SKALAR DAN VEKTOR

- **Skalar**
  Merupakan suatu besaran yang mempunyai **nilai mutlak tertentu**.
  Contoh : massa, volume, temperatur, energi.

- **Vektor**
  Merupakan suatu besaran yang mempunyai **nilai mutlak dan arah tertentu.**
  Contoh : gaya, kecepatan, percepatan.

Vektor

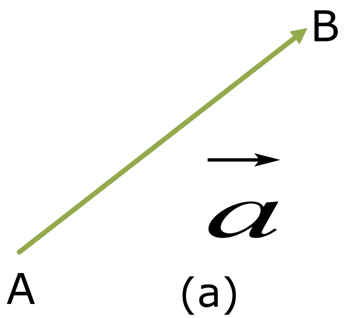
: Vektor merupakan besaran yang mempunyai arah.

Contoh: Gaya, Kecepatan, Percepatan.

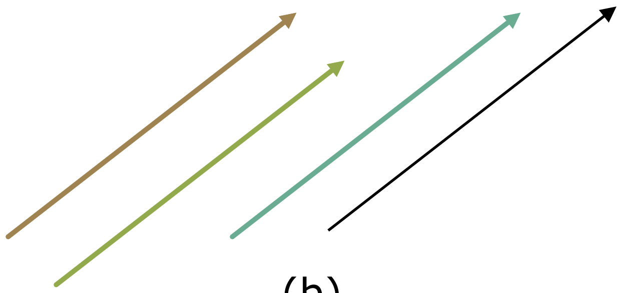
Secara geometri

- Setiap vektor dinyatakan sebagai **segmen garis berarah** pada bidang atau ruang, dengan **notasi garis berpanah**.
  Ekor panah garis tersebut merupakan titik awal vektor, sedangkan ujung panah sebagai titik akhir (ujung) vektor tersebut. **(contoh (a))**
- Vektor-vektor yang mempunyai panjang dan arah yang sama dinamakan ***ekivalen*. (contoh (b))**

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$$



(a)



(b)

- Ekor dari panah disebut ***titik pangkal vektor.***
- Ujung panah disebut ***titik ujung vektor.***
- **Vektor ditulis dalam huruf kecil tebal (a, k, v, w,** dan **x**), sedangkan Skalar ditulis dengan huruf kecil miring (*a, k, v, w,* dan *x*)
- Jika u menyatakan ruas garis berarah dari A ke B, maka ditulis dengan lambang ū = $\overrightarrow{AB}$, panjang vektor u dinyatakan dengan |u| dan panjang vektor AB dinyatakan dengan $\left|\overrightarrow{AB}\right|$

Operasi-Operasi pada ruang vektor :

- **Penjumlahan/Pengurangan**

$$\bar{u} + \bar{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$$

- **Perkalian dengan skalar Riil sebarang (*k*)**

$$k\bar{u} = (ku_1, ku_2, \ldots, ku_n)$$

- **Perkalian Titik (*Euclidean inner product*)**

$$\bar{u} \bullet \bar{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n$$

- **Panjang vektor didefinisikan oleh :**

$$\|\bar{u}\| = (\bar{u} \bullet \bar{u})^{1/2} = \sqrt{u_1^{\,2} + u_2^{\,2} + \ldots + u_n^{\,2}}$$

- **Jarak antara dua vektor didefinisikan oleh :**

$$d(\bar{u}, \bar{v}) = \|\bar{u} - \bar{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \ldots + (u_n - v_n)^2}$$

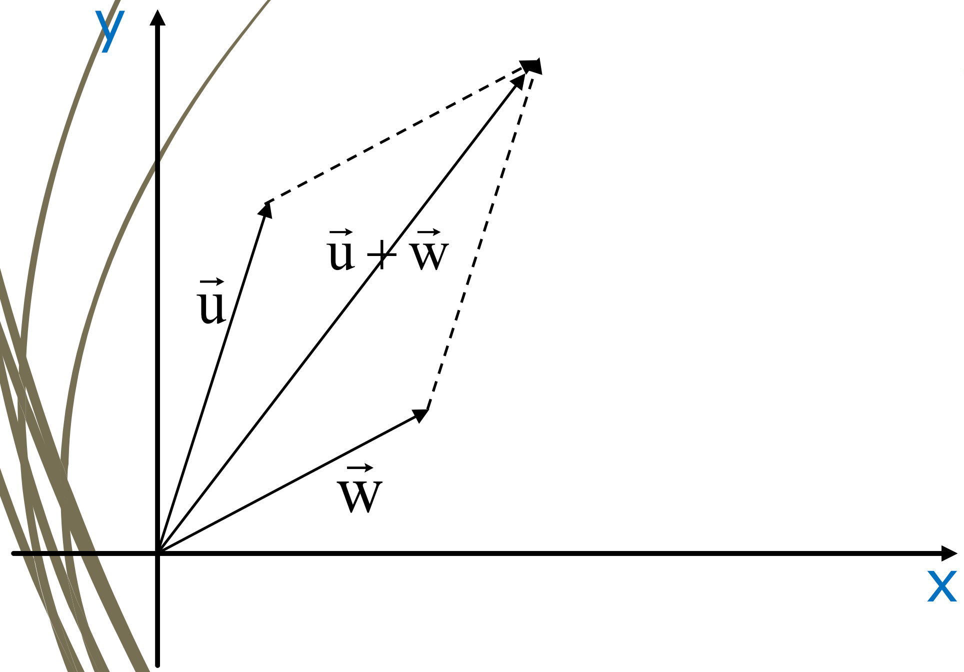
Operasi Vektor

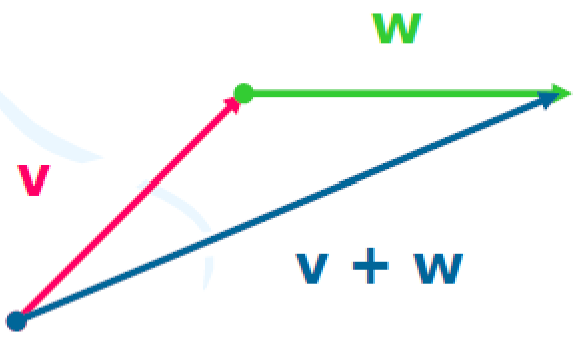
1. Penjumlahan

Misal $\vec{u} = (x_1, y_1)$ dan $\vec{w} = (x_2, y_2)$ vektor di R², maka

$$\vec{u} + \vec{w} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

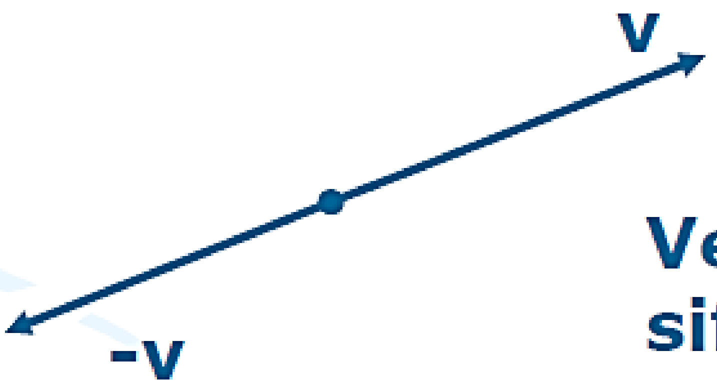
Secara geometri





$$\boxed{v + w = w + v}$$

- Vektor yang panjangnya nol disebut vektor nol dan dinyatakan dengan 0.
- Jika v adalah sebarang vektor tak nol, maka **−v, negatif dari v,** didefinisikan sebagai vektor yang besarnya sama dengan v, tetapi **arahnya terbalik.**



Vektor ini mempunyai sifat :

v + (-v) = 0

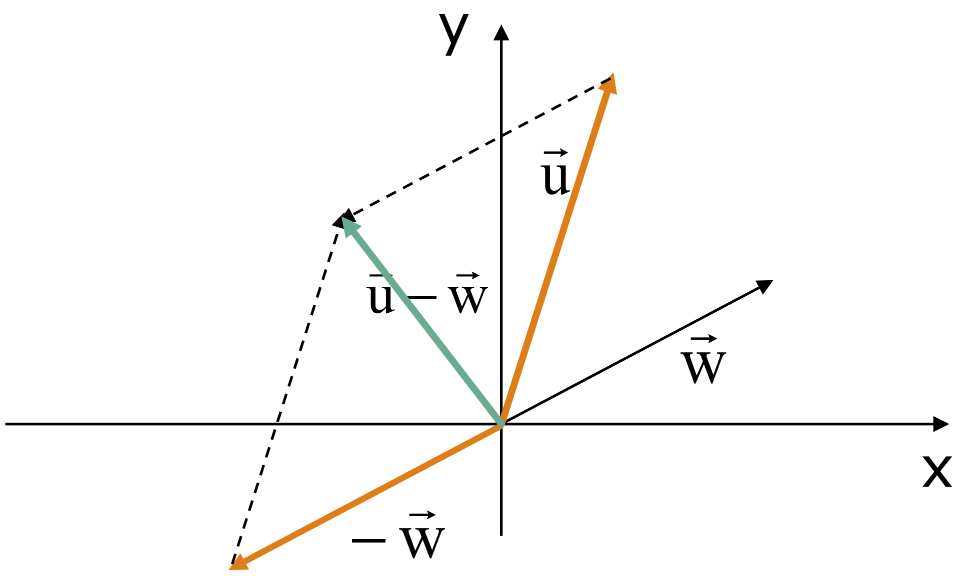
Operasi Vektor

2. Penguragan

Misal $\vec{u} = (x_1, y_1)$ dan $\vec{w} = (x_2, y_2)$ vektor di R^2, maka

$$\vec{u} - \vec{w} = \vec{u} + (-\vec{w}) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

Secara geometri



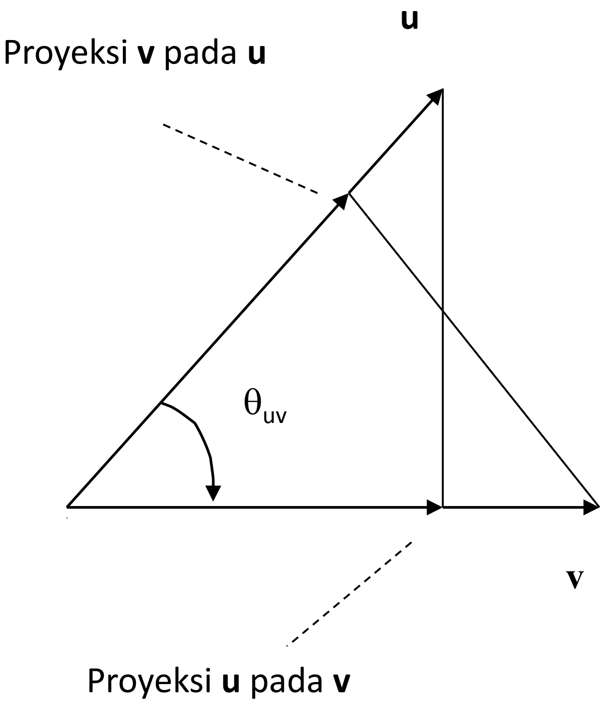
Operasi Vektor

3. Perkalian titik

:Hasilnya skalar

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right| \cos\theta_{uv}$$

$$= \left|\vec{v}\right|\left|\vec{u}\right| \cos\theta_{uv} = \vec{v} \bullet \vec{u}$$



$$\boxed{u.v = \begin{cases} |u||v|\cos\theta & \text{jika } u \neq 0 \text{ dan } v \neq 0 \\ 0 & \text{jika } u = 0 \text{ atau } v = 0 \end{cases}}$$

- $\mathbf{u}.\mathbf{v} = u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3 \rightarrow R_3$
- $\mathbf{u}.\mathbf{v} = u_1.v_1 + u_2.v_2 \rightarrow R_2$

CONTOH :

$\mathbf{u} = (2,-1,1)$ dan $\mathbf{v} = (1,1,2)$,

Carilah **u.v** serta tentukan sudut antara **u** dan **v**

Diketahui vektor $\boldsymbol{v} = (2, -1, 1)$ dan $\boldsymbol{w}=(1, 1, 2)$

Carilah $\boldsymbol{v.w}$ dan tentukan sudut antara $\boldsymbol{v}$ dan $\boldsymbol{w}$.

Jawab :

$v.\,w = (2).(1) + (-1).(1) + (1)(2) = 2 - 1 + 2 = 3$

$$\|v\| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

$$\|w\| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

Jadi $\cos\theta = \dfrac{3}{6} = \tfrac{1}{2}$, maka sudut antara v dan w adalah 60°

Hitunglah

(a) $\mathbf{v}_1 = (3,6)$ (b) $\mathbf{v}_2 = (-4, -8)$ (c) $\mathbf{v}_3 = (5,-4)$

Hitunglah !

(i) $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$ dan $\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3$

(ii) $\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2$ dan $\mathbf{v}_3-\mathbf{v}_2$

(iii) $k.\mathbf{v}_1$, $k.\mathbf{v}_2$, **dan** $k.\mathbf{v}_3$ jika $k = 3$

4

Panjang & Jarak Vektor

- **Panjang suatu vektor u dinyatakan dengan |u|.**

Untuk ruang berdimensi 2.

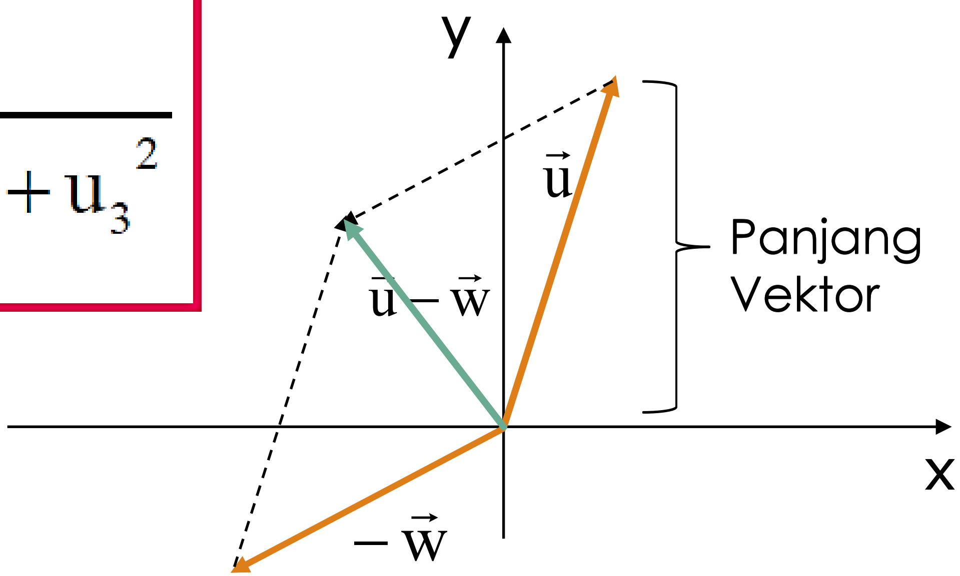
$\mathbf{u} = (u_1, u_2)$

$$|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

Untuk ruang berdimensi 3.

$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$

$$|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$



Misal ada $P_1(x_1,y_1,z_1)$ dan $P_2(x_2,y_2,z_2)$ adalah dua titik dalam ruang berdimensi-3, maka *jarak* d antara kedua titik tsb adalah

$$\overline{P_1P_2} = \left(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\right)$$

$$d = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2}$$

Sudut Antar Vektor

- Jika **u** dan **v** adalah vektor-vektor tak nol, maka :

$$\boxed{\cos\theta = \frac{u.v}{|u||v|}}$$

Hasil kali titik bisa digunakan untuk memperoleh informasi mengenai sudut antara 2 vektor.

- Jika u dan v adalah vektor-vektor tak nol dan θ adalah sudut antara kedua vektor tersebut, maka :

  θ lancip **jika dan hanya jika $u.v>0$**

  θ tumpul **jika dan hanya jika $u.v<0$**

  $\theta = \pi/2$ **jika dan hanya jika $u.v=0$**

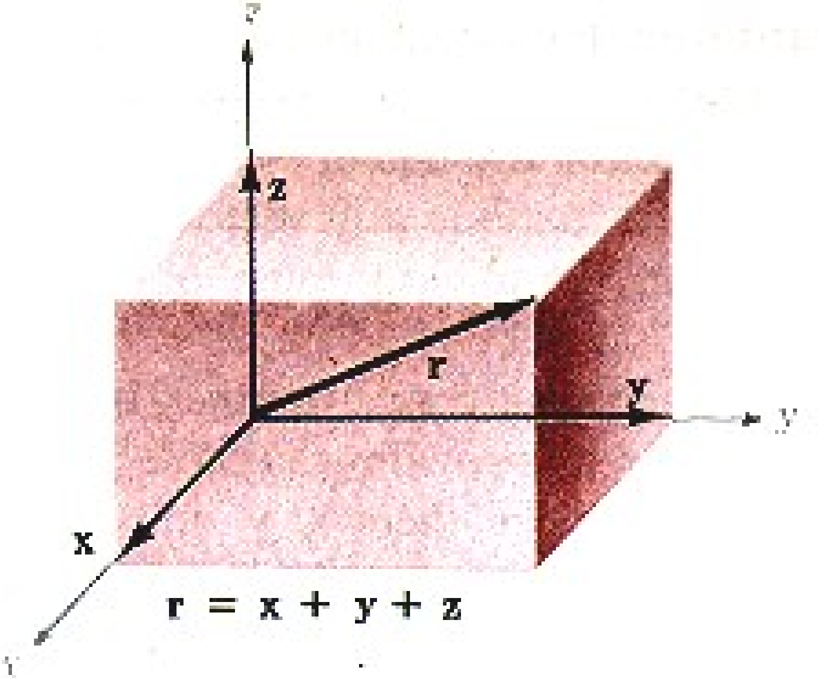
SISTEM KOORDINAT DALAM DIMENSI R3

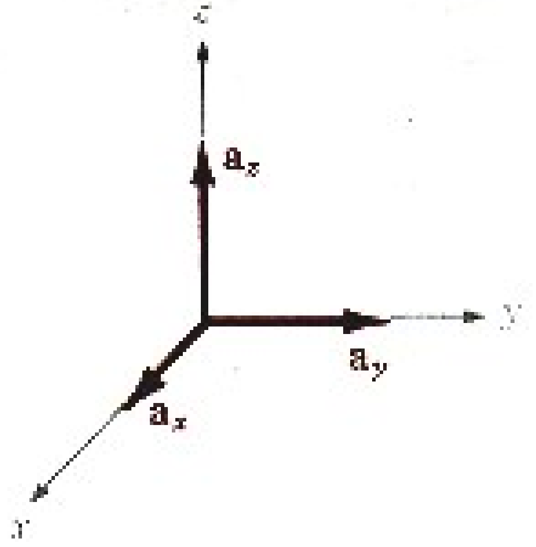
- **Vektor**

  Dinyatakan dengan tiga buah vektor satuan $\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$ dan $\mathbf{a}_z$

  Contoh : $\mathbf{r} = \mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z} = x\,\mathbf{a}_x + y\,\mathbf{a}_y + z\,\mathbf{a}_z$

  vektor posisi dari sebuah titik dalam ruang

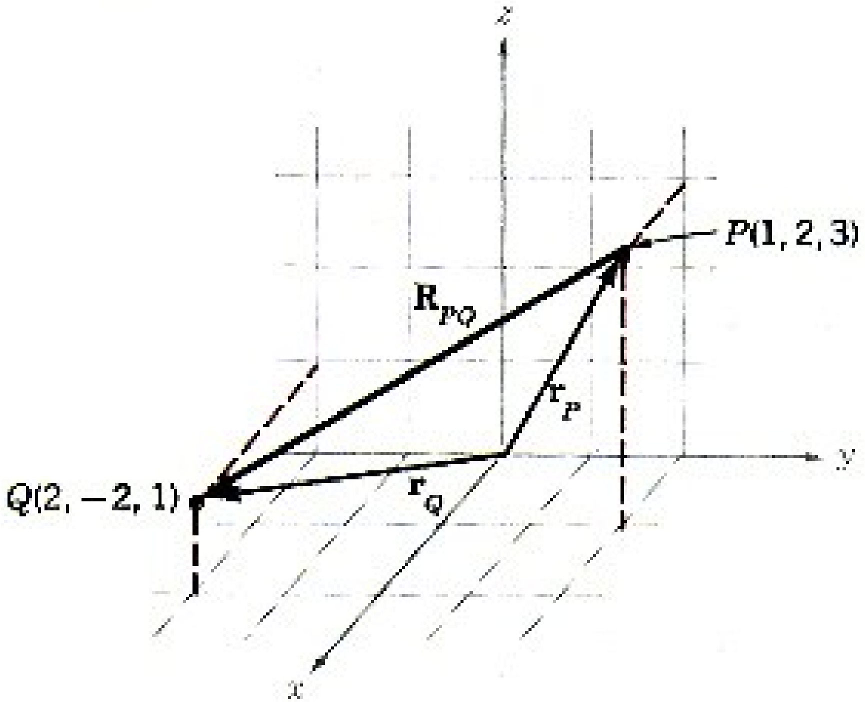




- **Vektor Posisi Dimensi R3**

$$\vec{r}P = \vec{a}_x + 2\vec{a}_y + 3\vec{a}_z$$

$$\vec{r}Q = 2a_x - 2\vec{a}_y + \vec{a}_z$$



- **Vektor antara 2 titik**

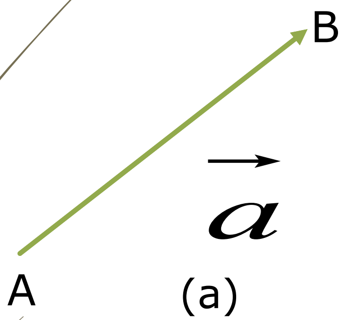
$$\vec{R}_{PQ} = \vec{r}_P - \vec{r}_Q = (2-1)\vec{a}_x + (-2-2)\vec{a}_y + (1-3)\vec{a}_z$$

$$= \vec{a}_x - 4\vec{a}_y - 2\vec{a}_z$$

Vektor

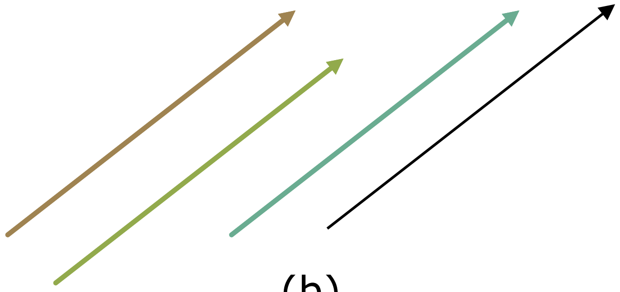
1. Besaran yang mempunyai **panjang (besar) dan arah**

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$$



$\vec{a}$

(a)



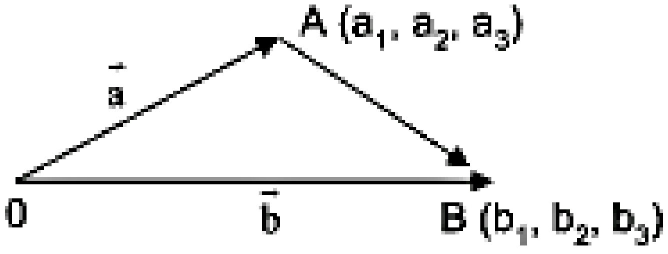
(b)

Ekivalen

2. Jika suatu titik A (a_1, a_2, a_3) dalam ruangan/bidang dan O titik pangkal

Maka , $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = \begin{pmatrix} a1 \\ a2 \\ a3 \end{pmatrix}$ atau $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_1 \vec{k}$

3. Vektor dapat dijumlahkan dengan aturan jajaran genjang atau aturan segitiga



$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$
$$\longrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$
$$\longrightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$\longrightarrow \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} \text{ dan } \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

PANJANG VEKTOR

- **Panjang suatu vektor u dinyatakan dengan |u|.**

Untuk ruang berdimensi 2.

u = (u_1, u_2)

$$|u| = \sqrt{u_1^{\ 2} + u_2^{\ 2}}$$

Untuk ruang berdimensi 3.

u = (u_1, u_2, u_3)

$$|u| = \sqrt{u_1^{\ 2} + u_2^{\ 2} + u_3^{\ 2}}$$

Contoh :

Diketahui $\bar{u} = (1, 1, 2, 3)$ dan $\bar{v} = (2, 2, 1, 1)$

Tentukan panjang vektor dan jarak antara vektor $\overrightarrow{vu}$ tersebut

Jawab:

Panjang vektor :

$$\|\bar{u}\| = (\bar{u} \bullet \bar{u})^{1/2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{15}$$

$$\|\bar{v}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

Jarak kedua vektor

$$d(\bar{u}, \bar{v}) = \|\ \bar{u} - \bar{v}\ \| = \sqrt{(1-2)^2 + (1-2)^2 + (2-1)^2 + (3-1)^2}$$

$$= \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 2^2}$$

$$= \sqrt{7}$$

4. Jika $\vec{a} = \begin{pmatrix} a1 \\ a2 \\ a3 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \\ b3 \end{pmatrix}$ maka, (i) $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a1 + b1 \\ a2 + b2 \\ a3 + b3 \end{pmatrix}$

(ii) Untuk = bilangan real skalar $m\vec{a} = m\begin{pmatrix} a1 \\ a2 \\ a3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma1 \\ ma2 \\ ma3 \end{pmatrix}$

5. Jika $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$

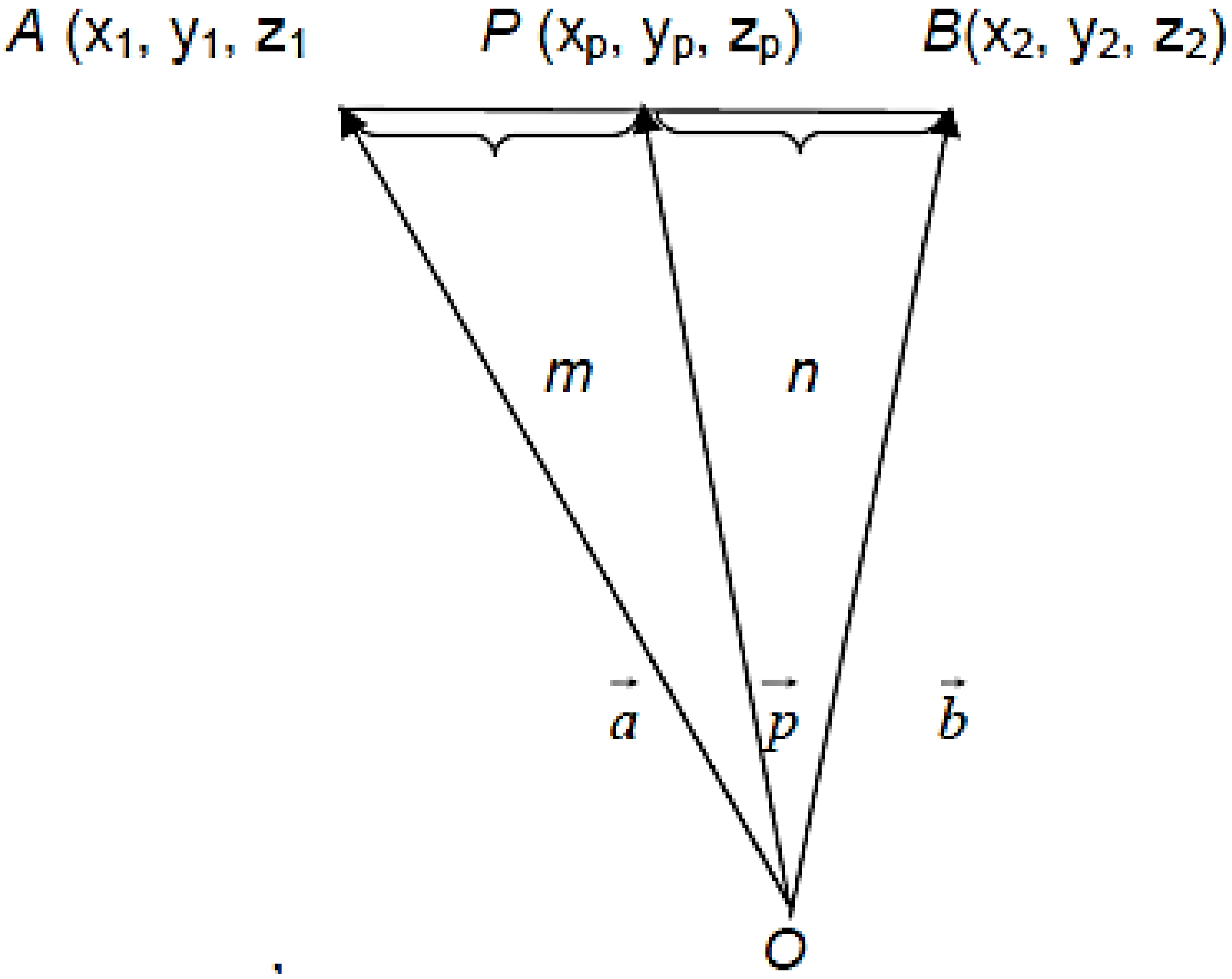
$\overrightarrow{OB} = \vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$

dan P terletak pada $\overrightarrow{AB}$ dengan perbandingan $\overrightarrow{AP} : \overrightarrow{PB} = m : n$ atau $\left(n\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{PB}\right)$

Maka, $\overrightarrow{OP} = \vec{P} = \dfrac{n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}}{m+n}$

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} = \frac{m\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}}{m+n}$$

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} = \frac{1}{m+n}\begin{pmatrix} mx_2 + nx_1 \\ my_2 + ny_1 \\ mz_2 + nz_1 \end{pmatrix}$$



Sehingga diperoleh

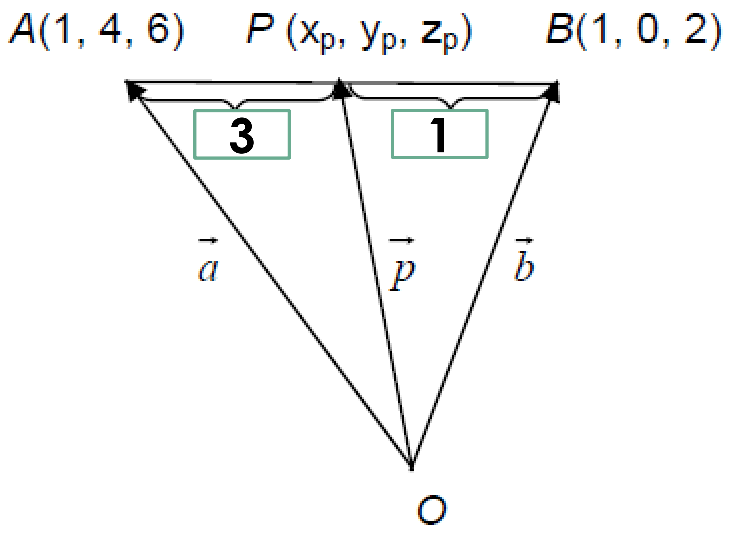
$x_p = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$; $y_p = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}$; $z_p = \frac{mz_2 + nz_1}{m+n}$ (terbukti)

CONTOH

Carilah koordinat titik *P* dan *Q* yang membagi garis yang menghubungkan *A*(1, 4, 6) dan *B*(1, 0, 2) di dalam dan di luar dengan perbandingan 3 : 1

Jawab:

(i) Titik *P* membagi di dalam



$$x_p = \frac{3\cdot 1 + 1\cdot 1}{3+1} = \frac{3+1}{4} = 1$$

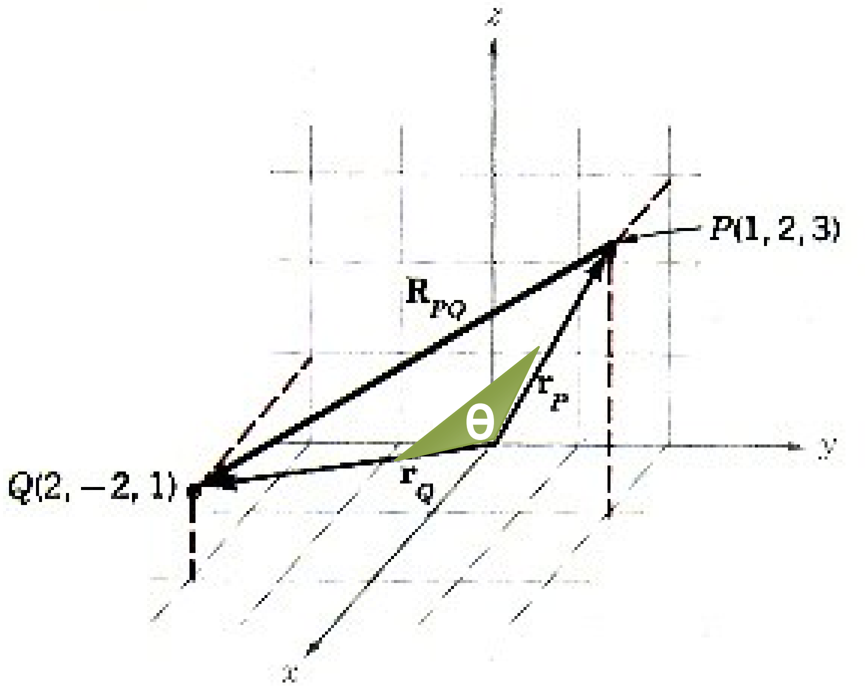
$$y_p = \frac{3\cdot 0 + 1\cdot 4}{3+1} = \frac{0+4}{4} = 1$$

$$z_p = \frac{3\cdot 2 + 1\cdot 6}{3+1} = \frac{6+6}{4} = 3$$

Jadi, koordinat *P* (1, 1, 3)

6. Jika $\vec{a} = \begin{pmatrix} a1 \\ a2 \\ a3 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \\ b3 \end{pmatrix}$ maka, (i) $\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta_{ab}$$
$$= |\vec{b}||\vec{a}| \cos\theta_{ba} = \vec{b} \bullet \vec{a}$$



Hasil kali titik bisa digunakan untuk memperoleh informasi mengenai sudut antara 2 vektor.

- Jika u dan v adalah vektor-vektor tak nol dan θ adalah sudut antara kedua vektor tersebut, maka :

θ lancip	**jika dan hanya jika u.v>0**
θ tumpul	**jika dan hanya jika u.v<0**
θ =π/2	**jika dan hanya jika u.v=0**

CONTOH

v = (2, -1, 1) dan w = (1, 1, 2)

Hitunglah tentukan sudut antara $\vec{v}$ dan $\vec{w}$

JAWABAN

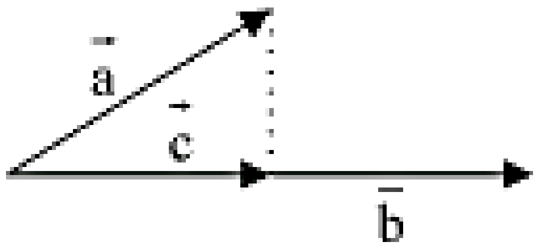
$$v.\,w = (2).(1) + (-1).(1) + (1)(2) = 2 - 1 + 2 = 3$$

$$\|v\| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

$$\|w\| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

Jadi $\text{Cos}\ \theta = \dfrac{3}{6} = \frac{1}{2}$, maka sudut antara v dan w adalah 60°

7.



Jika $\vec{c} =$ proyeksi vektor $\vec{a}$ pada vektor $\vec{b}$

Maka $$\vec{c} = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2} \bullet \vec{b}$$ **(Proyeksi vektor)**

Dan $$\left|\vec{c}\right| = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$$ **(Proyeksi skalar)**

Hitunglah

1. Diketahui vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ maka $2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c} = \ldots.$

2. Bila vektor $\vec{a} \,\&\, \vec{b}$ membentuk sudut 60º $\left|\vec{a}\right| = 4 \,\&\, \left|\vec{b}\right| = 10$

   maka $\vec{a}\left(\vec{b} + \vec{a}\right) = \ldots$

3. Proyeksi skalar vektor $\vec{a}$ pada $\vec{b}$ adalah 6

   Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ -4 \\ y \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ serta $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{89}$, maka nilai x….

4. Diketahui titik A (5, 7, 2) dan B (-3, -1, 6). Titik D membagi AB diluar

   dengan perbandingan -1 : 3. Panjang $\overrightarrow{AD}$ …..

"FINISH"