliki $y_0 = f(x)$, sehingga

$$y_0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} = f(x). \qquad (12.65)$$



Gambar 12.4: Senar yang direntangkan dengan $y_0 = f(x)$

Seperti pada masalah-masalah sebelumnya koefisien ini kita ekspansikan ke deret Fourier untuk $f(x)$ yang diberikan dan mensubstitusikannya ke persamaan (12.64), sehingga dihasilkan

$$y = \frac{8h}{\pi^2} \left(\sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi vt}{l} - \frac{1}{9} \sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi vt}{l} + \dots \right). \quad (12.66)$$

Cara lain untuk mengawali getaran senar adalah dengan menekannya (seperti memainkan piano). Tentu, dalam kasus ini $y = 0$ pada $t = 0$, dan kecepatan $\partial y / \partial t$ pada $t = 0$ diberikan sebagai fungsi x . Pemilihan ini mengakibatkan jawaban yang mengandung $\cos(n\pi vt/l)$ harus dibuang. Jawaban untuk masalah seperti ini adalah

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi vt}{l}. \quad (12.67)$$

Di sini koefisien juga harus ditentukan, sehingga

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi v}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (12.68)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (12.69)$$

$$= V(x). \quad (12.70)$$

Kecepatan awal yang diberikan harus diperluas dalam deret Fourier sinus.

Andaikan senar bergetar dengan cara semacam deret tak hingga untuk y , kita dapat mengambil satu jawaban dari persamaan (12.64), yaitu

$$y = \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \quad (12.71)$$

untuk salah satu nilai n . Nilai terbesar dari $\sin(n\pi vt/l)$ pada saat tertentu adalah 1, sehingga persamaan senar adalah

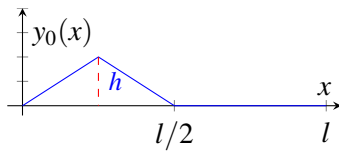
$$y = \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (12.72)$$

Andaikan nilai $\sin(n\pi vt/l)$ berada pada sembarang nilai A , kita dapat menuliskan perpindahan setiap satuan waktu dalam bentuk

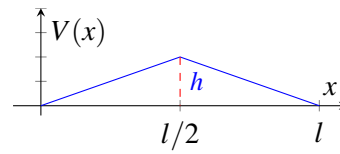
$$y = A \sin \frac{n\pi vt}{l}. \quad (12.73)$$

Problem 12.3 Kerjakanlah soal-soal berikut:

1. Suatu senar dengan panjang l memiliki kecepatan awal nol dan perpindahan $y_0(x)$ seperti yang ditunjukkan gambar 12.5. Carilah perpindahan sebagai fungsi x dan t !



Gambar 12.5



Gambar 12.6

2. Suatu senar dengan panjang l mula-mula dikencangkan lurus. Pada $t = 0$, suatu titik pada senar tersebut diberi kecepatan $V(x) = (\partial y / \partial t)_{t=0}$ seperti pada gambar 12.6. Tentukanlah bentuk tali pada waktu t , yaitu perpindahan y sebagai fung x dan t !
3. Carilah seperti pada soal no 2 untuk kecepatan awal

$$V(x) = \begin{cases} \sin 2\pi x/l, & \text{untuk } 0 < x < l/2, \\ 0, & \text{untuk } l/2 < x < l, \end{cases} \quad (12.74)$$



13. Transformasi Koordinat dan Pengenalan Tensor

13.1 Pendahuluan

Salah satu hal penting yang harus dilakukan untuk menyelesaikan masalah fisika adalah memilih koordinat yang cocok. Kemampuan memilih kerangka referensi sering kali akan menyederhanakan pekerjaan. Kita dapat menengok kembali pelajaran terdahulu mengenai integral volume, momen dan yang lainnya, pekerjaan biasanya akan lebih mudah jika diselesaikan dalam koordinat yang benar. Contoh lain adalah ketika menjawab persamaan diferensial gerak proyektil di sekitar bumi. Mungkin hal ini dapat dijawab dalam koordinat kartesian menurut

$$\ddot{x} = 0 \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = -g. \quad (13.1)$$

Akan tetapi, karena benda bergerak mengelilingi bumi, akan lebih mudah jika dijawab dalam koordinat polar menurut

$$r = \text{konstanta}, \quad \ddot{\theta} = \text{percepatan sudut}. \quad (13.2)$$

Bab ini akan membahas transformasi koordinat dari suatu sistem ke sistem lainnya. Ketika kita menggunakan *bahasa geometri*, hal ini disebut "perubahan sistem koordinat", dan ketika kita menggunakan *bahasa aljabar*, hal ini disebut "perubahan variabel". Lalu, dalam bahasa matematika, keduanya adalah hal yang sama.

Untuk memahami hal ini lebih jauh, dan menyatakan persamaan vektor dalam koordinat lain selain kartesian, bab ini akan membahas transformasi dari satu koordinat ke koordinat lainnya beserta perlengkapan dasar penting dalam sistem koordinat tersebut. Bahkan bagian ini akan sedikit mendiskusikan tentang *tensor*.

Pekerjaan ini akan menjadi lebih sederhana jika kita menggunakan matriks. Untuk itu pertama kali kita akan meninjau beberapa operasi matriks terlebih dahulu.

Ciri perkalian matrik yaitu dapat dituliskan menurut

$$C = AB \quad \text{atau} \quad C_{ij} = \sum_j A_{ij} B_{jk}. \quad (13.3)$$

Berikutnya adalah transpose dari perkalian matriks. Pertama harus diketahui dulu bahwa $A_{ik}^T = A_{ki}$, lalu

$$(AB)_{ik}^T = (AB)_{ki}, \quad (13.4)$$

$$= \sum_j A_{kj} B_{ji}, \quad (13.5)$$

$$= \sum_j A_{jk}^T B_{ij}^T, \quad (13.6)$$

$$= \sum_j B_{ij}^T A_{jk}^T, \quad (13.7)$$

$$= (B^T A^T)_{ik}, \quad (13.8)$$

$$(AB)^T = B^T A^T. \quad (13.9)$$

Transpose perkalian dua buah matriks sama dengan perkalian transpose kedua matrik yang dibalik terlebih dahulu.

Melalui cara yang sama, *invers* perkalian matriks dapat pula dibuktikan berlaku

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}. \quad (13.10)$$

13.2 Transformasi Linier

Transformasi linier dilakukan dengan menuliskan variabel baru sebagai kombinasi linier variabel lama. Dalam dua dimensi persamaan transformasi linier adalah

$$X = ax + by, \quad (13.11)$$

$$Y = cx + dy, \quad (13.12)$$

dengan a, b, c , dan d suatu konstanta. Contoh eksplisitnya adalah

$$X = 5x - 2y, \quad (13.13)$$

$$Y = -2x + 2y. \quad (13.14)$$

Persamaan ini secara geometri dapat diinterpretasikan dengan dua cara.

Cara Pertama

Andaikan \mathbf{r} dan \mathbf{R} vektor menurut

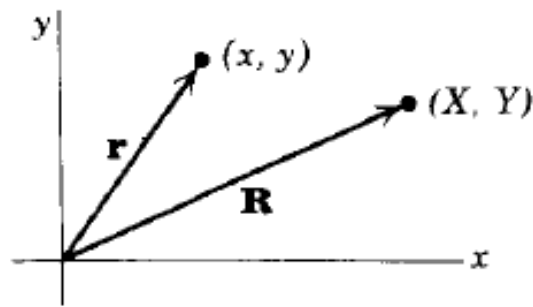
$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}, \quad (13.15)$$

$$\mathbf{R} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j}. \quad (13.16)$$

Persamaan ini menceritakan bagaimana \mathbf{R} tertransformasi jika diberikan \mathbf{r} (gambar 13.1). Persamaan tersebut dapat ditulis dalam notasi matriks sebagai

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (13.17)$$

atau

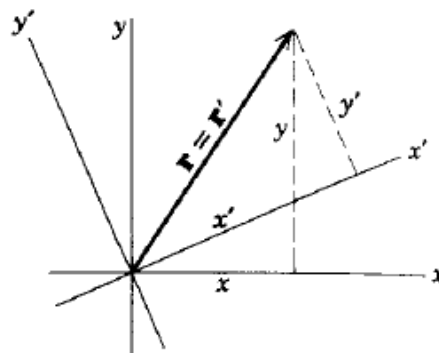


Gambar 13.1: Penggambaran transformasi linier dengan titik yang diputar

$$R = Mr, \quad (13.18)$$

dengan R , M , dan r menyatakan notasi dalam matriks. Matriks M disebut matriks transformasi yang mengandung semua informasi mengenai diperolehnya R dari r . Kita dapat mengatakan bahwa perkalian r oleh M akan merubah vektor menjadi vektor yang lain.

Cara Kedua



Gambar 13.2: Penggambaran transformasi linier dengan koordinat yang diputar

Cara ini diinterpretasikan oleh gambar 13.2. Untuk menghindari kerancuan, pada bagian ini variabel tertransformasi baru akan ditulis dengan x' dan y' menurut

$$x' = ax + by, \quad (13.19)$$

$$y' = cx + dy. \quad (13.20)$$

Di sini terdapat dua buah koordinat yaitu (x, y) dan (x', y') , dan satu vektor $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ relatif terhadap dua koordinat tersebut menurut

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = \mathbf{r}' = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}'. \quad (13.21)$$

13.3 Transformasi Ortogonal

Sumbu x' dan y' pada persamaan (13.19) dan (13.20) tidak tegak lurus. Ketika persamaan tersebut diputar menurut a, b, c , dan d , dapat ditulis dalam suku sudut rotasi θ menurut

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta, \quad (13.22)$$

$$y' = -x \sin \theta + y \cos \theta, \quad (13.23)$$

atau

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (13.24)$$

Bagian ini akan membahas hal yang menarik pada kasus khusus transformasi linier yang disebut *transformasi ortogonal*. Secara definisi, transformasi semacam ini adalah transformasi yang memenuhi

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2. \quad (13.25)$$

Apabila hal ini dipenuhi, matriks semacam M pada persamaan (13.18) disebut *matriks ortogonal*. Transpose matriks ortogonal bernilai sama dengan inversnya, menurut

$$M^T = M^{-1}. \quad (13.26)$$

Pembuktian hal tersebut dapat diuraikan di bawah ini, yaitu

$$x'^2 + y'^2 = (ax + by)^2 + (cx + dy)^2, \quad (13.27)$$

$$= (a^2 + c^2)x^2 + 2(ab + cd)xy + (b^2 + d^2)y^2, \quad (13.28)$$

$$\equiv x^2 + y^2, \quad (13.29)$$

lalu besaran yang harus dipenuhi adalah

$$a^2 + c^2 = 1, \quad (13.30)$$

$$ab + cd = 0, \quad (13.31)$$

$$b^2 + d^2 = 1, \quad (13.32)$$

sehingga diperoleh

$$M^T M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (13.33)$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix}, \quad (13.34)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (13.35)$$

13.4 Swanilai dan Swavektor

Kita dapat memberikan suatu interpretasi fisis dari transformasi linier yang telah diberikan sebelumnya. Anggaplah bidang (x, y) dilingkupi oleh suatu membran elastis yang dapat diregangkan, digeser, atau diputar. Lalu, suatu titik (x, y) pada membran berubah menjadi titik baru (X, Y) setelah deformasi, dan kita dapat mengatakan bahwa matriks M mendeskripsikan deformasi tersebut.

Sekarang kita lihat, ada sejumlah vektor yang tidak berubah arah oleh deformasi tersebut, yaitu vektor semacam

$$\mathbf{R} = \mu \mathbf{r}, \quad (13.36)$$

dengan μ suatu konstanta. Vektor semacam ini disebut *swavektor* atau vektor karakteristik suatu transformasi, dan μ disebut *swanilai* atau nilai karakteristik dari matriks transformasi.

Swanilai

Ilustrasi perolehan swanilai akan kita ulas menggunakan persamaan (13.13) dan (13.14) yang dituliskan dalam bentuk matriks menurut

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (13.37)$$

Syarat swavektor $\mathbf{R} = \mu \mathbf{r}$, akan dipenuhi menurut

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu x \\ \mu y \end{pmatrix}, \quad (13.38)$$

atau dapat pula dituliskan dalam bentuk persamaan menurut

$$5x - 2y = \mu x, \quad (13.39)$$

$$-2x + 2y = \mu y, \quad (13.40)$$

atau

$$(5 - \mu)x - 2y = 0, \quad (13.41)$$

$$-2x + (2 - \mu)y = 0. \quad (13.42)$$

Jika kita mencoba menjawab himpunan persamaan homogen ini dengan mencari determinannya, kita akan mendapatkan $x = 0$ dan $y = 0$ karena konstanta pada ruas kanan sama dengan nol, terkecuali jika determinan koefisien sama dengan nol. Apabila kita lihat untuk jawaban ini (selain $x = y = 0$), diperoleh

$$\begin{vmatrix} 5 - \mu & -2 \\ -2 & 2 - \mu \end{vmatrix} = 0. \quad (13.43)$$

Persamaan ini disebut *persamaan karakteristik* matriks M .

Besaran μ dapat diperoleh dengan menguraikan persamaan (13.43), sehingga

$$(5 - \mu)(2 - \mu) - 4 = 0, \quad (13.44)$$

$$\Leftrightarrow \mu^2 - 7\mu + 6 = 0, \quad (13.45)$$

$$\mu = 1 \quad \text{atau} \quad \mu = 6. \quad (13.46)$$

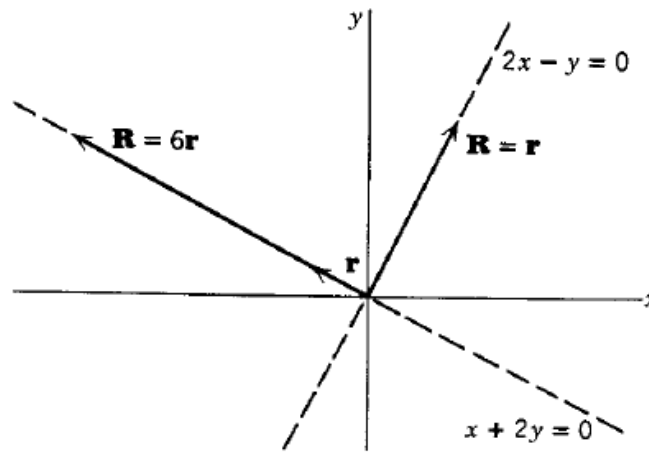
swavektor

Apabila nilai μ yang diperoleh disubstitusikan ke persamaan (13.39) sampai (13.42), akan diperoleh

$$2x - y = 0, \quad (13.47)$$

$$x + 2y = 0. \quad (13.48)$$

Persamaan ini dilukiskan oleh gambar 13.3



Gambar 13.3: TVektor karakteristik dari suatu transformasi linier

13.5 Diagonalisasi Matriks

Berikutnya, masih dengan nilai μ yang diperoleh sebelumnya, andaikan digunakan indeks bawah 1 dan 2 untuk mengidentifikasi swavektor yang sebanding dengan swanilai tersebut, diperoleh

$$5x_1 - 2y_1 = x_1, \quad (13.49)$$

$$-2x_1 + 2y_1 = y_1, \quad (13.50)$$

dan

$$5x_2 - 2y_2 = 6x_2, \quad (13.51)$$

$$-2x_2 + 2y_2 = 6y_2. \quad (13.52)$$

Empat persamaan ini dapat ditulis dalam satu persamaan matriks menurut

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}. \quad (13.53)$$

Lalu, kita akan memperoleh

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad y_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad x_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}}, \quad y_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad (13.54)$$

dan akhirnya diperoleh

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}. \quad (13.55)$$

Wakilan untuk penulisan matrik tersebut di atas dapat ditulis menurut

$$MC = CD, \quad (13.56)$$

dengan

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad (13.57)$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad (13.58)$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}. \quad (13.59)$$

Jika determinan C tidak nol, lalu invers C adalah C^{-1} , berikutnya, persamaan (13.56) dikalikan dengan C^{-1} dari kiri, akan diperoleh

$$C^{-1}MC = D. \quad (13.60)$$

Matrik D hanya memiliki nilai untuk komponen diagonal, selain itu bernilai nol, matriks ini disebut *matrik diagonal*. Matrik D selalu dapat diperoleh jika M diberikan.

13.6 Penerapan Diagonalisasi

Berikutnya, kita akan melihat contoh penggunaan proses diagonalisasi. Suatu pusat bentuk kerucut (elips atau hiperbola) dengan titik pusat pada pusat koordinat diberikan menurut

$$Ax^2 + 2Hxy + By^2 = K, \quad (13.61)$$

dengan A , H , B , dan K masing-masing merupakan konstanta. Persamaan ini dapat ditulis dalam bentuk matriks menurut

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & H \\ H & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = K, \quad (13.62)$$

atau

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = K, \quad (13.63)$$

jika dianggap

$$M = \begin{pmatrix} A & H \\ H & B \end{pmatrix}. \quad (13.64)$$

Apabila dilakukan transformasi koordinat ke (x', y') , persamaan tersebut akan menjadi

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} C^{-1}MC \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = K, \quad (13.65)$$

Contoh 13.6.1 Carilah diagonalisasi Kerucut

$$5x^2 - 4xy + 2y^2 = 30 \quad (13.66)$$

■

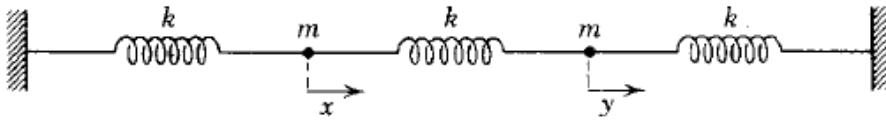
Contoh 13.6.2 Rotasikan sumbu prinsipal permukaan quadric

$$x^2 + 6xy - 2y^2 - 2x + x^2 = 0 \quad (13.67)$$

■

Contoh 13.6.3 Carilah karakteristik frekuensi getaran untuk sistem massa dan pegas pada gambar 13.4

■



Gambar 13.4: Sistem Pegas Tergandeng

13.7 Koordinat Lengkung

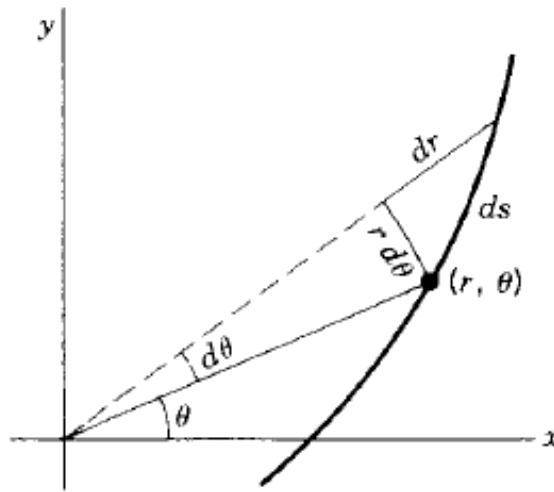
Sebelum membicarakan lebih jauh tentang perubahan variabel atau transformasi koordinat, mari kita coba membicarakan terlebih dahulu perlengkapan suatu sistem koordinat yang lebih nyata. Ilustrasi yang diambil adalah sistem koordinat kartesian (x, y, z) dan koordinat silinder (r, θ, z) . Elemen panjang ds koordinat kartesian adalah

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (13.68)$$

dan untuk koordinat silinder adalah

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2. \quad (13.69)$$

Perhatikanlah gambar 13.5. Ungkapan apa yang cocok untuk menuliskan elemen garis dari ilustrasi gambar tersebut? Berdasarkan gambar tersebut secara geometri tentu kita akan lebih mudah



Gambar 13.5: Elemen garis koordinat polar

jika mengungkapkan ds^2 dalam koordinat polar yaitu

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2. \quad (13.70)$$

Bagaimanapun, untuk perubahan variabel yang lebih kompleks, kita membutuhkan metode yang sistematis untuk menemukan ds . Coba kita lihat ilustrasi perubahan variabel dari koordinat kartesian ke koordinat silinder menurut uraian berikut:

$$x = r \cos \theta, \quad (13.71)$$

$$y = r \sin \theta, \quad (13.72)$$

$$z = z, \quad (13.73)$$

dan diperoleh

$$dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta, \quad (13.74)$$

$$dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta, \quad (13.75)$$

$$dz = dz. \quad (13.76)$$

Apabila persamaan di atas dikuadratkan, akan diperoleh

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2. \quad (13.77)$$

13.7.1 Faktor Skala dan Vektor Basis

Dalam koordinat kartesian, jika x, y, z koordinat suatu partikel dan x berubah menurut dx , sementara y dan z konstan, jarak yang ditempuh partikel adalah $ds = dx$. Bagaimanapun apabila dinyatakan dalam koordinat silinder, jika θ berubah menurut $d\theta$, sementara r dan z konstan, jarak yang ditempuh partikel bukanlah $d\theta$ melainkan $rd\theta$. Faktor semacam r dalam $rd\theta$ yang harus dikalikan dalam penurunan koordinat untuk memperoleh jarak diketahui sebagai *faktor skala*. Cara langsung telah kita lakukan sebeumnya. Faktor skala dari contoh tersebut adalah $1, r, 1$.

Berikutnya kita akan mengambil contoh vektor $d\vec{s}$ yang memiliki komponen $dr, rd\theta, dz$ dalam suatu koordinat sistem dengan arah $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_z$ menurut

$$d\vec{s} = \hat{e}_r dr + \hat{e}_\theta rd\theta + \hat{e}_z dz. \quad (13.78)$$

Kita dapat mencari hubungan antara vektor basis sistem koordinat lengkung ($\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_z$ dalam koordinat silinder) dengan $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$. Hal ini akan berguna jika kita menurunkan suatu vektor dalam koordinat lengkung, $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ besar dan arahnya konstan serta turunannya nol, tetapi $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta$ arahnya tidak tepat sama yang mengakibatkan turunannya tidak sama dengan nol. Kita akan mengilustrasikan metode aljabar untuk menemukan hubungan antara dua himpunan vektor basis yang berbeda. Elemen panjang koordinat kartesian dapat dinyatakan menurut

$$d\vec{s} = \hat{i}dx + \hat{j}dy + \hat{k}dz, \quad (13.79)$$

$$= \hat{i} \left(\frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta \right) + \hat{j} \left(\frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta \right) + \hat{k} dz. \quad (13.80)$$

Bandungkan dua persamaan tersebut di atas. Apabila kita gunakan $x = r \cos \theta$ dan $y = r \sin \theta$, akan diperoleh

$$\hat{e}_r = \hat{i} \frac{\partial x}{\partial r} + \hat{j} \frac{\partial y}{\partial r} = \hat{i} \cos \theta + \hat{j} \sin \theta, \quad (13.81)$$

$$r\hat{e}_\theta = \hat{i} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \hat{j} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -\hat{i} r \sin \theta + \hat{j} r \cos \theta, \quad (13.82)$$

$$\hat{e}_z = \hat{k}. \quad (13.83)$$

13.7.2 Koordinat Lengkung Umum

Andaikan secara umum x_1, x_2, x_3 secara umum merupakan himpunan variabel atau koordinat yang sedang kita tinjau, contohnya untuk koordinat kartesian adalah $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$, dan untuk koordinat silinder adalah $x_1 = r, x_2 = \theta, x_3 = z$. Jika terdapat suatu sistem yang ortogonal, elemen panjang ds^2 dapat dinyatakan menurut

$$ds^2 = h_1^2 dx_1^2 + h_2^2 dx_2^2 + h_3^2 dx_3^2 = \sum_{i=1}^3 h_i^2 dx_i^2, \quad (13.84)$$

dengan h_i merupakan faktor skala. Lalu vektor perpindahan $d\vec{s}$ dapat dirumuskan menurut

$$d\vec{s} = \hat{e}_1 h_1 dx_1 + \hat{e}_2 h_2 dx_2 + \hat{e}_3 h_3 dx_3 = \sum_{i=1}^3 \hat{e}_i h_i dx_i. \quad (13.85)$$

13.8 Operator Vektor dalam Koordinat Lengkung

Beberapa operator terkait vektor telah dipelajari pada bab terdahulu seperti kemiringan (gradien) $\vec{\nabla}u$, divergensi ($\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$), curl ($\vec{\nabla} \times \vec{u}$), dan Laplacian ($\nabla^2 u$).

Gradien

$$\vec{\nabla}u = \hat{e}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \hat{e}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} + \hat{e}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial u}{\partial x_3} \quad (13.86)$$

atau dapat dituliskan dalam bentuk yang lebih ringkas, yaitu

$$\vec{\nabla}u = \sum_{i=1}^3 \frac{\hat{e}_i}{h_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad (13.87)$$

Divergensi

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 V_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 h_3 V_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 V_3) \right) \quad (13.88)$$

Laplacian

$$\nabla^2 u = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial u}{\partial x_3} \right) \right] \quad (13.89)$$

13.9 Tensor

13.9.1 Pengantar

13.9.2 Tensor Kartesian

13.9.3 Sistem koordinat umum

An abstract geometric artwork featuring a complex arrangement of shapes, lines, and colors. In the top left, there is a large black circle with a purple center, surrounded by a pinkish-red glow. Below it is a red circle. To the right, there are various geometric shapes including triangles, squares, and circles in colors like blue, green, yellow, and purple. A prominent black and white checkered pattern is visible in the center-left. The background is a light, textured yellow. The word "Bibliography" is written in a bold, black, sans-serif font, enclosed within a thin orange rectangular border that is slightly rounded at the corners.

Bibliography

- [1] ML Boas, 1995, Mathematical Methods in the Physical Sciences, Prentice Hall: New Jersey, USA
- [2] Riley. 1980. Mathematical Methods for Physi
- [3] Zettili N, 2001, Quantum Mechanics: Concepts and Applications, John Wiley & Sons Ltd: Chichester, England

- operasi determinan, 67
- diagonalisasi matriks, 214
- diferensial, 73, 113
 - eksak, 131
 - implisit, 78, 83, 84
 - parsial, 73
 - total, 75, 77
- dimensi, 72
- diskriminan, 23
- distribusi
 - muatan, 141
 - normal, 169
 - suhu, 202
- divergensi, 125, 131, 218
- elastisitas, 125
- elektron, 62, 147
- elemen
 - garis, 216
 - luas, 102, 105, 158
 - massa, 100
 - panjang, 103, 104
 - permukaan, 108
 - volume, 104, 107, 137
- faktor skala, 217
- fase, 26
- Fisika
 - Dasar, 113
 - Matematika, 125
- fungsi
 - Beta, 165, 166
 - eksponensial, 37
 - eliptik, 170
 - Error, 169
 - komplemen, 169
 - faktorial, 161
 - Gamma, 162
 - negatif, 163
 - ganjil, 184
 - Gaussian, 169
 - genap, 184
 - hiperbolik, 38, 39
 - kelas, 161
 - periodik, 175
 - trigonometri, 40
- gagang pintu, 117
- garis, 59
- gaya, 113
- gesek, 155
- lestari, 134
- geodesik, 157, 158
- geometri, 45
 - analitik, 59
- gerak
 - harmonik sederhana, 155, 176
 - melingkar, 120
- getaran
 - senar, 207
- gradien, 218
- gravitasi, 160
- hambatan, 78, 145
- hasil kali
 - rangkap tiga silang, 115, 116
 - rangkap tiga skalar, 115, 117
 - silang, 58
 - skalar, 55, 123
- Hermitian adjoint, 69
- himpunan
 - membangun, 72
 - persamaan linier, 46, 67
- hukum
 - Ampere, 143, 144
 - Coulomb, 131, 140
 - distributif, 56
 - Gauss, 140, 141, 144
 - Kirchoff, 145, 148
 - Newton, 145, 156, 160
- indeks bias, 159
- induktansi, 145
- integral
 - berulang, 95
 - dua kali, 93
 - eliptik, 170, 171
 - garis, 126, 131, 133, 143
 - lipat, 93
 - permukaan, 108
- integran, 127
- intensitas kemagnetan, 143
- interval konvergensi, 19, 20, 31
- invers, 210
 - trigonometri, 40
- Jacobian, 101, 105–107
- jajaran genjang, 115
- jawaban deret, 187
- kalkulus variasi, 157

- kapasitansi, 145
- kawat, 83, 87, 100
 - berarus, 144
- keadaan
 - setimbang, 157
 - tunak, 198, 203
- kecepatan, 62
 - linier, 115
 - medan, 142
 - partikel, 142
 - sudut, 115
- kelajuan
 - konstan, 120
- kelistrikan, 136, 140, 143
- kemagnetan, 143
- kemiringan, 60, 73
 - bukit, 122
- kerapatan
 - air, 136
- kerucut, 107
- kesalahan relatif, 78
- Koefisien Fourier, 178
- kombinasi linier, 48, 71, 210
- komponen vektor, 51
- komut, 66
- komutator, 66
- konduktivitas panas, 145
- konjugat kompleks, 26–28
- konstanta dielektrik, 140
- koordinat
 - bola, 104, 107, 120
 - kartesian, 24, 101, 120, 216
 - lengkung, 217, 218
 - umum, 217
 - polar, 24, 102, 105, 120, 128
 - pusat koordinat, 119
 - silinder, 102, 104, 120, 216
 - sistem koordinat, 104, 118
 - transformasi koordinat, 104
- kurva, 75, 126
 - singgung, 136
 - tertutup, 132
- Lagrangan, 160
- Laplacian, 218
- lengan
 - gaya, 114
 - tuas, 114
- lingkaran, 36, 120, 175
 - konvergen, 30, 31
 - pusat lingkaran, 120
- lintasan, 126
- Listrik Magnet, 113
- listrik magnet, 125
- logaritma, 39
- luasan terlingkup, 141
- masalah titik batas, 86
- matriks, 46, 209
 - invers, 69
 - invers matriks, 68
 - konjugat kompleks, 69
 - matriks identitas, 67
 - matriks khusus, 68
 - matriks null, 67
 - operasi matriks, 64
 - penjumlahan matriks, 65
 - perkalian matriks, 64, 65
 - persamaan matriks, 64
 - terapan perkalian, 67
 - transpose, 46, 65, 69
- medan
 - gaya, 130
 - lestari, 130
 - listrik, 130, 144
 - magnetik, 144
- Mekanika, 160
 - Klasik, 113
 - Kuantum, 113
 - Statistik, 169
- modulus, 26, 35
- momen
 - gaya, 114
 - inersia, 93, 101, 107
- momentum, 147
- muatan, 140, 146
- nilai
 - maksimum, 82, 83
 - minimum, 82
 - mutlak, 26, 28, 105
- operator vektor, 218
- optik, 125
- osilasi, 175
- panas, 125, 136
- pangkat kompleks, 35, 40
- papan jungkat-jungkit, 114
- parameter, 61
- partikel bermassa, 119

- pegas, 155
 - tergandeng, 216
- peluruhan, 148
- pembilang, 27
- pemisahan variabel, 147, 199
- pemurnian air, 13
- penambahan massa, 138
- penampang lintang, 136
- pengali Lagrange, 83, 85
- pengisian kapasitor, 151
- pengosongan kapasitor, 148
- penurunan massa, 77
- penyebut, 27
- percepatan, 120, 145
- perkalian rangkap tiga, 115
- perkalian skalar, 70
- permukaan
 - bumi, 119
 - terbuka, 135
 - tertutup, 140
- perpindahan, 113
 - dielektrik, 141
- perpotongan, 115
- persamaan
 - Bernoulli, 152
 - Bessel, 192, 194
 - bidang, 63, 64
 - diferensial, 145–148
 - diferensial biasa, 145
 - diferensial orde kedua, 146
 - diferensial orde pertama, 146, 149
 - diferensial parsial, 145, 197
 - difusi, 197, 202
 - eksak, 153
 - Euler, 158
 - Euler-Lagrange, 159, 167
 - garis lurus, 62
 - gelombang, 198, 205
 - Helmholtz, 198
 - homogen, 154, 213
 - kompleks, 29
 - kontinuitas, 138
 - kuadrat, 154
 - Laplace, 197, 198, 203
 - Legendre, 188
 - linier, 45
 - matriks, 68
 - Maxwell, 144
 - parametrik, 62, 123
 - Poisson, 197
 - simetrik, 62
- perubahan variabel, 89
- pita Moebius, 142
- plat semi-tak hingga, 202
- plot grafik, 36
- polinomial
 - Legendre, 190
- potensial, 130
 - skalar, 130
- prinsip Hamilton, 160
- prisma, 82
- proyeksi, 56
- pusat koordinat, 128, 140
- pusat massa, 100
- radioaktif, 136
- rangkaian
 - RC, 148
 - RLC, 146
- rapat
 - arus, 144
 - massa, 97
- rata-rata fungsi, 176
- reduksi baris, 46, 47
- reversibel, 48
- rotasi
 - sumbu rotasi, 115
- ruang vektor
 - gila, 70
 - linier, 69
 - polinomial, 70
 - tunggal, 70
- rumusan
 - Euler, 32, 33, 37
 - Rodrigues, 191
 - Stirling, 164
- segitiga, 94
- sejajar, 120
 - anti-sejajar, 120
- semi-lingkaran, 103
- sentroid, 100, 107
 - kemiringan, 98
 - luasan, 98
- silinder, 136
- subruang, 71
- sudut, 26, 57, 120
 - antara dua bidang, 109
 - inklinasi, 136

- rotasi, 142
- suhu, 88, 122
- sumbu
 - imajiner, 24
 - koordinat, 54
 - putar, 115
- swanilai, 212, 213
- swavektor, 212, 213
- tali, 83
- tenaga
 - kinetik, 160, 166
 - potensial, 160, 166
- tenaga potensial, 131
- tensor, 209
- teorema
 - divergensi, 135, 136, 138, 139, 141
 - Green, 131, 133, 135
 - Stokes, 135, 142–144
- teori peluang, 169
- teredam
 - berat, 156
 - harmonik, 156
 - kritis, 156
- termodinamika, 74, 125
- titik
 - esensial, 126
 - maksimum, 157
 - tumpu, 114
- torka, 114, 117
 - besar torka, 114
- transformasi
 - bidang, 45
 - koordinat, 209, 215, 216
 - linier, 210, 212
 - ortogonal, 212
- transpose, 210
- trigonometri, 37
- tuas, 114
- turunan
 - berarah, 122, 124
 - parsial, 88, 125
- uji
 - integral, 14, 15, 20
 - konvergensi, 13, 30
 - perbandingan, 14
 - rasio, 15, 16, 30
- usaha, 113
- vektor, 51
 - analisis vektor, 113, 125
 - kalkulus vektor, 113
 - karakteristik, 213
 - komponen-komponen vektor, 54
 - negatif, 53
 - nol, 53
 - normal, 134
 - notasi vektor, 59
 - pengurangan vektor, 53
 - penjumlahan vektor, 52
 - perkalian vektor, 55, 113
 - perpindahan, 119
 - satuan, 53, 121, 123, 134
 - satuan normal, 109
 - sejajar, 57
 - singgung, 134
 - sudut dua vektor, 57
 - tegak lurus, 57
 - turunan vektor, 119
- zat radioaktif, 148