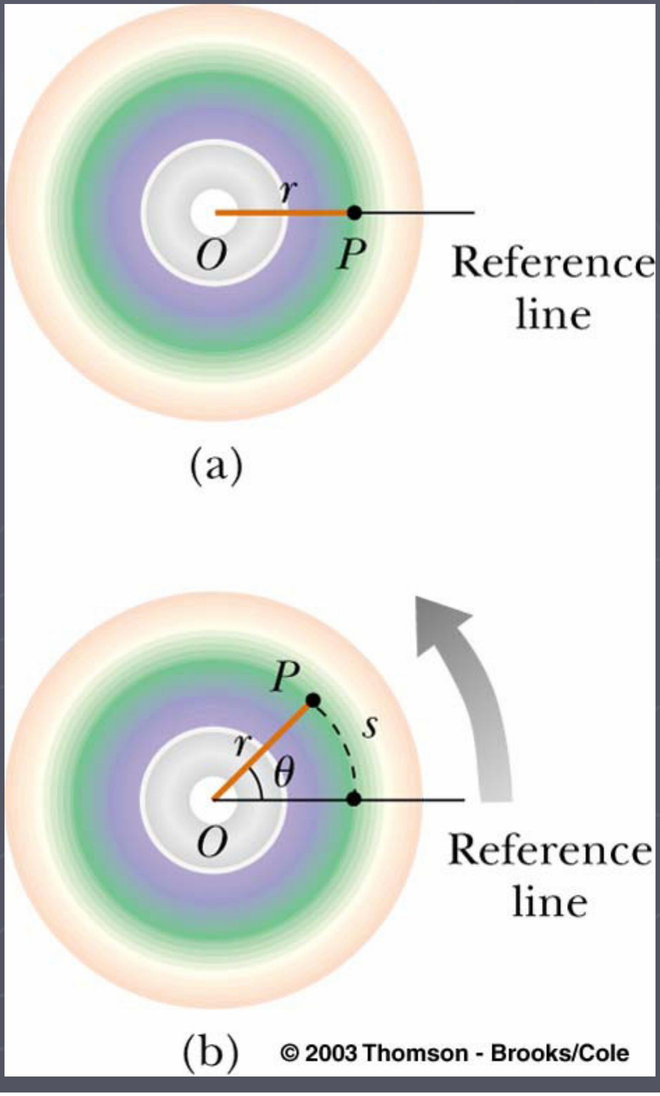
Kinematika Rotasi

Perpindahan Sudut

- Riview gerak linear:
  - Perpindahan, kecepatan, percepatan

$$\Delta\vec{r} = \vec{r_f} - \vec{r_i}, \quad \vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}, \quad \vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

- Perlu konsep yang sama untuk benda bergerak melingkar
- Seperti sebelumnya:
  - Perlu sebuah sistem acuan tetap (garis)
  - Gunakan sistem koordinat polar



Perpindahan Sudut (lanjutan)

- Setiap titik pada benda yang bergerak melingkar terhadap titik O
- Secara umum sudut diukur dalam *radian*

$$\boxed{\theta = \frac{s}{r}}$$

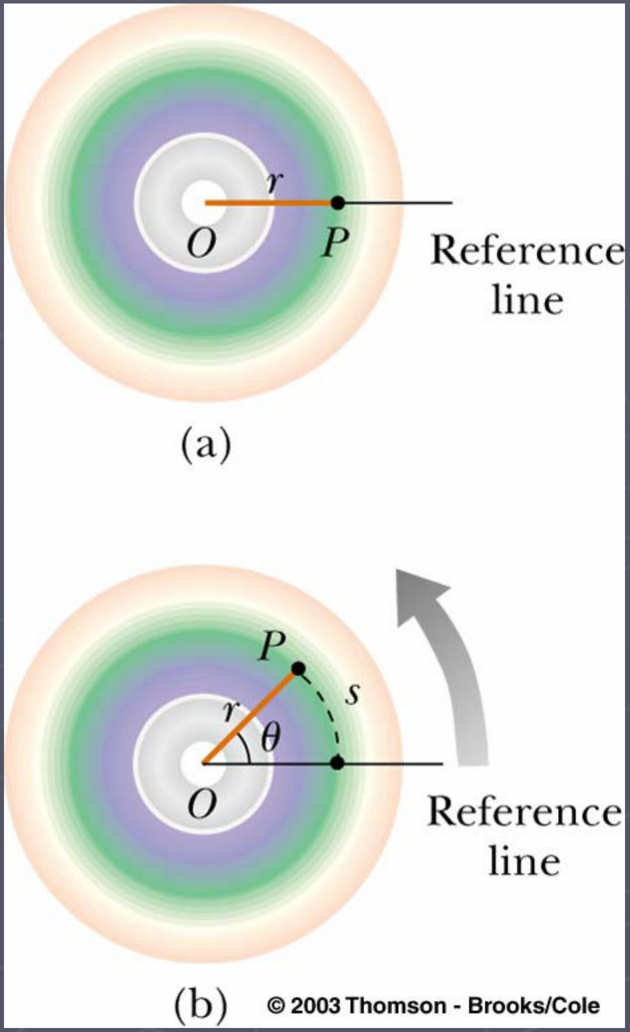
Panjang busur

Jari-jari

- Cat:

$$1\ rad = \frac{360°}{2\pi} = 57.3°$$

$$\theta\,[\mathrm{rad}] = \frac{\pi}{180°}\,\theta\,[\mathrm{derajat}]$$

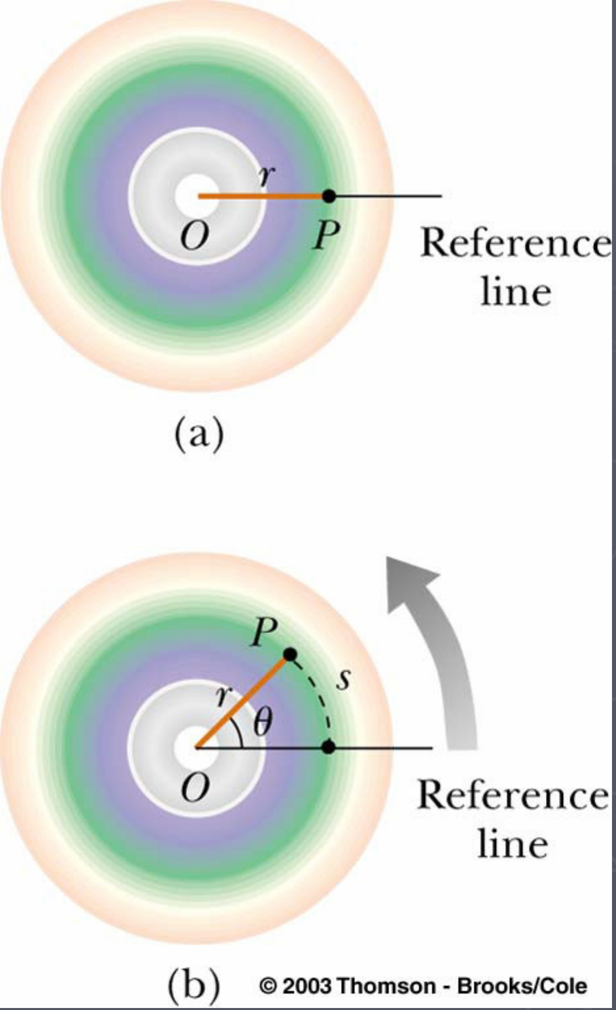


Perpindahan Sudut (lanjutan)

- *Perpindahan sudut* didefinisikan sebagai sudut yang dibuat benda yang berotasi selama selang waktu tetentu

$$\boxed{\Delta\theta = \theta_f - \theta_i}$$

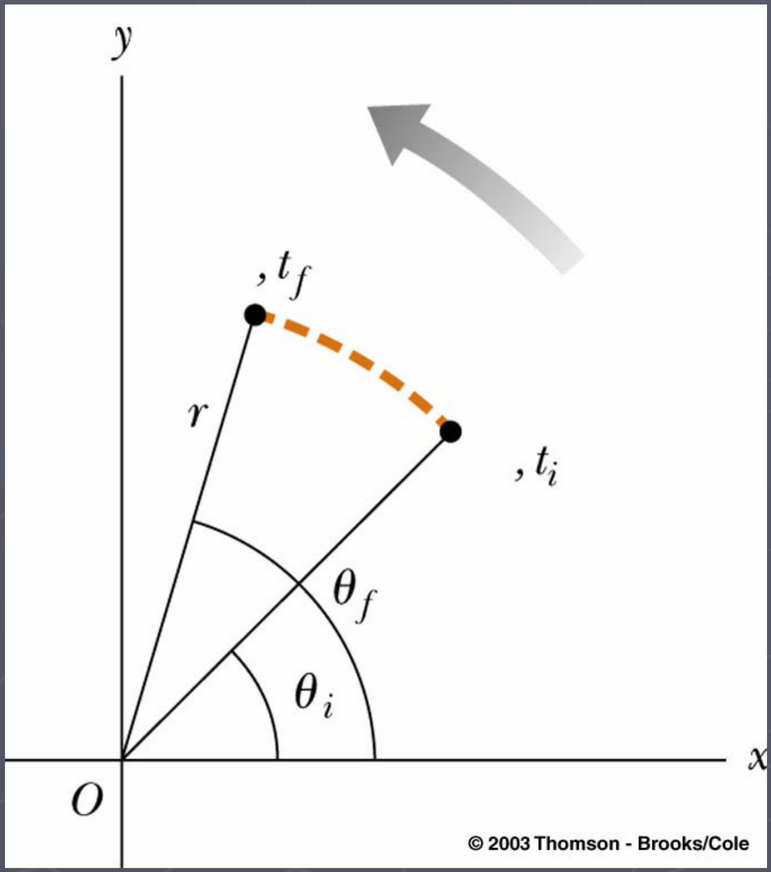
- Setiap titik dalam piringan mengalami perpindahan sudut yang sama dalam selang waktu tertentu



Kecepatan Sudut

- Kecepatan sudut rata-rata, ω, dari benda tegar adalah perbandingan dari perpindahan sudut dengan selang waktu

$$\omega = \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$



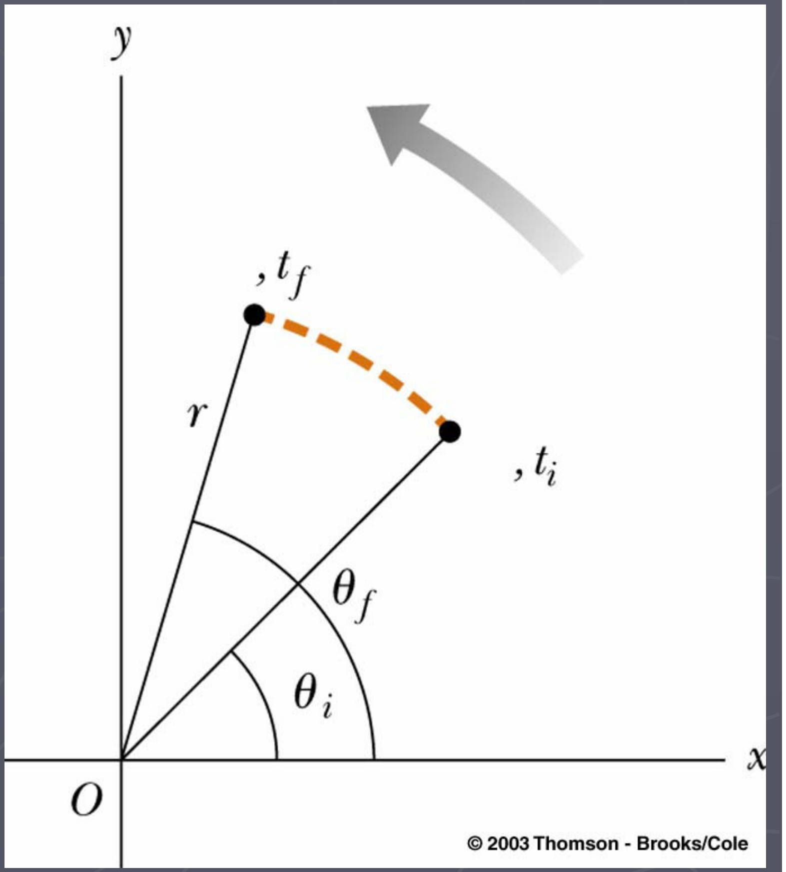
Kecepatan Sudut

- Kecepatan sudut sesaat (laju) didefinisikan sebagai limit dari laju rata-rata dengan selang waktu mendekati nol

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

- Satuan dari laju sudut adalah radian/sec (rad/s)

- Laju sudut akan menjadi
  - positif jika θ bertambah (berlawanan arah dengan jarum jam)
  - negatif jika θ berkurang (searah jarum jam)



Animasi 7-1

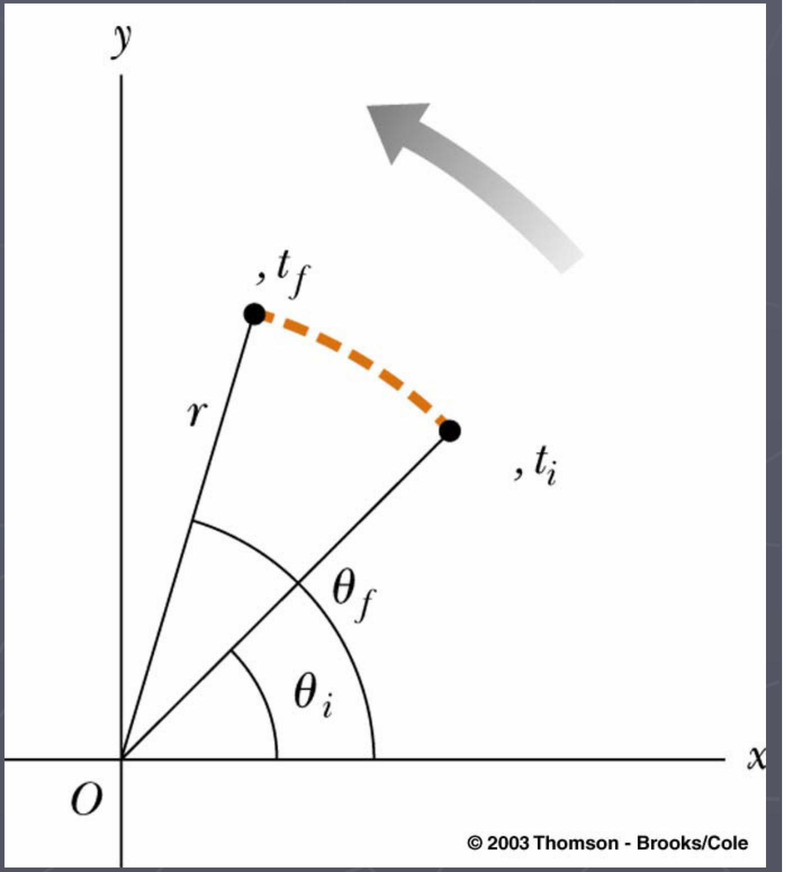
Percepatan Sudut

- Bagaimana jika benda awalnya diam dan kemudian mulai berotasi?
- Percepatan sudut rata-rata, α, dari sebuah benda didefinisikan sebagai perbandingan antara perubahan laju sudut dengan selang waktu yang diperlukan benda untuk mengalami perubahan laju sudut tersebut:

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

- Satuannya adalah rad/s²
- Hal yang sama, percepatan sudut sesaat:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

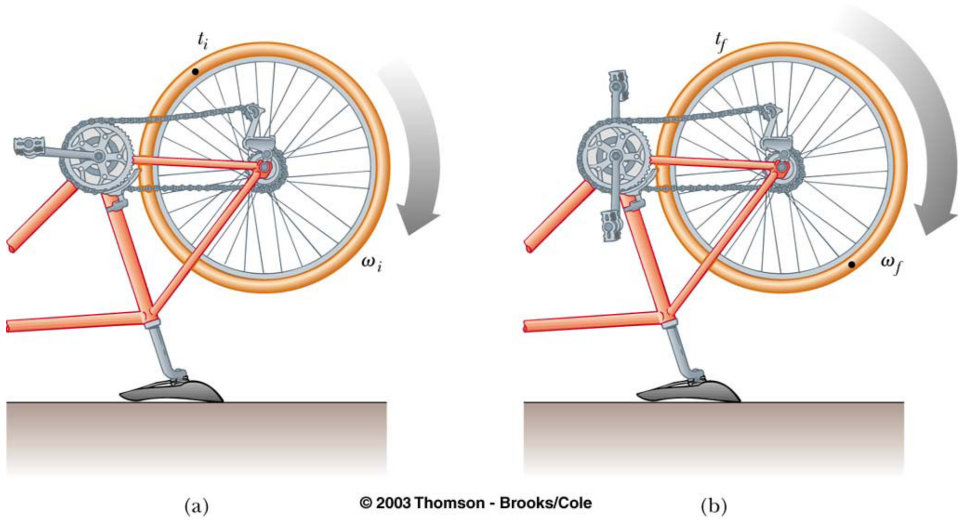


Catatan tentang kinematika rotasi

Ketika sebuah benda tegar berotasi terhadap sumbu tetap tertentu, tiap bagian dari benda memiliki laju sudut dan percepatan sudut yang sama

- Artinya θ, ω, dan α tidak bergantung pada *r*, jarak tiap bagian benda ke sumbu rotasi

Latihan 1



1. Roda sepeda berputar 240 putaran/menit. Berapakah kecepatan sudutnya dalam radian/sec?

$$\boldsymbol{\omega = 240\,\frac{\text{put}}{\text{menit}} \times \frac{1\,\text{menit}}{60\,\textit{sec}} \times \frac{2\pi\ \text{rads}}{1\,\text{put}} = 8\pi\,\text{radians}/\textit{sec} \approx 25.1\,\text{radians}/\textit{sec}}$$

2. Jika roda melambat beraturan dan kemudian berhenti dalam waktu 5 sec, berapa percepatan sudutnya?

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_i}{\Delta t} = \frac{0 - 25\,\text{rad/sec}}{5\,\text{sec}} = -5\,\text{rad/sec}^2$$

3. Dalam waktu 5 sec tersebut, berapa putaran yang dialami roda?

Jawab : 10 putaran

Analogi Antara Gerak Linier dan Gerak Rotasi

Gerak Rotasi Terhadap Sumbu Tertentu dengan Percepatan Sudut Konstan	Gerak Linier dengan Percepatan Konstan
$\omega = \omega_i + \alpha t$	$v = v_i + at$
$\Delta\theta = \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	$\Delta x = v_i t + \frac{1}{2}at^2$
$\omega^2 = \omega_i^2 + 2\alpha\Delta\theta$	$v^2 = v_i^2 + 2a\Delta x$

Hubungan Antara Besaran Sudut dan Besaran Linier

- Perpindahan

$$s = \theta r$$

- Laju

$$v = \omega r$$

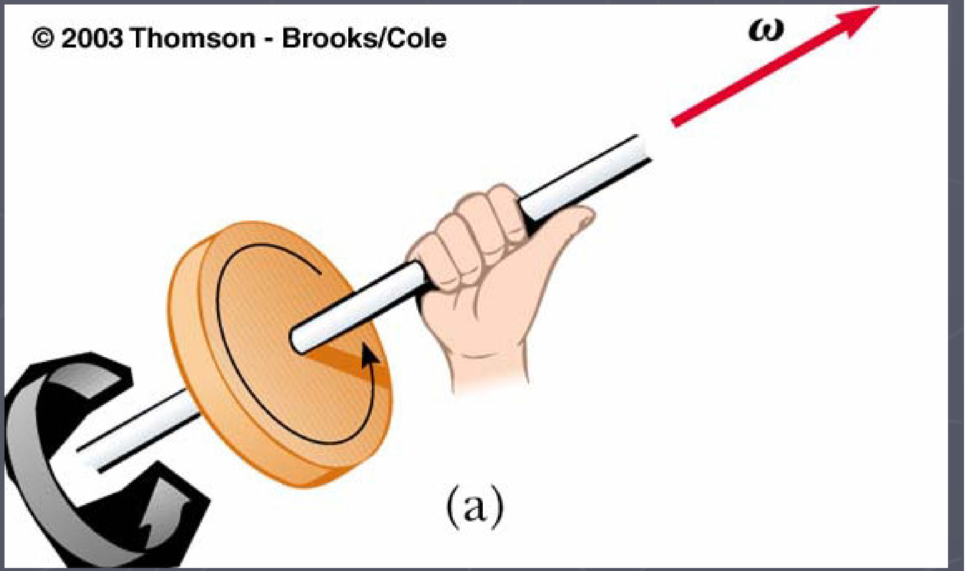
- Percepatan

$$a = \alpha r$$

- Setiap titik pada benda yang berotasi memiliki gerak sudut yang sama
- Setiap titik pada benda yang berotasi tidak memiliki gerak linier yang sama

Sifat Vektor dari Besaran Sudut

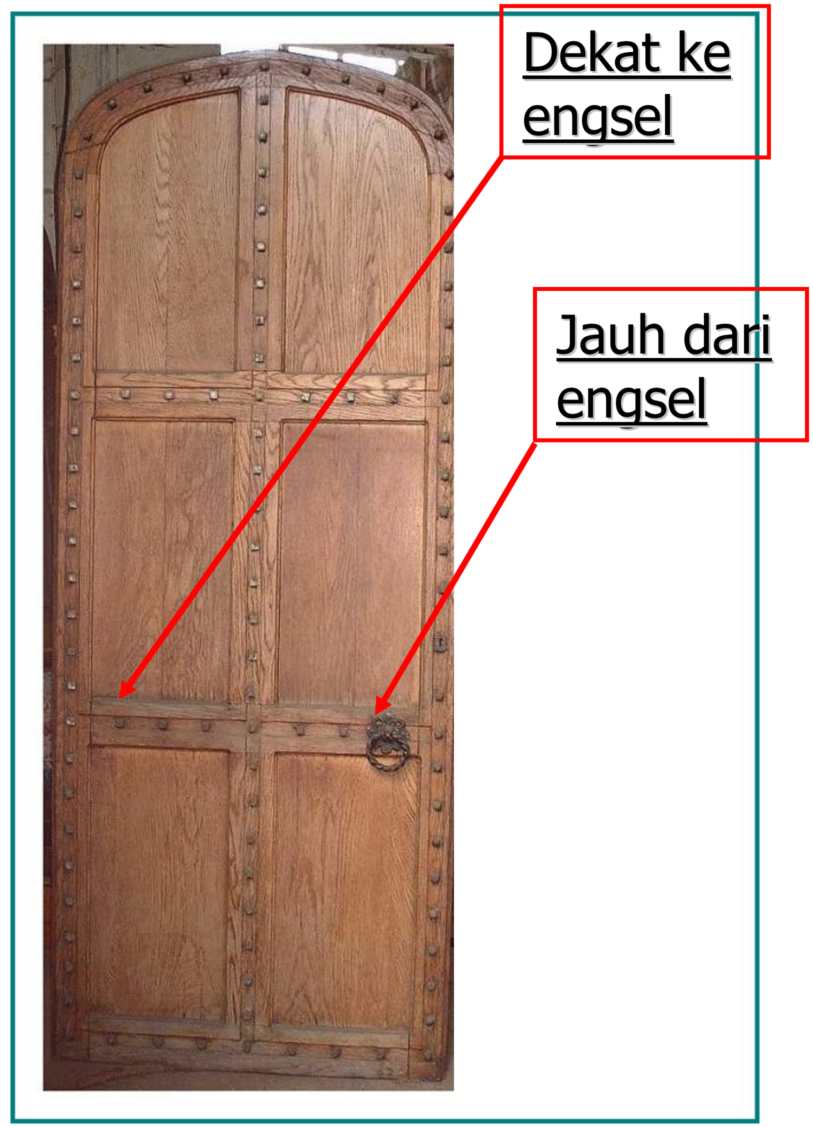
- Seperti pada kasus linier, perpindahan, kecepatan dan percepatan adalah vektor:
- Menentukan arah positif atau negatif
- Cara yang mudah dengan menggunakan aturan tangan kanan
  - Genggam sumbu rotasi dengan tangan kanan anda
  - Kepalkan jari-jari anda searah dengan arah rotasi
  - Ibu jari (jempol) anda menunjukkan arah ω



Dinamika Rotasi Benda Tegar

Torsi

- Tinjau gaya yang dibutuhkan untuk membuka pintu. Apakah lebih mudah membuka pintu dengan mendorong/menarik <u>jauh</u> dari engsel atau <u>dekat</u> ke engsel?



Jauh dari engsel, efek rotasi lebih besar!

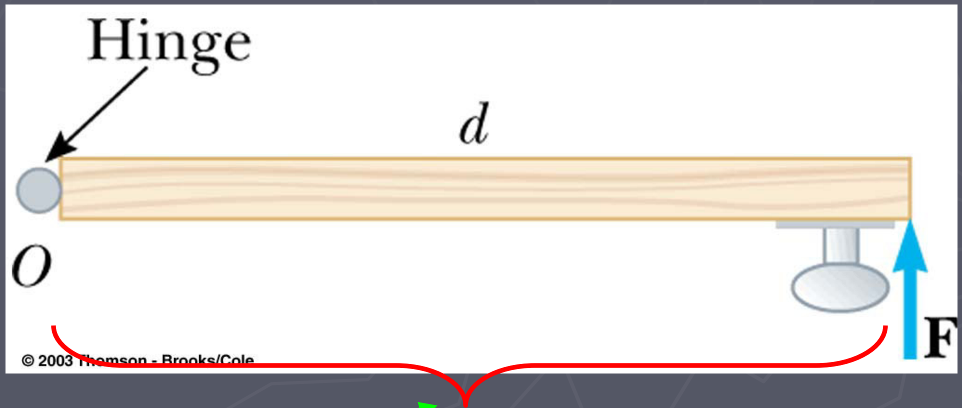
Konsep Fisika:
torsi

Torsi

- Torsi, τ, adalah kecenderungan dari sebuah gaya untuk merotasikan sebuah benda terhadap sumbu tertentu

Contoh pada pintu:

$$\boxed{\tau = Fd}$$

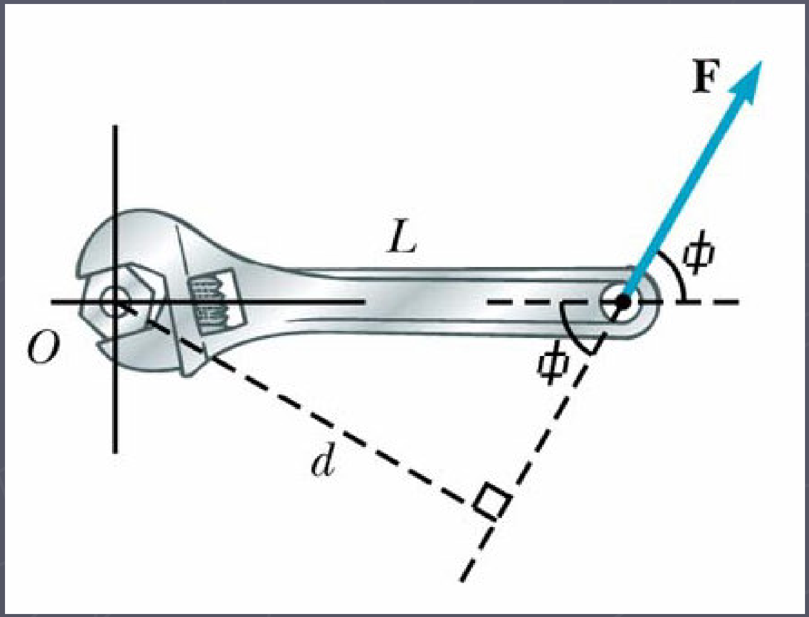


- τ adalah torsi
- d adalah lengan gaya
- F adalah gaya

Lengan Gaya

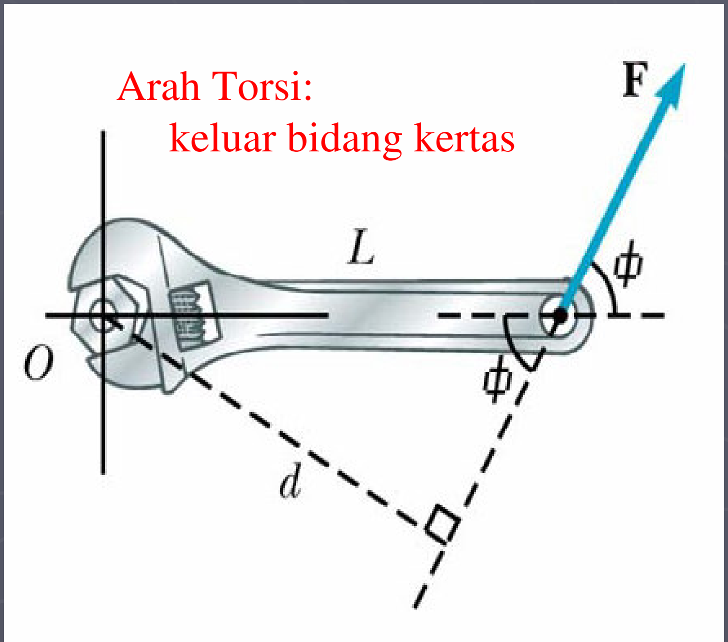
- Lengan gaya, d, adalah jarak terdekat *(tegak lurus)* dari sumbu rotasi ke garis searah perpanjangan gaya

  - $d = L \sin \Phi$



Arah Torsi

- Torsi adalah besaran vektor
  - Arahnya adalah tegaklurus terhadap bidang yang memuat lengan dan gaya
  - Arah dan tanda:
    - Jika gaya cenderung memutar berlawanan jarum jam, torsi bertanda positif
    - Jika gaya cenderung memutar searah jarum jam, torsi bertanda negatif



Satuan	
SI	Newton meter (Nm)
USA & UK	Foot pound (ft lb)

Penulisan Vektor dari Torsi

$$\vec{\tau} = \vec{L} \times \vec{F}$$

$$\left|\vec{\tau}\right| = FL\sin\phi = Fd$$

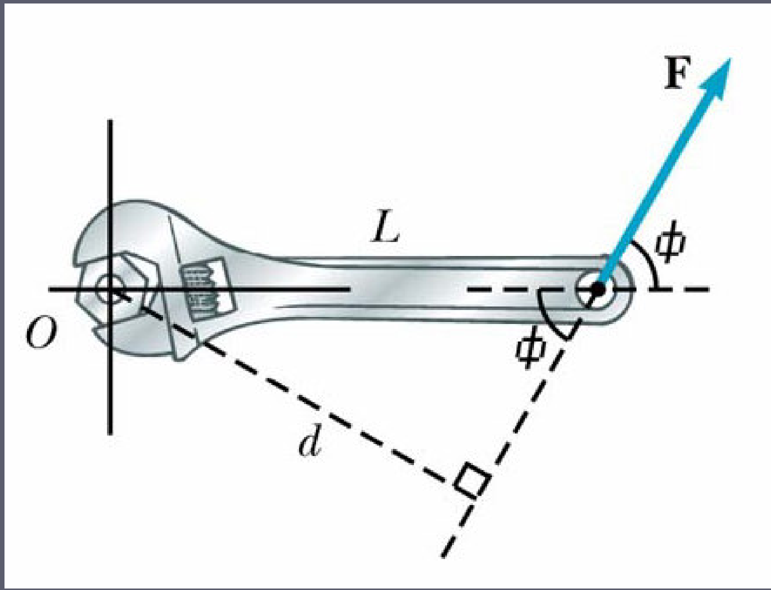
$$\vec{\tau} = \text{torsi}$$

$$\vec{L} = \text{vektor posisi titik tangkap gaya}$$

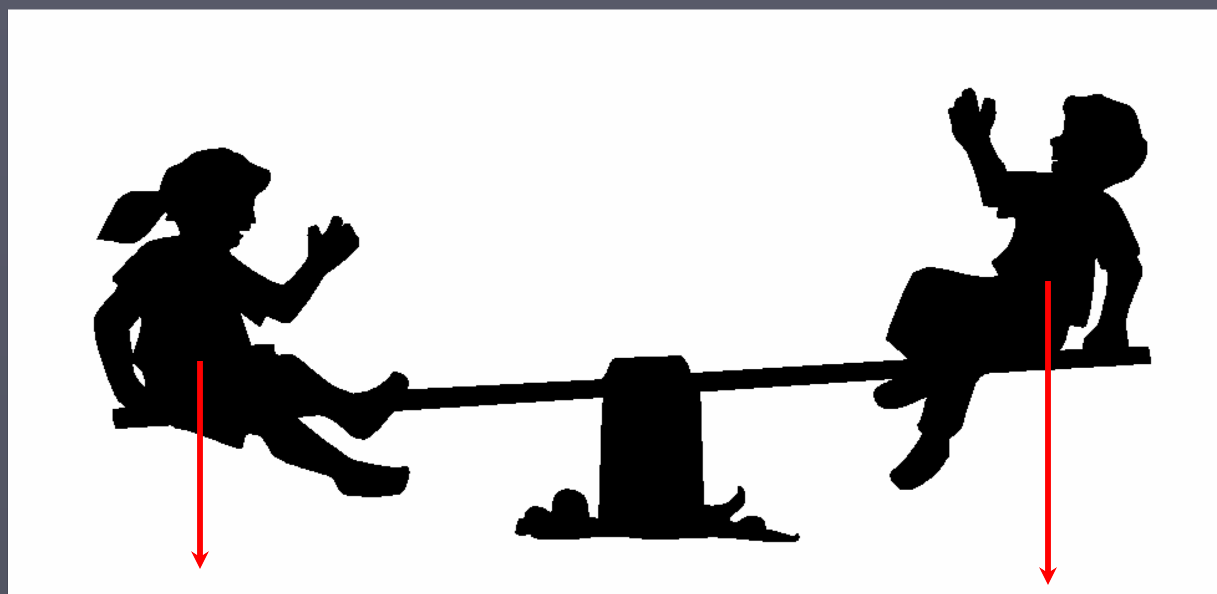
$$\vec{F} = \text{Gaya yang bekerja pada benda}$$

$$\phi = \text{Sudut antara } \vec{L} \text{ dan } \vec{F}$$

$$d = \text{Lengan gaya} = L\sin\phi$$



Bagaiman jika dua atau lebih gaya yang berbeda bekerja pada lengan-lengan gaya?

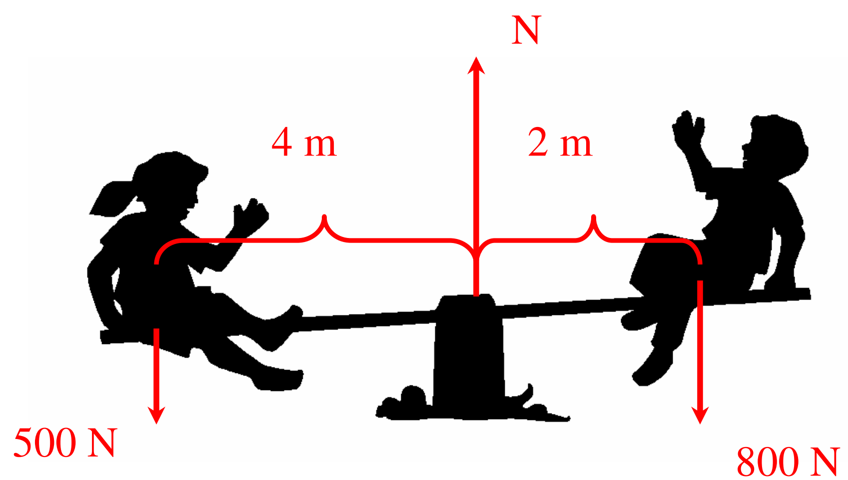


Torsi Neto

- Torsi neto adalah jumlah semua torsi yang dihasilkan oleh semua gaya
  - Ingat untuk menghitung arah kecenderungan rotasi
    - Berlawanan arah dengan arah jarum jam torsi positif
    - Searah dengan jarum jam torsi negatif

Latihan 2

Tentukan torsi neto:



<u>Diketahui:</u>

Berat: $w_1 = 500\ N$
$w_2 = 800$ N
Lengan: $d_1 = 4\ m$
$d_2 = 2\ m$

<u>Dicari</u>:

$\Sigma\tau = ?$

$$\begin{aligned} \sum \tau &= (500\,N)(4\,m) + (-)(800\,N)(2\,m) \\ &= +2000\,N \cdot m - 1600\,N \cdot m \\ &= +400\,N \cdot m \end{aligned}$$

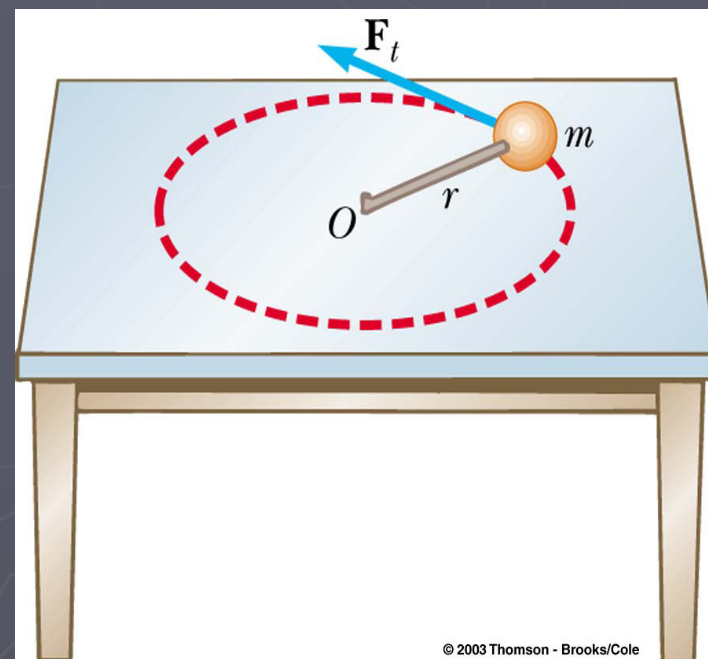
Rotasi akan berlawanan
jarum jam

Sejauh ini: torsi neto sama dengan nol.

Bagaimana jika tidak?

Torsi dan Percepatan Sudut

- Ketika benda tegar mengalami torsi neto tidak nol ($\neq 0$), maka akan mengalami percepatan sudut
- Percepatan sudut berbanding lurus dengan torsi neto
  - Hubungannya analogi dengan $\sum F = ma$
    - Hukum II Newton



Animasi 7-2

Torsi dan Percepatan sudut (lanjutan)

$\mathbf{F_t = ma_t}$, **kalikan dengan r**

$\mathbf{F_t r = (ma_t)\, r}$

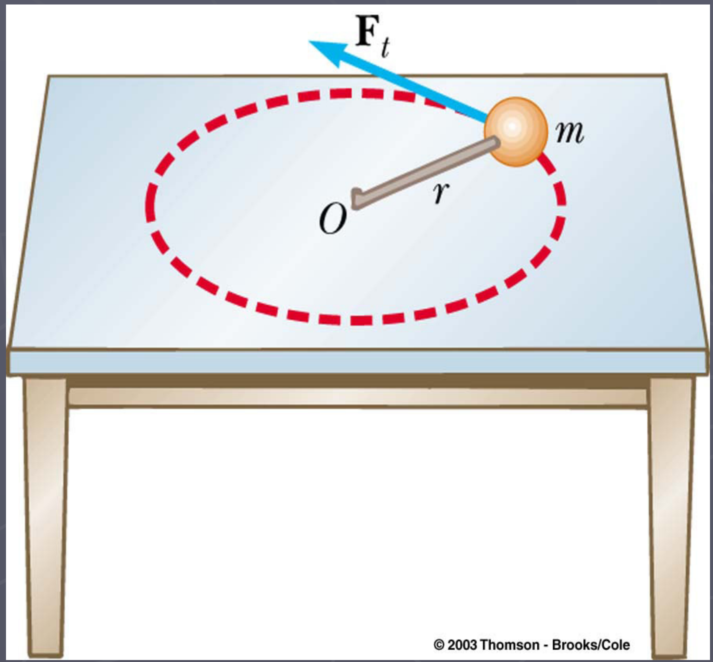
percepatan tangensial :

$\mathbf{a_t = r\alpha}$, **so**

$$\underbrace{F_t r}_{\text{torsi } \tau} = \underbrace{mr^2}\alpha$$

Bergantung pada benda dan sumbu rotasi. Dinamakan momen inersia I.
Satuan: kg m^2

$$\boxed{I \equiv \Sigma m_i r_i^2}$$



$$\boxed{\tau = I\alpha}$$

Percepatan sudut berbanding terbalik dengan analogi massa dalam sistem yang berotasi

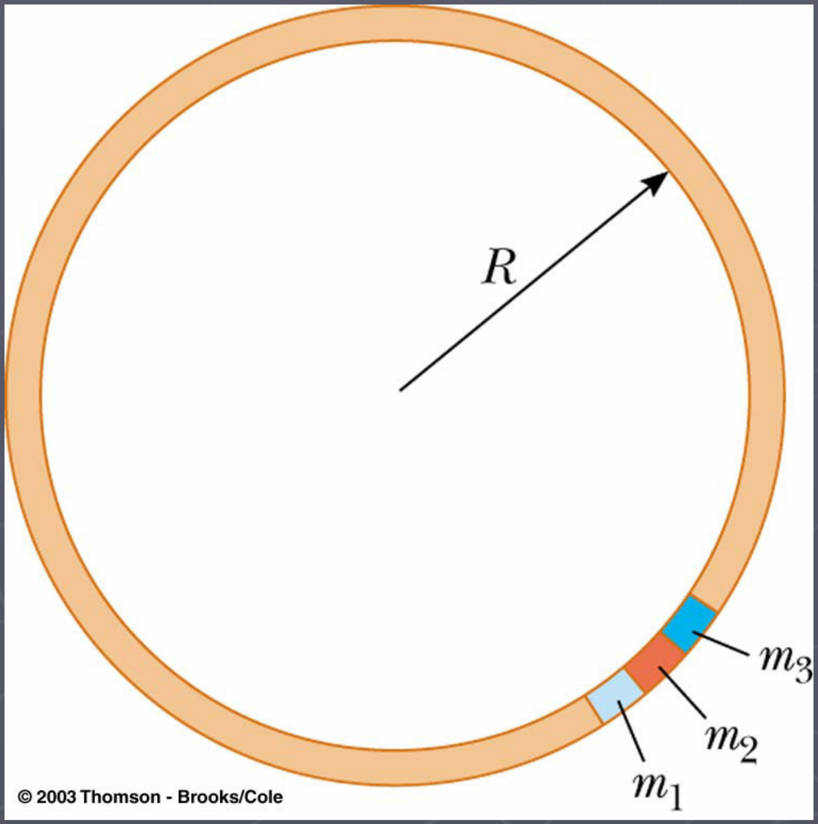
Contoh: Momen Inersia dari Cincin Uniform

- Bayangkan Cincin terbagi atas sejumlah bagian kecil, m_1 …
- Bagian kecil ini berjarak sama dari sumbu

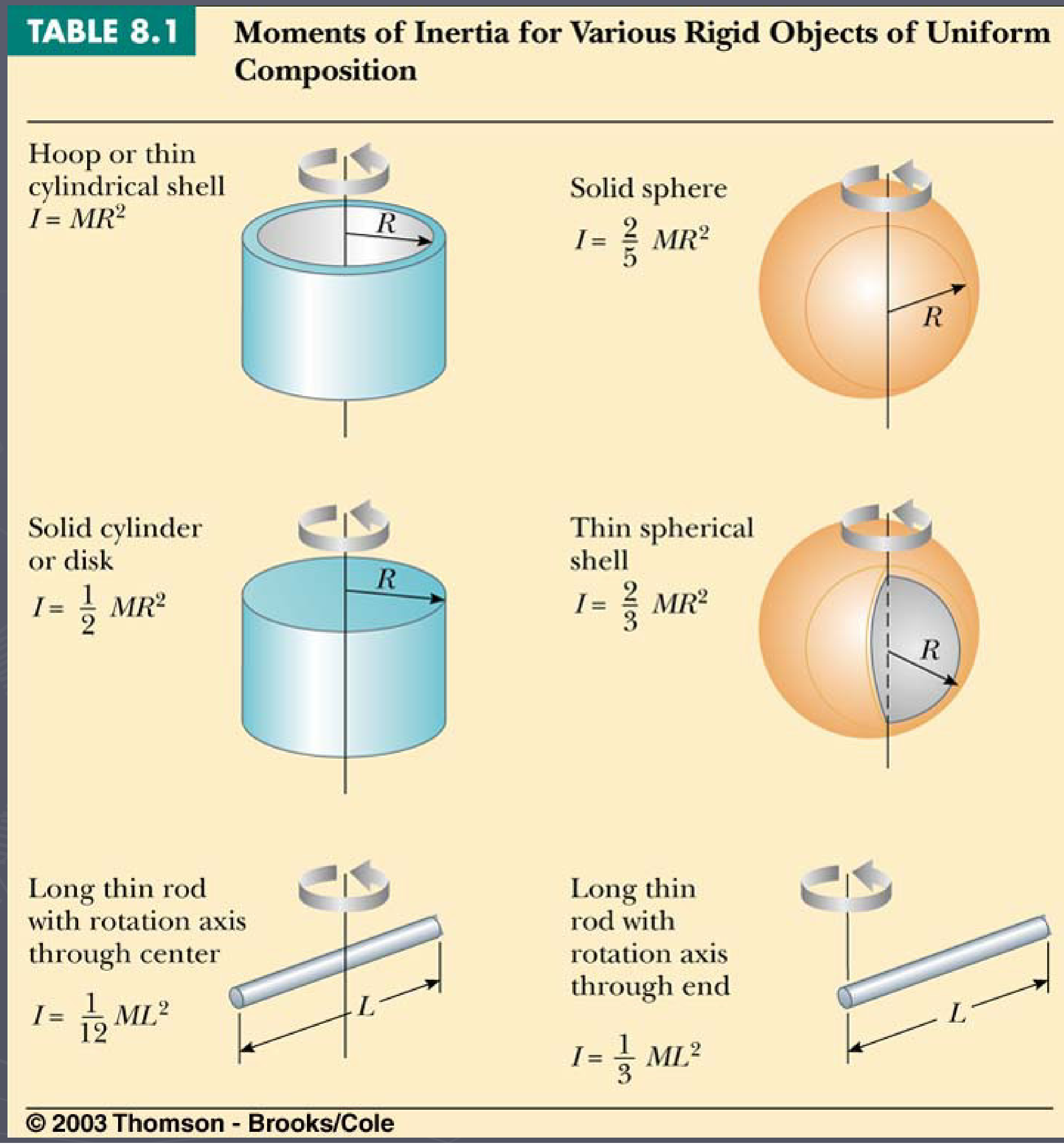
$$I = \Sigma m_i r_i^2 = MR^2$$

- Benda Kontinu:

$$I = \int r^2 dm$$



Momen Inersia yang Lain



Teorema Sumbu Sejajar

Momen Inersia terhadap sumbu sembarang I, dimana sumbu sembarang tersebut sejajar dengan sumbu rotasi yang melalui pusat masa benda adalah

$$I = I_{pm} + Mh^2$$

M : Massa total benda
h : jarak antara sumbu rotasi sembarang dengan sumbu rotasi pusat massa

Latihan 3:

1. Cari momen inersia batang homogen yang panjangnya L apabila diputar terhadap sumbu rotasi yang tegak lurus batang yang melalui titik ujungnya!
2. Cari momen inersia cincin homogen yang jejarinya R terhadap sumbu rotasi yang tegak lurus cincin dan melalui salah satu titik pada cincin tersebut!

Hukum II Newton untuk Benda Berotasi

- Percepatan sudut berbanding lurus dengan torsi neto
- Percepatan sudut berbanding terbalik dengan momen inersia benda

$$\boxed{\sum \tau = I\alpha}$$

- Terdapat perbedaan yang penting antara momen inersia dan massa inersia: momen inersia bergantung pada kuantitas materi dan *distribusinya*
- Momen inersia juga bergantung pada posisi sumbu rotasi

Energi Total Sistem yang Berotasi

- Sebuah benda yang berotasi terhadap sumbu tertentu dengan laju sudut ω, mempunyai energi kinetik rotasi $\frac{1}{2}I\omega^2$ (coba anda turunkan!!!)

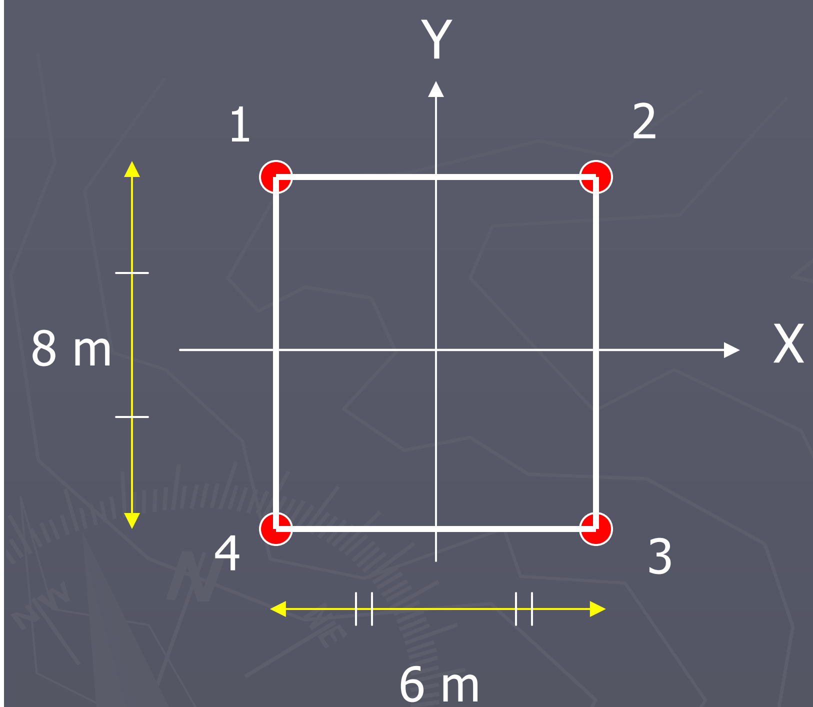
- Konsep energi dapat digunakan untuk penyederhanaan analisis gerak rotasi

- Kekekalan energi mekanik

$$\boxed{(\mathbf{EK}_t + \mathbf{EK}_r + \mathbf{EP}_g)_i = (\mathbf{EK}_t + \mathbf{EK}_r + \mathbf{EP}_g)_f}$$

  - Ingat, ini untuk gaya konservatif, tidak ada gaya disipasi seperti gaya gesek

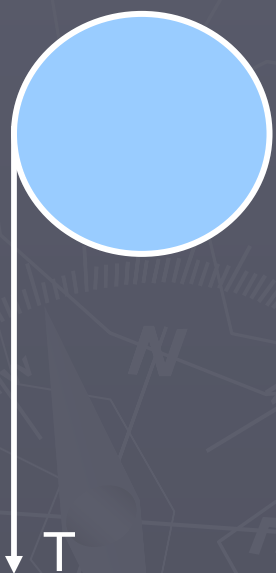
Latihan 4



Sebuah benda tegar terdiri dari empat buah partikel bermassa m_1 = 2 kg, m_2 = 3 kg, m_3 = 4 kg dan m_4 = 5 kg. Masing-masing benda dihubungkan dengan batang yang massanya masing-masing 1 kg.
Tentukan energi kinetik sistem ketika berputar dengan kecepatan sudut 2 rad/s terhadap sumbu:

a. X
b. Y
c. Z

Latihan 5



Roda berjejari 0,5 m dapat berputar pada sumbu horisontal melalui sumbu pusatnya. Momen inersianya terhadap sumbu tersebut adalah 2 kg m^2.

a. Apabila tali yang dililitkan pada roda ditarik dengan tegangan tetap 10 N, tentukan percepatan sudut, kecepatan sudut dan energi kinetik roda pada t = 2 s. Pada t = 0 roda diam. (Petunjuk: gunakan Hk. II Newton)

b. Bila roda tersebut diputar dengan menggantungkan beban ber massa 2 kg di ujung tali di atas, tentukan kecepatan beban saat beban turun sejauh 2 m!
(Petunjuk: gunakan Hk. Kekekalan Energi Mekanik)

Momentum Sudut dan Kekekalan Momentum Sudut

Momentum Sudut

- Serupa dengan hubungan antara gaya dan momentum dalam sistem linier, kita dapat tunjukan hubungan antara torsi dan momentum sudut
- Momentum sudut didefinisikan sebagai L = I ω

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \text{(bandingkan dengan } \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}\text{)}$$

- Jika torsi neto nol, momentum sudut konstan
- Pernyataan *Kekekalan momentum sudut* : Momentum sudut dari sebuah sistem adalah kekal ketika torsi neto eksternal yang bekerja pada sistem adalah nol
  - Ini terjadi ketika:

$$\Sigma\tau = 0, \; L_i = L_f \text{ atau } I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

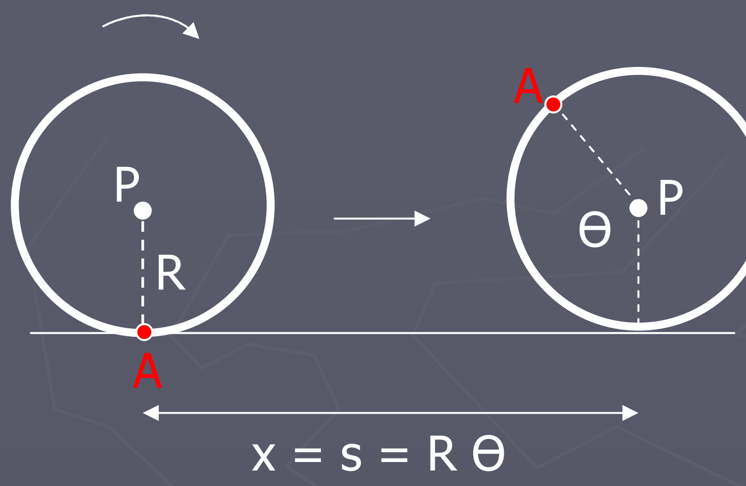
Latihan 6

Seorang penari ski es berputar dengan kedua lengannya terlentang (anggap tidak ada gaya gesekan). Kemudian dia menarik kedua lengan dan merapatkan pada tubuhnya. Dibandingkan dengan energi kinetik rotasi awal, energi kinetik rotasi setelah penari tersebut menarik lengannya haruslah bernilai …

a. sama
b. lebih besar
c. lebih kecil

Gerak Menggelinding

1. Gerak Menggelinding Murni (tanpa selip)



Gerakannya merupakan kombinasi antara gerak rotasi terhadap pusat massa P dan gerak translasi dari pusat massa P tersebut

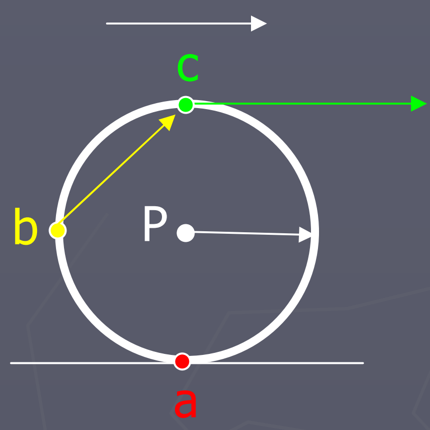
Posisi, kecepatan dan percepatan pusat massa roda yang menggelinding murni:

$$x = R\theta$$

$$v_p = \frac{dx}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

$$a_p = \frac{dv_p}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha$$

Lanjutan Gerak Menggelinding Murni



Kecepatan titik a, P dan c terhadap tanah adalah v_a , v_p dan v_c , berapa besar dan kemana arahnya!

$$\vec{v}_a = \vec{v}_{aT} = \vec{v}_{aP} + \vec{v}_{PT} = \omega R(-\hat{i}) + \omega R(\hat{i}) = 0$$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{PT} = \vec{v}_{PP} + \vec{v}_{PT} = 0 + \omega R(\hat{i}) = \omega R\,(\hat{i}) = \omega\ AP\,(\hat{i})$$

$$\vec{v}_c = \vec{v}_{cT} = \vec{v}_{cP} + \vec{v}_{PT} = \omega R(\hat{i}) + \omega R(\hat{i}) = \omega 2R\,(\hat{i}) = \omega\ AC(\hat{i})$$

Bagaimana dengan kecepatan titik b!

$$\vec{v}_b = \vec{v}_{bT} = \vec{v}_{bP} + \vec{v}_{PT} = \omega R(\hat{j}) + \omega R(\hat{i})$$

$$\left|\vec{v}_b\right| = \omega R\sqrt{2} = \omega\ AB$$

Dari hasil di atas, gerak ini dapat dipandang sebagai:
Gerak rotasi murni roda terhadap sumbu sesaat yang melalui titik sentuh a dengan kecepatan sudut ω

Sehingga energi kinetik roda yang menggelinding adalah $K = \frac{1}{2} I_a \omega^2$ dengan I_a adalah momen inersia roda terhadap sumbu yang melalui a

Lanjutan Gerak Menggelinding Murni

Teorema Sumbu Sejajar: $I_a = I_{PM} + M R^2$, maka Energi Kinetik (K) menjadi

$$K = ½ \, (I_{PM} + M R^2) \, \omega^2 = ½ \, I_{PM} \, \omega^2 + ½ \, M R^2 \, \omega^2$$

$$K = \boxed{½ \, I_{PM} \, \omega_2} + \boxed{½ \, M \, v^2_{pm}}$$

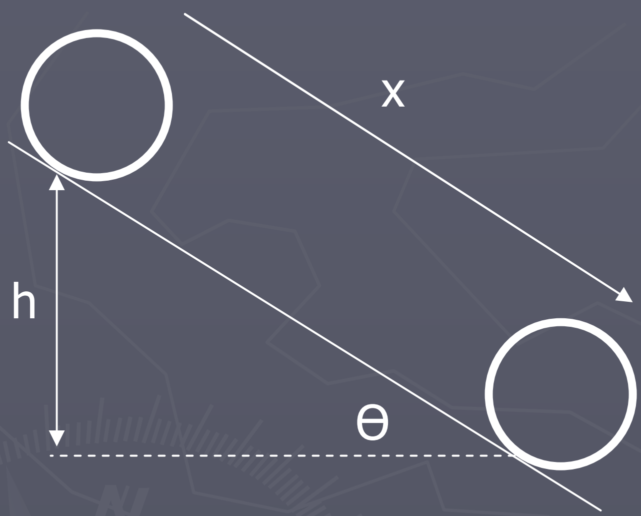
Energi kinetik rotasi terhadap pusat massa

Energi kinetik translasi pusat massanya

Kesimpulan

Energi kinetik total benda yang menggelinding adalah jumlah dari energi kinetik rotasi terhadap pusat massa dan energi kinetik translasi pusat massanya

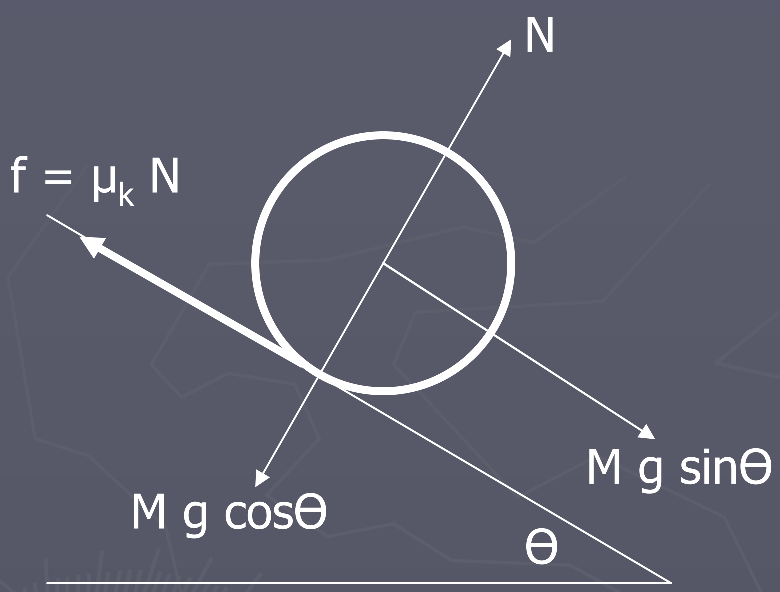
Latihan 6



Andaikan roda mula-mula diam, kemudian bergerak menggelinding murni (tanpa selip). Jika roda berupa tabung pejal serba sama, hitung berapa percepatan turunnya pusat massa tabung pejal tersebut dengan menggunakan:

a. Hk. Kekekalan energi mekanik
b. Hk. Newton
c. Bagaimana syarat terjadinya gerak menggelinding murni pada bidang miring tsb. (cari hubungan antara Θ dan μ_s)

2. Gerak Menggelinding Tergelincir (selip)



Persamaan-persamaan yang berlaku:

$$Mg\sin\theta - f = Ma_p$$

$$f = \mu_k N$$

$$N = Mg\cos\theta$$

$$\tau = fR = I\alpha$$

Dengan substitusi diperoleh:

$$a_p = g(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)$$

$$\alpha = \frac{\mu_k MgR\cos\theta}{I}$$

Terlihat bahwa antara a_p dan α tidak terdapat hubungan yang sederhana seperti ketika pada kasus menggelinding murni

Kerangka Acuan Inersial dan Non Inersial

PR

Buku Haliday & Resnick

Hal 379 no. 28 & 29

Hal 381 no. 39, 42 & 45

Hal 411 no. 21