

**Bahar Sinring
Hamzah Hafied**

RISET OPERASI **(OPERATION RESEARCH)**

KRETAKUPA *Print*
MAKASSAR



RISET

OPERASI

(Operation Research)

Bahar Sinring
Hamzah Hafied

KRETAKUPA *Print.*
Makassar

Perpustakaan Nasional RI Katalog Dalam Terbitan

Bahar Sinring - Hamzah Hafid -

**RISET OPERASI
(Operation Research)**

Oleh : - Prof. Dr. H. Bahar Sinring, SE, M.S

- H. Hamzah Hafid, SE, M.S, Ph.D -

Cetakan I - 2012

KRETAKUPA Print, Makassar

iv. 118 hal. : 23,5x15,5

ISBN 978-602-9060-99-7



Hak Cipta 2012 pada penulis

Dilarang mengutip sebagian atau seluruh isi buku ini
dengan cara apapun, termasuk dengan cara penggunaan
mesin foto copy tanpa izin penerbit

Desain Cover : A. Asraf Bunyamin

Dicetak oleh Percetakan :

KRETAKUPA Print Makassar

www.kretakupa.com

e-mail : boenharun@yahoo.co.id

Isi diluar tanggung jawab percetakan

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan kehadirat Allah Subhanahu Wataalah atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga Buku Ajar Riset Operasi (Operation Research) dapat diwujudkan.

Buku Riset Operasi ini disusun dengan maksud agar para pengguna baik mahasiswa maupun praktisi dapat dengan mudah memahami bagaimana proses penelitian operasional dilakukan, misalnya dalam menentukan fungsi tujuan, menentukan fungsi kendala. Identifikasi masalah, dan bagaimana menginterpretasi model-model penelitian operasional dengan baik.

Penulis berharap semoga buku ini dapat bermanfaat bagi para mahasiswa dan pembaca pada umumnya. Tentunya kehadiran buku ini masih jauh dari apa yang diharapkan, karena adanya keterbatasan kemampuan penulis dalam mengungkapkan isi, maupun dalam merangkai kata-kata yang mudah dimengerti pembaca. Kritikan dan saran dari pembaca akan menjadi masukan yang berharga guna penyempurnaan buku ini.

Akhirnya dengan ini kami mengharapkan semoga Buku Ajar ini dapat dijadikan petunjuk dan dipergunakan dengan sebaik-baiknya.

Makassar Januari 2012

Bahar Siring & Hamzah Hafied

DAFTAR ISI

	Halaman
Pengantar	ii
Daftar Isi	iii
Daftar Tabel	v
Daftar Gambar	vi
BAB I PENDAHULUAN	1
BAB II PROGRAM LINEAR	5
1. Pengertian Program Linear	5
2. Model Baku	8
3. Metoda Analisis	10
4. Penyelesaian Dengan Metode Grafik	10
5. Penyelesaian Dengan Metode Simplex	16
6. Soal Latihan	27
BAB III ANALISIS DUAL	29
1. Model Umum	30
2. Interpretasi Dari Analisis Primal-Dual	34
3. Soal Latihan	35
BAB IV. MASALAH PENUGASAN (ASSIGNMENT PROBLEM)	36
1. Masalah Minimisasi	36
2. Masalah Maksimisasi	40
3. Soal Latihan	43

BAB V METODE TRANSPORTASI	44
1. Metode NWC	45
2. Metode biaya terkecil	46
3. Metode MODI	50
4. Metode VAM	56
5. Soal Latihan	58
BAB VI ANALISA NETWORK	60
1. Pengertian Network	60
2. Penentuan Waktu	66
3. Asumsi dan cara perhitungan waktu	67
4. Perhitungan Maju	68
5. Perhitungan Mundur	70
6. Lintasan Kritis	71
BAB VII TEORI ANTRIAN	74
1. Sejarah Teori Antrian	75
2. Pengertian Antrian	75
3. Komponen Dasar Antrian	76
4. Struktur Antrian	78
5. Mekanisme Pelayanan	80
6. Model – model Antrian	81
7. Teknik Simulasi	86
8. Perilaku Biaya	88
9. Soal Latihan	89
BAB VIII PROGRAM TUJUAN GANDA	91
1. Pengertian Program Tujuan Ganda	91
2. Model Umum Program Tujuan Ganda Tanpa Prioritas	91
3. Fungsi Kendala	94
4. Fungsi Tujuan	100
5. Metode Analisis	105

6. Model Umum Program Tujuan		
Ganda Dengan Prioritas	109
7. Soal Latihan	116
DAFTAR PUSTAKA	118

DAFTAR TABEL

Nomor	Teks	Halaman
2.1.	Keadaan PT. Khabul Group	8
2.2.	Beberapa Kombinasi antara X1 dan X2	13
2.3.	Struktur Tabel Simpleks	14
2.4.	Penyelesaian Kelayakan Pendahuluan	15
2.5.	Langkah Kedua dalam Tabel Simpleks	18
2.6.	Analisis Simpleks Permasalahan PT Khabul Group	19
2.7.	Hasil Analisis Persoalan Program Linier Dengan Program Kemasan LP 88	20
3.1.	Aturan Umum Perumusan Permasalahan Program Linier ke dalam Bentuk Primal dan Dual	24
3.2.	Hasil Analisis Dual dengan Program Kemasan LP83	27
9.1.	Perbedaan antara Program Tujuan Ganda dengan Program Linier	71
9.2.	Penyelesaian Kelayakan Pendahuluan	82
9.3.	Tahap Optimal	82
9.4.	Penyelesaian Kelayakan Pendahuluan	83
9.5.	Tahap Optimal	84
9.6.	Peringkat Prioritas Target PT Suara Merdu	86
9.7.	Tabel Simpleks	88

DAFTAR GAMBAR

Nomo	Teks	Halaman
2.1.	Wilayah Kelayakan dari Persoalan Program Linier PT. Khabul Group	10
2.2.	Titik Optimum Persoalan Program Linier PT Khabul Group	12
6.1.	Network suatu kegiatan	47
6.2.	Kegiatan A merupakan pendahulu kegiatan B Kegiatan A bisa juga ditulis (1,2) dan kegiatan B(2,3)	49
6.3.	Kegiatan C, D dan E merupakan pendahulu kegiatan F	49
6. 4.	Kegiatan G dan H merupakan pendahulu kegiatan I dan J	49
6.4.	Kegiatan L merupakan pendahulu kegiatan M dan N	50
6.5.	Gambar yang salah bila kegiatan P, Q dan R mulai dan selesai pada Kejadian yang sama	50
6.6.	Kegiatan P, Q dan R mulai dan selesai pada kejadian yang sama	51
6.8.	Lingkaran kejadian	52
•6.9.	Mulainya kejadian pada hari yang ke-nol	53

6.10. Kejadian yang menggabungkan beberapa aktivitas	53
a. Saat paling lambat untuk memulai dan saat paling lambat untuk menyelesaikan suatu aktivitas	54
6.12. Kejadian yang mengeluarkan beberapa aktivitas	54
9.1. Kendala Retidaktercapaian Tujuan Penjualan Sepatu	74
9.2. Kendala Keterlewatan Tujuan Penjualan Sepatu	75
9.3. Kendala Tujuan dengan Memperbolehkan Kedua Peubah Simpangan	76

Bab 1

PENDAHULUAN

Riset operasi merupakan suatu metode ilmiah yang memanfaatkan ilmu antardisiplin agar dapat menyajikan hubungan-hubungan fungsional yang kompleks, seperti model matematik, untuk keperluan pengambilan keputusan secara kuantitatif dan tidak termasuk masalah baru untuk analisis kuantitatif.

Riset operasi tidak hanya merupakan pengambilan keputusan model untuk memecahkan masalah, tetapi juga memberikan sumbangan untuk pengambilan keputusan bagi manajer pada tingkat bawah, menengah, dan atas. Dalam dunia bisnis dan pemerintahan, riset operasi dapat dimanfaatkan untuk perencanaan, pengorganisasian, pengarahan, dan pengendalian.

Perkembangan riset operasi tidak lepas dari perkembangan ilmu manajemen pada umumnya. Sebagaimana ilmu manajemen pada umumnya, riset operasi berkembang dari dukungan berbagai bidang ilmu, mulai dari ilmu sosial hingga ilmu keteknikan. Riset operasi menfokuskan diri pada upaya pencapaian optimasi sumber daya dengan metode kuantitatif. Walaupun demikian metode kuantitatif yang dibangun tidak serta merta mengabaikan sama sekali pertimbangan dari sisi metode kualitatif seperti pendekatan sistem dan tim.

Riset operasi banyak bertautan dengan beberapa bidang ilmu lain. Beberapa pihak bahkan menganggap telah terjadi tumpangtuh (overlapping) antara riset operasi dengan beberapa disiplin ilmu tersebut, seperti manajemen, ilmu komputer, statistik, rekayasa sistem, dan rekayasa industri.

Pemahaman riset operasi sangat dipengaruhi oleh pemahaman terhadap berbagai bidang ilmu yang berkaitan tersebut, antara lain bidang ilmu manajemen dan teknik dan manajemen industri.

Riset operasi diartikan sebagai peralatan manajemen yang menyatukan ilmu pengetahuan, matematika dan logika dalam rangka memecahkan masalah-masalah yang dihadapi sehari-hari sehingga akhirnya permasalahan tersebut dapat dipecahkan secara optimal (Subagyo, dkk, 1993 : 4).

Sebagai alat suatu pemecahan masalah riset operasi harus dipandang sebagai ilmu dan seni, aspek ilmu terletak pada penggunaan teknik-teknik dan algoritma-algoritma matematika untuk memecahkan persoalan yang dihadapi, sedangkan sebagai seni ialah karena keberhasilannya dari solusi matematis ini sangat bergantung pada kreativitas dan kemampuan seseorang sebagai penganalisa dalam pengambilan keputusan (Dimiyati dan Dimiyati, 1999 : 3)

Riset operasi merupakan suatu metode untuk memecahkan masalah optimal. Bahasan mengenai riset operasi ini mencakup *dynamic programming*, analisis jaringan, rantai markov, program linier, teori permainan dan lain-lain.

Menurut Dimiyati dan Dimiyati (1999:4), jika riset operasi akan digunakan untuk memecahkan suatu permasalahan, maka dilakukan langkah-langkah sebagai berikut.

1. Memformulasikan persoalan, definisikan persoalan lengkap dengan spesifikasi tujuan dan bagian-bagian atau sistem yang bersangkutan.
2. Mengobservasi sistem, kumpulan data untuk mengestimasi besaran parameter yang berpengaruh terhadap persoalan yang dihadapi, estimasi ini digunakan untuk membangun dan mengevaluasi model matematis dari persoalan.
3. Memformulasikan model matematis dari persoalan yang dihadapi, dalam hal ini model matematis dalam bentuk persamaan atau pertidaksamaan linier.
4. Mengevaluasi model dan penggunaannya untuk prediksi, untuk mengevaluasi apakah langkah pada no.3 telah menggambarkan keadaan nyata secara akurat atau belum.
5. Mengimplementasikan hasil studi, menerjemahkan hasil perhitungan dalam bahasa sehari-hari.

Untuk membangun model dalam riset operasi, perlu diperhatikan hal-hal sebagai berikut.

1. Jangan membangun model yang rumit jika dapat dibuat model yang sederhana.
2. Jangan mengubah permasalahan agar cocok dengan tehnik atau metode yang digunakan.
3. Proses deduksi harus dilakukan dengan baik.
4. Proses validasi terhadap model harus dilakukan sebelum model tersebut diimplementasikan.
5. Jangan memaksakan untuk menjawab suatu pertanyaan (permasalahan) tertentu dari suatu model yang tidak dirancang untuk menjawab pertanyaan itu.
6. Suatu model mempunyai karakteristik tertentu, sehingga jangan terlalu menjual model yang

dikembangkan. Suatu model seringkali menghasilkan suatu kesimpulan yang sederhana dan menarik.

7. Suatu model yang dikembangkan memerlukan data yang baik.

Bab 2

PROGRAM LINIER

1. Pengertian Program Linear

Program linier merupakan kelompok analisis kuantitatif yang termasuk dalam riset operasi (operation research) yang memakai model matematika. Program linier dikembangkan oleh George B. Dantzig pada tahun 1947. Tujuan penggunaan program linier ini adalah untuk menemukan beberapa kombinasi alternatif pemecahan masalah. Kemudian dipilih kombinasi yang terbaik. dalam rangka menyusun strategi alokasi sumberdaya yang terbatas untuk mencapai tujuan yang diinginkan secara optimal. Alokasi optimal adalah memaksimalkan atau meminimumkan tujuan dengan adanya kendala.

Ada enam tahap atau langkah dasar dalam rangka pemecahan masalah dengan memakai program linier sebagai teknik riset operasi, yaitu :

- 1) Identifikasi masalah
- 2) Pengembangan alternatif penyelesaian
- 3) Penyusunan model
- 4) Analisis model
- 5) Pengesahan model
- 6) Implementasi hasil

a. Identifikasi Masalah

Identifikasi masalah mencakup kegiatan : (1) pengamatan terhadap fenomena sekitar masalah. yaitu mengamati fakta. pendapat, dan gejala sekitar masalah: dan (2) penentuan dan perumusan tujuan yang jelas dari permasalahan yang dihadapi.

b. Pengembangan Alternatif Penyelesaian

Kegiatan pengembangan alternatif penyelesaian merupakan kegiatan memformulasikan atau perumusan hipotesis, yang berupa kegiatan analisis data yang berkenaan dengan penentuan asumsi-asumsi, kendala-kendala, peubah-peubah dan faktor-faktor lain yang dibutuhkan dalam model. Data ini sesungguhnya member kemungkinan untuk mengajukan beberapa pilihan model yang cocok untuk penyelesaian permasalahan yang dihadapi.

c. Penyusunan Model

Setelah dilakukan pilihan terhadap berbagai alternatif Pemecahan masalah, kegiatan selanjutnya adalah penyusunan model. Kegiatan ini mencakup : (1) merumuskan segala macam faktor yang terkait dalam model yang bersangkutan secara simbolik ke dalam model matematika; (2) menentukan peubah-peubah beserta kaitan-kaitannya satu sama lain; dan (3) menetapkan fungsi tujuan dan kendala-kendalanya dengan nilai dan parameter yang Jelas.

d. Analisis Model

Kegiatan analisis model terdiri dari tiga hal penting, yaitu (1) melakukan analisis terhadap model yang telah disusun dan dipilih tersebut; (2) memilih

hasil-hasil yang optimal; dan (3) melakukan analisis kepekaan (sensitivity analisis)

Ada dua macam prosedur untuk mendapatkan hasil yang optimal dari suatu model, yaitu : (1) cara analitik, yaitu dengan penggunaan deduksi matematika; dan (2) cara numerik. yang berkenaan dengan penggunaan komputer.

e. Pengesahan Model

Analisis pengesahan model menyangkut penilaian terhadap model tersebut dengan cara menterjemahkan ke dalam bentuk yang mudah dimengerti dan dapat dilaksanakan oleh pengambil keputusan (Wagner, 1975; Hillier dan Lieberman.1950; Nasendi dan Anwar. 1985; dan Siagian, 19.37).

Ada lima syarat yang harus dipenuhi agar dapat menyusun dan merumuskan suatu persoalan atau permasalahan dalam Program linier, yaitu:

1) Tujuan

Harus ada tujuan dari pemecahan permasalahan yang dihadapi. Tujuan ini merupakan pencerminan dari apa yang diinginkan. Tujuan yang diinginkan bersifat memaksimumkan (sebagai contoh adalah: memaksimumkan keuntungan / penerimaan / produksi) atau meminimumkan (sebagai contoh meminimumkan biaya). Tujuan harus dinyatakan dengan jelas dan tegas yang disebut fungsi tujuan.

2) Alternatif Perbandingan

Dalam memecahkan suatu permasalahan, tentunya mempunyai beberapa alternatif

pemecahannya. Dalam program linier ini adalah mencari kombinasi terbaik yang bersifat mengoptimalkan penggunaan sumberdaya dari beberapa alternatif pemecahan permasalahan yang ada.

3) Sumberdaya

Sumberdaya yang dianalisis bersifat terbatas. Keterbatasan sumberdaya ini merupakan kendala (\leq , \geq , $=$) atau syarat ikatan dalam mencari kombinasi terbaik dari alternatif pemecahan permasalahan yang ada.

4) Perumusan Kuantitatif

Suatu persoalan agar dapat dianalisis dengan menggunakan program linier maka fungsi tujuan dan kendala tersebut harus dapat dirumuskan ke dalam model matematika. Model matematika atau model simbolik adalah penyederhanaan keadaan dunia nyata yang dinyatakan dengan simbol-simbol matematika.

5) Keterkaitan Peubah

Peubah-peubah fungsi tujuan dan kendala-kendala harus memiliki hubungan fungsional atau hubungan keterkaitan. Apabila tidak terdapat keterkaitan antara peubah-peubah yang ada, maka persoalan tersebut tidak dapat diselesaikan dengan program linier dengan memuaskan.

2. Model Baku

Seperti yang telah diuraikan pada sub-bab terdahulu bahwa ada 3 unsur yang harus dipenuhi oleh permasalahan

program linier agar dapat dirumuskan secara matematis, yaitu : (1) adanya fungsi tujuan; (2) adanya kendala fungsional; dan (3) bahwa nilai peubah keputusan harus positif atau disebut dengan syarat non-negatif.

Model baku program linier secara matematis dapat dirumuskan sebagai berikut :

a. Fungsi Tujuan :

Optimumkan (Maksimumkan atau Minimumkan) :

$$Z = \sum_{j=1}^n C_j X_j, \text{ untuk } j = 1, 2, \dots, n$$

b. Kendala (syarat ikatan) :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} X_j, \leq \text{ atau } \geq b_i \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, n$$

c. Syarat Non-negatif

$$X_j \geq 0$$

Dimana :

- C_j = Koefisien peubah pengambilan keputusan
- X_j = Peubah pengambilan keputusan
- a_{ij} = Koefisien teknologi peubah pengambilan keputusan dalam kendala ke-i
- b_i = Sumberdaya yang ada atau nilai sebelah kanan (right hand side) kendala ke-i

Ada beberapa asumsi dasar yang harus dipenuhi oleh model program linier ini. Asumsi-asumsi tersebut adalah :

- a. Linieritas. Asumsi ini menyatakan bahwa hubungan antar input dan output bersifat linier.
- b. Proporsionalitas. Asumsi ini menyatakan bahwa perubahan peubah pengambilan keputusan (X_j) akan

"menyebar dengan proporsi yang sama terhadap fungsi tujuan (C_jX_j) dan kendalanya ($a_{ij}X_j$).

- c. Aditivitas. Asumsi ini menyatakan bahwa dampak total dari parameter optimasi merupakan penjumlahan dari dampak masing-masing C_j dalam model program linier tertentu.
- d. Divisibilitas. Asumsi ini berarti bahwa nilai peubah pengambilan keputusan dapat berupa bilangan cacah maupun pecahan.
- e. Deterministik. Asumsi ini berarti bahwa semua parameter dalam model program linier adalah tetap dan ditentukan secara pasti.

3. Metoda Analisis

Ada dua metoda analisis permasalahan program linier, yaitu : (1) metoda grafik; dan (2) metoda simpleks. Untuk lebih jelasnya, maka di bawah ini diberikan Contoh permasalahan yang akan dipecahkan dengan kedua metoda tersebut.

4. Penyelesaian Dengan Metode Grafik

Contoh 1

PT Khabui Group adalah produsen Sepatu dan Sandal. Dalam Produksinya diperlukan 2 jenis bahan baku yaitu kulit sapi dan lembaran karet. Setiap kodi pasang (1 kode = dua puluh satuan) sepatu memerlukan sebanyak 3 meter persegi dari kulit sapi dan 1 meter persegi lembaran karet. Sedangkan setiap kodi pasang sandal diperlukan 1 meter Persegi kulit sapi dan 2 meter persegi lembaran karet. Persediaan kulit setiap minggu untuk kulit sapi adalah sebanyak 6 meter persegi dan lembaran karet sebanyak 6

meter Persegi. Permasalahannya adalah : Berapa kombinasi sepatu dan sandal yang harus diproduksi per minggu agar mendapatkan penerimaan maksimum bila harga satu kodi pasang sepatu adalah Rp. 500.000.- dan harga satu kodi pasang sandal adalah Rp 400.000,-

Apabila permasalahan perusahaan tersebut disusun dalam bentuk tabel:

Tabel 2 .1
Keadaan PT. Khabul Group

	Sumberdaya yang tersedia		Harga Jual per lusin (x Rp 100.000)
	Kulit Sapi (m ²)	Lembaran Karet (m ²)	
Sepatu (X1)	3	1	5
Sandal (X2)	1	2	4
Jumlah Per minggu	6	6	Maksimumkan

Langkah 1. Perumusan Model Program Linier

Jika persoalan perusahaan tersebut dirumuskan dalam program linier, maka diperoleh rumusan modelnya adalah sebagai berikut :

- a. Fungsi Tujuan :
Maksimum : $Z = 5 X_1 + 4 X_2$
- b. Syarat ikatan (kendala) :
 - 1) $3X_1 + 1 X_2 \leq 6$
 - 2) $1 X_1 + 2 X_2 \leq 6$
- c. Syarat non negatif
 $X_1 . x_2 \geq 0$

Langkah 2. Mencari Wilayah Kelayakan

Gambarkan sebuah grafik dua dimensi kemudian letakkan produk X_1 pada sumbu horizontal (absis) dan produk X_2 pada sumbu vertikal (ordinat). Kemudian gambarkan fungsi-fungsi ketidaksamaan syarat ikatannya pada grafik dua dimensi tersebut melalui cara-cara perhitungan sebagai berikut :

Kendala 1

$$3 X_1 + 1 X_2 < 6$$

$$\text{Jika } X_1 = 0, \text{ maka } X_2 \leq 6$$

$$X_2 = 0 \text{ maka } X_1 \leq X_1 \leq 2$$

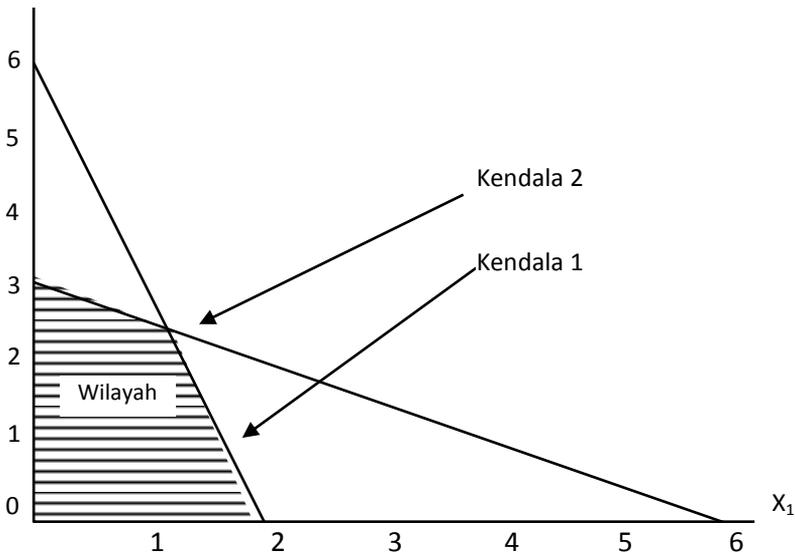
Kendala 2

$$1 X_1 + 2 X_2 \leq 6$$

$$X_1 = 0, \text{ maka } X_2 \leq \frac{6}{2} \text{ -----} \rightarrow X_1 \leq 2$$

$$X_2 = 0, \text{ maka } X_1 \leq \frac{6}{1} \text{ -----} \rightarrow X_1 \leq 6$$

Dari ke dua ketidaksamaan tersebut akan diperoleh wilayah kelayakan (feasible region). Seperti yang disajikan pada Gambar 2.1. Wilayah kelayakannya adalah bagian yang diarsir, yaitu segi empat OABC. Wilayah kelayakan adalah tempat titik-titik kombinasi antara X_1 dan X_2 .



Gambar 2. 1
Wilayah Kelayakan dari Persoalan Program Linier
PT. Khabul Group

Langkah 3. Mencari Hasil Optimum

Hasil optimal akan terdapat pada titik ekstrim yang terdapat pada wilayah kelayakan. Maksimisasi penerimaan akan tercapai jika garis revenue atau leo profit (atau budget line) menyinggung titik ekstrim wilayah kelayakan tersebut. Cara mendapatkan garis iso revenue adalah sebagai berikut :

$$Z = 5 X_1 + 4 X_2$$

Persamaan di atas dapat juga dinyatakan sebagai berikut :

$$X_2 = \frac{5}{4} X_1 + \frac{Z}{4}$$

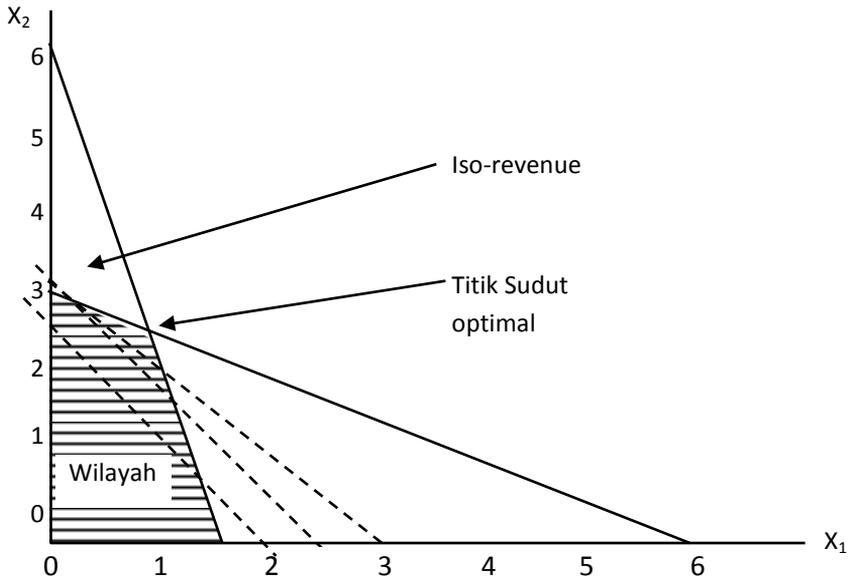
Bila $X_1 = 0$, maka $X_2 = \frac{Z}{4}$ bila $X_2 = 0$, maka $X_1 = \frac{Z}{5}$ demikian seterusnya untuk berbagai nilai X_1 , X_2 dan Z . Untuk mencari

garis isorevenue, pertama-tama dapat kita misalkan nilai Z. Misalkan nilai Z = 10, maka nilai X₁ jika X₂ = 0 adalah 10/5 = 2 dan nilai X₂ jika X₁ = 0 adalah 10/4 = 2,5. Dari titik (2,0) dan (0, 2,5) dapat dibuat garis isorevenue. Kemudian dibuat garis-garis yang sejajar yang menembus wilayah kelayakan seperti yang pada akhirnya akan menyinggung titik ekstrim dari wilayah tersebut. Disitulah letak titik optimum yang dicari, seperti yang disajikan pada Gambar 2.2.

Langkah 4. Mencari Jumlah Z nilai X₁ dan X₂ yang optimum

Seperti yang terlihat pada Gambar 2.1 dan 2. 2. bahwa titik-titik ekstrim dari wilayah kelayakan adalah titik A.B.C. Koordinat titik A dan C sudah diketahui. Untuk mengetahui titik B, yang merupakan perpotongan antara ke dua kendala tersebut, maka kendala dalam bentuk ketidaksamaan tersebut harus dibuat persamaan dulu.

$$\begin{array}{r}
 (1) \quad 3 X_1 + 1 X_2 = 6 \quad | -2 \\
 (2) \quad 1 X_1 + 2 X_2 = 6 \quad | \quad | \\
 \hline
 -5 X_1 = -6 \rightarrow \\
 X_1 = \frac{6}{5} = 1 \frac{1}{5}
 \end{array}$$



Gambar 2.2.

Titik Optimum Persoalan Program Linier PT Khabul Group

Untuk mendapatkan X_2 , maka X_1 dimasukkan ke dalam persamaan (1) atau (2). Misalkan kita masukkan ke dalam persamaan (1).

$$3 \left(\frac{1}{5} \right) + 1 X_2 = 6$$

$$1 X_2 = - \frac{18}{5} = \frac{12}{5} \rightarrow X_2 = 2 \frac{2}{5}$$

Jadi koordinat titik B adalah $\left(1 \frac{1}{5} \cdot 2 \frac{2}{5} \right)$

Dengan diketahuinya koordinat titik-titik ekstrim maka akan didapatkan kombinasi antara X_1 dan X_2 seperti yang disajikan pada Tabel 2.2

Tabel 2.2

Beberapa Kombinasi antara X1 dan X2

Alternatif	Titik	Kombinasi Output		Isorevenue		Nilai Maksimum Penerimaan (Z) dalam (Rp 100.000,-)
		Produk X1	Produk X2	X1	X2	
1	A	0	3	2,4	3	12
2	B	1,2	2,4	3,12	3,9	15,6
3	C	2	0	2	2,5	10

Berdasarkan Tabel 1.2 dan Gambar 1.2 dapat disimpulkan bahwa alternatif 2. atau titik B merupakan titik optimal. Artinya dari hasil tersebut adalah bahwa untuk memperoleh penerimaan maksimum sebesar Rp 1.560.000.- dengan memproduksi (X1) sebanyak 1,2 kodi pasang atau 24 pasang dan sandal (X9) sebanyak 2,4 kodi pasang atau 48 pasang.

5. Metode Simpleks

Metode analisis grafik hanya dapat digunakan untuk permasalahan program linier yang terdiri dari dua peubah pengambilan keputusan saja. Karena penggambaran lebih dari dua dimensi. dalam metoda grafik akan sangat sulit. Padahal permasalahan program linier dalam dunia nyata sangat kompleks. luas dan besar, sehingga diperlukan metoda yang cocok. Metoda tersebut adalah metoda simpleks.

Ciri khas dari metoda simpleks ini adalah dengan dimasukkannya kegiatan disposal (redusal activities) dalam

model program linier. Peranan kegiatan disposal adalah untuk menampung sumberdaya yang tersisa atau yang tidak digunakan. Jumlah peubah disposal ini sama banyaknya dengan jumlah kendala.

Langkah-langkah (algoritma) metoda simpleks adalah sebagai berikut. Misalkan permasalahan program linier yang akan dipecahkan adalah seperti dalam Contoh 1 Untuk dapat dianalisis dengan metoda simpleks, maka model rumusan permasalahan tersebut sekarang adalah sebagai berikut :

a. Langkah 0. Konversi dalam Bentuk Baku

$$\text{Maksimumkan } Z = 5 X_1 + 4 X_2 + 0 X_3 + 0 X_4$$

Kendala :

$$3 X_1 + 1 X_2 + 1 X_3 + 0 X_4 = 6$$

$$1 X_1 + 2 X_2 + 0 X_3 + 1 X_4 = 6$$

dimana : X_3 dan X_4 , adalah peubah disposal

b. Langkah 1. Penentuan Penyelesaian Kelayakan Pendahuluan

Penyelesaian kelayakan adalah suatu keadaan dimana fungsi kendala dan syarat non negatif memenuhi syarat yang diminta oleh fungsi tujuan, yaitu peubah nyata sama dengan nol. Pada langkah 1 ini bentuk pada langkah 0 dimasukkan dan lain tabel simpleks seperti disajikan pada Gambar 3.

Baris C_j , menunjukkan vektor koefisien peubah pengambilan keputusan. Kolom C menunjukkan koefisien peubah keputusan dalam basis. Kolom X_b menunjukkan tingkat kegiatan dalam proses perhitungan (basis). Baris Z_j menunjukkan Maya korbanan fungsi tujuan yang bersangkutan, yaitu

tambahan manfaat yang dikenakan pada setiap penambahan output yang dihasilkan. Baris Z_j menunjukkan nilai bersih biaya terluang, yaitu selisih antara biaya terluang kotor dengan nilai koefisien fungsi tujuan.

Bila bentuk baku pada langkah 0 dimasukkan ke dalam tabel simpleks. maka bentuknya adalah seperti yang disajikan pada Tabel 2.3.

Tabel 2.3
Struktur Tabel Simpleks

Cj →			Baris Koefisien Fungsi Tujuan (C1, C2, C3 Cn)		tan Bi
i	Cb	Basis Xb	Sumber daya bi	Kegiatan (peubah) riil dan disposal X1, X2, Xn	
1	Nilai koefisien	Peubah basis (Peubah-Peubah yang sedang diselesaikan)	Nilai-nilai Peubah yang Baru diselesaikan	Koefisien Substitusi (Input-Output)	Nisbah yang menyatakan Peubah mana yang akan meninggalkan basis
2	Peubah Basis				
	Zi		Nilai Fungsi Tujuan	Evaluasi Fungsi Tujuan	
	Zj - Cj				

Pada langkah pertama ini PT. Khabul Group belum mulai berproduksi, karena pendapatannya masih nol (ditunjukkan oleh nilai $Z_j = 0$. di bawah kolom b_i).

Metode simpleks menganalisis dari titik ekstrim yang satu ke titik ekstrim yang lainnya, sampai akhirnya tiba pada suatu titik ekstrim tertinggi, yang disebut titik sudut optimal. Pada Gambar 2.1 dan 2.2 terlihat bahwa titik ekstrim tertinggi adalah pada titik B. Algoritma simpleks dapat menempuh dua Jalan. Pertama, mulai titik A mengikuti arah jarum jam ke titik B. Kedua, melawan arah jarum jam, yaitu dari titik C ke titik B.

Tabel 2.4
Penyelesaian Kelayakan Pendahuluan

		(Dalam Ratusan Ribu)						
		C_j ----- >						
i	C_b	Basis X_b	B_1	X_1	X_2	X_3	X_4	R_1
1	0	X_3	6	3	1	1	0	$6/3 = 2$
2	0	X_4	6	1	2	0	1	$6/1 = 6$
		Z_j	0	0	0	0	0	
		$Z_j - C_j$	0	-5	-4	0	0	

Prosedur perhitungan setelah langkah 1 dari algoritma metode simpleks ini dapat ditempuh melalui cara-cara berikut :

Untuk pemilih peubah mana yang akan memasuki basis dapat dilihat cari nilai $Z_j - C_j$ yang paling kecil. Dari

Tabel 2.4 dapat dilihat bahwa nilai $Z_j - C_j$ di bawah peubah X_1 ternyata mempunyai nilai terkecil, sehingga X_j harus memasuki basis. Sedangkan peubah yang akan meninggalkan basis dapat dilihat dari nilai B_i . Dari Tabel 2.4 dapat dilihat bahwa nilai R untuk peubah X_3 yang paling kecil sehingga peubah X_3 harus meninggalkan basis. Koefisien input yang merupakan pertemuan antara baris dengan nilai R terkecil dan kolom dengan nilai $Z_j - C_j$ terkecil disebut unsur pivot (pivot point). Atau dapat dikatakan bahwa unsur pivot adalah sebuah nilai yang menyatakan tentang pertemuan antara kegiatan yang sedang memasuki (yaitu X) dengan baris yang sedang dikeluarkan (yaitu X_3). Pada penyelesaian kelayakan pendahuluan ini, unsur pivotnya adalah 3. Basis X yang baru dihitung dengan jalan membagi baris X_3 dengan koefisien unsur pivot.

Baris X_1 yang baru adalah sebagai berikut :

Baris X_1 yang baru

$$\begin{array}{cccccccc} \text{Cb} & \text{xb} & \text{b1} & \text{x1} & \text{x2} & \text{x3} & \text{x4} & \text{R1} \\ \hline 5 & \text{x1} & 6/3 = 2 & 3/3 = 1 & 1/3 & 1/3 & 0/3 = 0 & \end{array}$$

Rumus umum untuk baris kegiatan yang memasuki adalah :

$$X_{11}^1 = \frac{\text{Mij dari baris } X_1 \text{ yang keluar}}{\text{Unsur pivot}}$$

Dimana :

X_{11}^1 = Nilai sel baru untuk kegiatan i pada pertemuan dengan kegiatan j .

M_{1i} = Nilai eel sebelumnya untuk kegiatan i pada pertemuan dengan kegiatan j .

Basis X_4 yang baru dibentuk adalah sebagai berikut :

	CB	XB	B1	X1	X2	X3	X4
0 X4	6-1(6/3)	1-1(3/3)	2-1(1/3)	0-1(1/3)	1-1(0/3)		
	= 4	= 0	= 12/3	= -1/3	= 1		

Rumus secara umum untuk setiap baris baru (selain kegiatan yang sedang memasuki), adalah sebagai berikut:

$$X_{1ij} = X_{ij} - X_{ij} (X_{11}^1)$$

Dimana :

X_{Aj} = nilai sel yang baru untuk kegiatan i pada pertemuan dengan kegiatan j

X_{ij} = nilai sel yang sebelumnya untuk kegiatan i pada pertemuan dengan kegiatan j

X_{il} = koefisien Input-Output yang sebelumnya pada pertemuan dari kegiatan i dengan basis kegiatan l

X_{jj} = koefisien Input-Output yang baru pada pertemuan dari basis kegiatan l dengan kegiatan i

Baris Z_j diperoleh dengan cara menggandakan koefisien Input-Output dalam tabel simpleks dengan koefisien fungsi tujuan dalam basis (kolom CO. kemudian dijumlahkan ke bawah, dengan rumus sebagai berikut :

$$Z_j = \sum_{i=1}^n (M_i) (CB_i)$$

Dimana :

M_i = koefisien Input-Output dalam tabel simpleks pada baris ke i. M_i terdiri dari b_i dan a_{ij} dalam baris.

CB_1 = koefisien fungsi tujuan dalam basis ke i
 Dari rumus tersebut, maka akan didapat nilai-nilai Z_j , sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
Zx_b &= 4(0) + 2(5) = 10 \\
Z_1 &= 0(0) + 1(5) = 5 \\
Z_2 &= 1\frac{2}{3}(0) + \frac{1}{3}(5) = \frac{5}{3} \\
Z_3 &= -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}(5) = -\frac{5}{3} \\
Z_4 &= 1(0) + 4(0) = 0
\end{aligned}$$

Tabel 2.5
Langkah Kedua dalam Tabel Simpleks

	C _j		5	4	0	0	
CB	XB	B _i	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	R ₁
0	x ₄	4	0 unsur pivot	1 2/3	-1/3	1	2,25
5	x ₁	2	1	1/3	1/3	0	6
Z _j		10	5	5/3	5/3	0	
Z _j - C _j		10	0	-7/3	-5/3	0	

Prosedur untuk langkah-langkah selanjutnya dihitung berdasarkan rumus-rumus di atas, sampai pada akhirnya di-temukan titik yang paling optimal. Titik optimal dicapai atau iterasi perhitungan akan berhenti apabila nilai $Z_j - C_j > 0$. Sedangkan untuk persoalan minimisasi, titik optimal dicapai apabila $Z_j - C_j < 0$. Perhitungan dengan tabel simpleks untuk persoalan tersebut disajikan pada Tabel 2.5

Langkah Mencapai Hasil Optimal

Setelah mencapai tahap ketiga (lihat Tabel 2.6) ternyata bahwa perhitungan dengan tabel simpleks ini telah mencapai hasil optimal. Hal tersebut ditunjukkan oleh nilai $Z_j - C_j$. Hasil optimal yang dicapai adalah bila FT. Khabul Group memproduksi sepatu sebanyak $1 \frac{2}{5}$ kodi pasang dan sandal sebanyak $2 \frac{2}{5}$ kodi pasang. Dengan penerimaan total maksimum yang diterima adalah sebesar $15 \frac{3}{5}$ (Rp 1.560.000).

Interpretasi Ekonomi dari Tabel Simpleks

Interpretasi ekonomi dari tabel simpleks adalah :

- a. Nilai Z_j di bawah kegiatan riil adalah biaya korbanan (kotor) dari kegiatan lain bila kegiatan X_j ditingkatkan satu unit; sedangkan Z di bawah kolom kegiatan disposal adalah nilai produk marjinal (marginal value project) atau harga bayangan (shadow price) dari sumberdaya yang digunakan.

Tabel 2.6
Analisis Simpleks Permasalahan PT Khabul Group

1	CJ —>			5	4	0	0	Bi
	Basis			Kegiatan	Nyata	Kegiatan	Disposal	
	CB	XB	b1	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	
Tahap I	0	X3	6	3	1	1	0	6/3 = 2
	0	X4	6	1	2	0	1	6/1 = 3
			00	0 E1]	0-4	00	00	
Tahap II < — —>	0	X4	4	0	(1 2/3	-1/3	1	4/1,67 =
	5	X1	2	1	-1/3	1/3	0	2,25 0.33 = 6
		Zj Zj-Cj	10 10	5 0	5/3 -7/3	5/3 -5/3	0 0	Titik C
Tahap III	5	X1	1 1/5	1	0	2/5	-1/5	
	4	X2	2 2/5	0	1	-1/5	3/5	
		Zj Zj-Cj	15 3/5 15 3/5	5 0	4 0	1 1/5 1 1/5	1 2/5 1 2/5	Titik B

- b. Nilai $Z_j - C_j$ di bawah kolom kegiatan riil adalah nilai produk marjinal, atau disebut juga *reduced cost*, yaitu pertambahan nilai pendapatan yang diperoleh bila kegiatan X_j ditingkatkan sebesar satu satuan. Nilai $Z_j - C_j$ di bawah kolom kegiatan disposal sama dengan nilai Z_j karena koefisien fungsi tujuan (C_j) untuk kegiatan disposal adalah nol. .

Pengolahan dengan Komputer

Pemecahan permasalahan program linier dengan metoda grafik maupun metoda simpleks memakan satu yang lama. Oleh karena itu, untuk pemecahan persoalan program linier yang terdiri dari banyak peubah keputusan, biasanya menggunakan komputer. Komputer yang digunakan. dapat yang dari jenis PC (personal computer) maupun yang mini. Dalam pemecahan persoalan permasalahan program linier ini digunakan komputer PC IBM compatible dengan menggunakan program kemas LP88 atau program kemas QSB. Contoh hasil pengolahan dengan komputer PC dengan program kemas LP88 disajikan pada Tabel 2.7 Dalam tabel tersebut kegiatan riil dinotasikan dengan X1 dan X2 Sedangkan kegiatan disposal dinyatakan dengan S1 dan S2.

Tabel 2.7

Hasil Analisis Persoalan Program Linier Dengan Program Kemas LP 88

PIVOT	ENTERS	LEAVES	DELTA	REVENUE	REMARKS
0			0	0	STARTING SIMPLEX ALGORITHM
0	S.1		0	0	INVERTING BASIS MATRIX
0	S.2		0	0	INVERTING BASIS MATRIX
1	X.1	S.1	5	10	EXECUTING PHASE I
2	X.2	S.2	2.3333	15.6	EXECUTING PHASE II
2			0	15.6	SOLUTION IS OPTIMAL

(b)

SOLUTION IS OPTIMAL

MAXIMUM ENTERS :		BASIS X :		VARIABLES :	2
PIVOTS :	2	LEAVES :		BASIS S :	0
LAST INV :	0	DELTA :	0	REVENUE :	15.6
BASIS	X.1		X.2	CONSTRAINTS :	2

PRIMAL	1.2	2.4
DUAL	1.2	1.4

(c)

SOLUTION IS MAXIMUM REVENUE 15.6
PRIMAL PROBLEM SOLUTION

VARIABLE	STATUS	VALUE	REVENUE/UNIT	VALUE/UNIT	NET REVENUE
X.1	BASIS	1.2	5	5	0
X.2	BASIS	2.4	4	4	0
5.1	NON BASIS	0	0	1.2	-1.2
5.2	NON BASIS	0	0	1.4	-1.4

(d)

SOLUTION IS MAXIMUM . REVENUE 15.6
RIGHT HAND SIDE RANGES

ROW ID	STATUS	DUAL VALUE	RHS VALUE	MINIMUM	MAXIMUM
Y.1	BINDING	1.2	6	3	18
Y.2	BINDING	1.4	6	2	12

(e)

SOLUTION IS MAXIMUM REVENUE 15.6
OBJECTIVE ROW RANGES

VARIABLE	STATUS	VALUE	REVENUE/UNIT	MINIMUM	MAXIMUM
X.1	BINDING	1.2	5	2	NONE
X.2	BINDING	2.4	4	1.66667	NONE

Interpretasi dari hasil analisis dengan menggunakan program LPSS seperti yang disajikan pada Tabel 1.7 di atas adalah :

- Pada Tabel 2.7.a menunjukkan algoritma analisis simpleks dengan menggunakan program kemas LP88. Hasil mencapai optimal pada tahap yang ke dua (Executing phase II). Hal ini dapat juga dilihat pada Tabel 1.7.b.
- Pada Tabel 2.7.c menunjukkan bahwa persoalan di atas mencapai keuntungan (revenue) maksimum, yaitu sebesar 15,6 (Rp 1.560.000) apabila memproduksi X sebanyak 1,2 dan X2 sebanyak 2,4.

- c. Pada Tabel 2.7.e menunjukkan kisaran nilai sebelah kanan (right hand side ranges) atau kisaran sumberdaya. Kisaran nilai sebelah kanan (sumberdaya) ke 1 antara 3 sampai 18. Sedangkan kisaran nilai sebelah kanan (sumberdaya). ke 2 antara 2 sampai 12.
- d. Pada Tabel 2.7.f menunjukkan kisaran nilai peubah fungsi tujuan atau nilai peubah keputusan. Nilai kisaran peubah keputusan ke 1 (X_j) antara 2 sampai tidak terbatas. Sedangkan nilai peubah keputusan ke 2 (X_o) antara 1,6667 sampai tidak terbatas.

SOAL LATIHAN

1. Maksimumkan $Z = 3X_1 + 5X_2$
 Kendala : 1) $2X_1 \leq 8$
 2) $3X_2 \leq 15$
 3) $6X_1 + 5X_2 \leq 30$
 $X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$
2. Minimumkan $Z = 5 X_1 + 2X_2$
 Kendala: 1) $6X_1 + X_2 \geq 6$
 2) $4X_1 + 3X_2 \geq 2$
 3) $X_1 + 2X_2 \geq 4, X_1 \geq 0$
3. PT BAKERY memproduksi tiga jenis roti kering, yaitu pia, bolukismis dan coklat keju dengan keuntungan tiap jenis produk masing-masing Rp 150, Rp 400 dan Rp 600. Setiap minggu ditetapkan minimum produksi roti pia 25 unit, bolukismis 130 unit dan coklatkeju 55 unit. Ketiga jenis roti memerlukan pemrosesan tiga kali yaitu penyiapan bahan, peracikan dan pengovenan seperti terlihat pada tabel berikut:

Pemrosesan	Jenis roti			Penyediaan max
	pia	bolukismis	coklatkeju	jam
penyiapan bahan	4	2	6	130
peracikan	3	4	9	170
pengovenan	1	2	4	52

Bagaimana formulasi program linear masalah PT Bakery tersebut dan hitung solusi optimalnya!

4. Selesaikan linear program berikut ini dengan metode Simplex

$$\text{Maksimumkan } Z = 400X_1 + 300X_2$$

Fungsi kendala/ batasan:

$$1) 4X_1 + 6X_2 \leq 1200$$

$$2) 4X_1 + 2X_2 \leq 800$$

$$3) X_1 \leq 250$$

$$4) X_2 \leq 300$$

5. Selesaikan linear program berikut ini dengan metode Simplex

$$\text{Maksimumkan } Z = 2X_1 + 3X_2 + X_3$$

Dengan fungsi kendala:

$$1) X_1 + X_2 + X_3 \leq 9$$

$$2) 2X_1 + 3X_2 \leq 25$$

$$3) X_2 + 2X_3 \leq 10$$

$$4) X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Bab 3

ANALISIS DUAL

Setiap permasalahan program linier mempunyai 2 macam analisis, yaitu: (1) analisis primal; dan (2) analisis dual. Bentuk dual dapat disusun dari bentuk primal. Untuk menyusun bentuk dual dari bentuk primal, maka permasalahan program linier tersebut harus disusun terlebih dahulu dalam bentuk kanonik. Aturan bentuk kanonik adalah sebagai berikut :

- a. Jika persoalan program linier adalah maksimal maka semua tanda fungsi kendalanya adalah lebih kecil atau sama dengan (\leq).
- b. Jika persoalan program linier adalah minimisasi, maka semua tanda fungsi kendalanya adalah lebih besar atau sama dengan (\geq).
- c. Jika fungsi kendalanya ada yang bertanda sama dengan maka fungsi kendala tersebut diganti menjadi dua ketidaksamaan yang bertanda $<$ dan $>$. Kemudian tergantung dari permasalahan program linier yang dihadapi, maksimisasi atau minimisasi. Untuk mengubah ke dalam satu bentuk yang dikehendaki permasalahan yang dihadapi, maka salah satu fungsi kendala tersebut harus dikalikan dengan -1 .

Aturan umum penyusunan analisis primal-dual disajikan pada Tabel 3.1 (di sebelah)

Tabel 3.1

Aturan Umum Perumusan Permasalahan Program Linier ke dalam Bentuk Primal dan Dual

No.	Bentuk Primal	Bentuk Dual
1.	Maksimasi	Minimisasi
2.	Koefisien fungsi tujuan	Nilai sebelah kanan (nsk) fungsi kendala
3.	Koefisien peubah ke j	Koefisien kendala ke j
4.	Peubah ke 1 yang positif (> 0)	Kendala ke j dengan tanda ($>$)
5.	Peubah ke j tandanya tidak Dibatasi	Kendala ke j yang bertanda eama dengan
6.	Kendala ke i yang bertanda sama dengan	Peubah ke i yang tandanya tidak dibatasi
7.	Kendala ke i bertanda	Peubah ke i yang positif (> 0)

1. Model Umum

Bentuk primal untuk persoalan maksimisasi adalah sebagai berikut :

$$\text{Maksimumkan } Z = \sum_{j=1}^n C_j X_j$$

Syarat ikatan :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} X_j \leq b_i; i = 1.2 \dots\dots\dots m$$

$$X_j \geq 0; j = 1.2 \dots\dots\dots n$$

Sedangkan bentuk primal untuk persoalan minimisasi adalah sebagai berikut :

$$\text{Minimumkan } Z = \sum_{j=1}^n C_j X_j$$

Syarat ikatan :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Bentuk umum dual dari primal dengan persoalan maksimisasi adalah :

$$\text{Minimumkan } G = \sum_{j=1}^n b_j X_j$$

Syarat ikatan :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} Y_i \geq C_j; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$Y_i \geq 0; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Sedangkan bentuk umum dual dari bentuk primal dengan Persoalan minimisasi adalah :

$$\text{Minimumkan } G = \sum_{j=1}^n b_j Y_j$$

Syarat ikatan :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot Y_j \leq C_j; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$Y_j \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Contoh

Di bawah ini akan diberikan Contoh tentang perumusan bentuk dual dan bentuk primal. Misalkan ada persoalan program linier sebagai berikut :

$$\text{Maksimumkan } Z = 5 X_1 + 4 X_2$$

Syarat ikatan :

$$(1) \quad 3 X_1 + 1 X_2 \leq 6$$

$$(2) \quad 1 X_1 + 2 X_2 \leq 6$$

$$(3) \quad X_1 \geq 1$$

$$(4) \quad 5 X_1 + 5 X_2 = 18$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Langkah-langkah perumusan bentuk dual dari bentuk primal di atas adalah sebagai berikut :

Langkah 1 Merumuskan persoalan program linier ke dalam bentuk kanonik.

a. Fungsi kendala 3 dikalikan dengan - 1. sehingga didapatkan :

$$- X_1 \leq - 1$$

b. Fungsi kendala 4 diganti menjadi ketidaksamaan :

$$(5) 5 X_1 + 5 X_2 < 18$$

$$(6) 5 X_1 + 5 X_2 > 18$$

Kemudian kalikan kendala (6) dengan -1, sehingga menjadi :

$$- 5 X_1 - 5 X_2 \leq - 18$$

Akhirnya didapatkan bentuk kanonik primalnya. adalah sebagai berikut :

$$\text{Maksimumkan } Z : 5 X_1 + 4 X_2$$

Syarat ikatan :

$$(1) 3 X_1 + 1 X_2 \leq 6$$

$$(2) 1 X_1 + 2 X_2 \leq 6$$

$$(3) -1 X_1 \leq -1$$

$$(4) 5 X_1 + 5 X_2 \leq 18$$

$$(5) -5 X_1 + 5 X_2 \leq -18$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Langkah 2 Merumuskan bentuk dual dari bentuk kanonik primal.

$$\text{Minimumkan : } G = 6 Y_1 + 6 Y_2 - 2 Y_3 + 18 Y_4 - 18 Y_5$$

Syarat Ikatan :

$$(1) a Y_1 + 1 Y_2 - 1 Y_3 + 5 Y_4 - 5 Y_5 > 5$$

$$(2) \quad 1 Y_1 + 2 Y_2 - 0 Y_3 + 5 Y_4 - 5 Y_5 > 4$$

dan

$$Y_1 \geq 0 \quad 1 = 1, 2, \dots, 5$$

$$1. \quad 3 X_1 + 1 X_2 \leq 6$$

$$2. \quad 1 X_1 + 2 X_2 \leq 6$$

Bentuk dual dari persoalan program linier di atas adalah sebagai berikut :

Minimumkan $G - 6 Y_1 + 6 Y_2$

dengan syarat. ikatan :

$$2. \quad 3 Y_1 + 1 Y_2 \geq 5$$

$$3. \quad 1 Y_1 + 2 Y_2 \geq 4$$

$$Y_1, Y_2 \geq 0$$

Pada Tabel 3.2 disajikan hasil perhitungan analisis dual untuk Contoh dengan program kemasan LP88. Dengan program kemasan LP83 persoalan dual dapat diselesaikan bersama-sama dengan persoalan primalnya.

Tabel 3.2

Hasil Analisis Dual dengan Program Kemasan LP83.

(a)

SOLUTION IS MAXIMUM		REVENUE		15.6	
DUAL PROBLEM SOLUTION					
ROW ID	STATUS	DUAL VALUE	EHS VALUE	USAGE	SLACK
Y.1	BINDING	1.2	6	6	0
Y.2	BINDING	1.4	6	6	0

(b)

SOLUTION IS MAXIMUM		REVENUE		15.6	
PRIMAL PROBLEM SOLUTION					
VARIABLE	STATUS	VALUE	REVENUE/UNIT	VALUE/UNIT	NET REVENUE
X.1	BASIS	1.2	5	5	0
X.2	BASIS	2.4	4	4	0

2. Interpretasi Dari Analisis Primal-Dual

Bila primalnya merupakan persoalan maksimisasi, maka yang ingin diketahui adalah berapa kombinasi X_j terbaik, dengan keterbatasan sumberdaya sebesar b_1 , agar nilai total output yaitu $C_j X_j$ (penerimaan keuntungan dan lain-lain) , mencapai maksimum. Analisis dualnya adalah untuk suatu sumberdaya yang terbatas b_i dan dengan pembatasan terhadap ketentuan nilai output per unit C_j , berapakah sebenarnya jumlah nilai-nilai tersebut per unit sumberdaya yang terbatas b_i tersebut, yang dapat meminimumkan total nilai penggunaan sumberdaya tersebut.

Bila analisis primalnya merupakan persoalan minimisasi, maka yang diinginkan adalah meminimumkan biaya, resiko-resiko dan lain-lain. Sedangkan analisis dualnya adalah untuk mencari nilai per unit sumberdaya (Y_1) yang dapat memaksimumkan nilai output satuan.

Interpreted hasil analisis dual dengan program kemas LP88 seperti yang disajikan pada Tabel 3.2 adalah bahwa nilai dual untuk masing-masing sumberdaya (kendala) berturut-turut adalah : 1,2 (Y_1) dan 1,4 (Y_2). Dari sumberdaya yang ada ternyata sumberdaya (kendala 1) bernilai 0, artinya habis digunakan dalam proses produksi. Demikian juga dengan sumberdaya (kendala 2) semuanya habis dipakai dalam proses produksi.

3. SOAL LATIHAN

1. Primal

Maksimumkan $Z = 5X_1 + 7X_2$

Fungsi batasan: 1) $2X_1 + X_2 \leq 8$

2) $X_1 + 2X_2 \leq 8$

3) $6X_1 + 7X_2 \leq 42$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

2. Primal

Maksimumkan $Z = X_1 + 3X_2 - 2X_3$

Fungsi batasan: 1) $4X_1 + 8X_2 + 6X_3 = 25$

2) $7X_1 + 5X_2 + 9X_3 = 30$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

3. Primal

Minimumkan $Z = 3X_1 + 2X_2 + X_3 + 2X_4 + 3X_5$

Fungsi batasan: 1) $2X_1 + 5X_2 + 4X_4 + X_5 \geq 6$

2) $4X_2 - 2X_3 + 2X_4 + 3X_5 \geq 5$

3) $X_1 - 6X_2 + 3X_3 + 7X_4 + 5X_5 \leq 7$

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$

3. Primal

Minimumkan $Z = X_1 + 2X_2 + X_3$

Fungsi batasan: 1) $X_2 + X_3 = 1$

2) $3X_1 + X_2 + 3X_3 = 4$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

Bab 4

MASALAH PENUGASAN (Assignment Problem)

Salah satu metode yang digunakan untuk Penugasan adalah Metode Hungarian. Pada Metode Hungarian, jumlah sumber-sumber yang ditugaskan harus sama persis dengan jumlah tugas yang akan diselesaikan. Setiap sumber harus ditugaskan hanya untuk satu tugas. Jadi, masalah penugasan akan mencakup sejumlah n sumber yang mempunyai n tugas, sehingga ada $n!$ (n faktorial) kemungkinan. Masalah ini dapat dijelaskan dengan mudah dalam bentuk matriks segi empat, dimana baris-barisnya menunjukkan sumber-sumber dan kolom-kolomnya menunjukkan tugas-tugas.

1. Masalah Minimisasi

Contoh:

Sebuah perusahaan kecil mempunyai 4 pekerjaan yang berbeda untuk diselesaikan oleh 4 karyawan. Biaya penugasan seorang karyawan untuk pekerjaan yang berbeda adalah berbeda karena sifat pekerjaan berbeda-beda. Setiap karyawan mempunyai tingkat keterampilan, pengalaman kerja dan latar belakang pendidikan serta latihan yang berbeda pula. Sehingga biaya penyelesaian pekerjaan yang sama oleh para karyawan yang berlainan juga berbeda. Tabel biaya sebagai berikut:

Pekerjaan karyawan	I	II	III	IV
Fadil	Rp 150	Rp 200	Rp 180	Rp 220
Haykal	Rp 140	Rp 160	Rp 210	Rp 170
Abizar	Rp 250	Rp 200	Rp 230	Rp 200
Hisyam	Rp 170	Rp 180	Rp 180	Rp 160

Masalahnya adalah bagaimana menugaskan keempat karyawan untuk menyelesaikan keempat pekerjaan agar total biaya pekerjaan minimum.

Langkah-langkah:

1. Menyusun tabel biaya seperti tabel di atas.
2. Melakukan pengurangan baris, dengan cara:
 - a. memilih biaya terkecil setiap baris
 - b. kurangkan semua biaya dengan biaya terkecil setiap baris

Sehingga menghasilkan reduced cost matrix /matrik biaya yang telah dikurangi.

Pekerjaan karyawan	I	II	III	IV
Fadil	$(150-150)=0$	$(200-150)=50$	$(180-150)=30$	$(220-150)=70$
Haykal	$(140-140)=0$	$(160-140)=20$	$(210-140)=70$	$(170-140)=30$
Abizar	$(250-200)=50$	$(200-200)=0$	$(230-200)=30$	$(200-200)=0$
Hisyam	$(170-160)=10$	$(180-160)=20$	$(180-160)=20$	$(160-160)=0$

3. Melakukan pengurangan kolom

Berdasarkan hasil tabel langkah 2, pilih biaya terkecil setiap kolom untuk mengurangi seluruh biaya dalam kolom-kolom tersebut. Pada contoh di atas hanya dilakukan pada kolom III karena semua kolom lainnya telah mempunyai elemen yang bernilai nol (0). Jika langkah kedua telah menghasilkan paling sedikit satu nilai nol pada setiap kolom, maka langkah ketiga dapat dihilangkan. Berikut matrix total

opportunity cost, dimana setiap baris dan kolom terdapat paling sedikit satu nilai nol.

Tabel total opportunity cost matrix

Pekerjaan karyawan	I	II	III	IV
Fadil	0	50	$(30-20)=10$	70
Haykal	0	20	$(70-20)=50$	30
Abizar	50	0	$(30-20)=10$	0
Hisyam	10	20	$(20-20)=0$	0

4. Membentuk penugasan optimum

Prosedur praktis untuk melakukan test optimalisasi adalah dengan menarik sejumlah minimum garis horisontal dan/ atau vertikal untuk meliputi seluruh elemen bernilai nol dalam total opportunity cost matrix. Jika jumlah garis sama dengan jumlah baris/ kolom maka penugasan telah optimal. Jika tidak maka harus direvisi.

Pekerjaan karyawan	I	II	III	IV
Fadil	0	50	10	70
Haykal	0	20	50	30
Abizar	50	0	10	0
Hisyam	10	20	0	0

5. Melakukan revisi tabel

- a. Untuk merevisi total opportunity cost, pilih angka terkecil yang tidak terluput (dilewati) garis. (pada contoh di atas = 10)
- b. Kurangkan angka yang tidak dilewati garis dengan angka terkecil (10)
- c. Tambahkan angka yang terdapat pada persilangan garis dengan angka terkecil (10) yaitu (50) pada Hasan dan (10) pada Dzakwan.

d. Kembali ke langkah 4

Revised matrix:

Pekerjaan karyawan	I	II	III	IV
Fadil	0	40	0	10
Haykal	0	10	40	20
Abizar	60	0	10	0
Hisyam	20	20	0	0

Berikut tabel penugasannya

Penugasan	Biaya
Fadil III	Rp 180
Haykal I	Rp 140
Abizar II	Rp 200
Hisyam IV	Rp 160
Jumlah Biaya	Rp 680

a. Jumlah Pekerjaan Tidak Sama Dengan Jumlah Karyawan

Bila jumlah pekerjaan lebih besar dari jumlah karyawan, maka harus ditambahkan karyawan semu (dummy worker). Biaya semu sama dengan nol karena tidak akan terjadi biaya bila suatu pekerjaan ditugaskan ke karyawan semu. Bila jumlah karyawan lebih banyak dari pada pekerjaan, maka ditambahkan pekerjaan semu (dummy job). Sebagai contoh, bila jumlah pekerjaan lebih besar dari jumlah karyawan dapat dilihat pada tabel berikut:

Pekerjaan karyawan	I	II	III	IV
Fadil	Rp 150	Rp 200	Rp 180	Rp 220
Haykal	Rp 140	Rp 160	Rp 210	Rp 170
Abizar	Rp 250	Rp 200	Rp 230	Rp 200
Hisyam	Rp 170	Rp 180	Rp 180	Rp 160
Dummy X	Rp 0	Rp 0	Rp 0	Rp 0

Prosedur penyelesaian sama dengan langkah-langkah sebelumnya.

2. Masalah Maksimisasi

Dalam masalah maksimisasi, elemen-elemen matriks menunjukkan tingkat keuntungan. Efektivitas pelaksanaan tugas oleh karyawan diukur dengan jumlah kontribusi keuntungan.

Contoh: Tabel keuntungan

Pekerjaan karyawan	I	II	III	IV	V
A	Rp 1000	Rp 1200	Rp 1000	Rp 800	Rp 1500
B	Rp 1400	Rp 1000	Rp 900	Rp 1500	Rp 1300
C	Rp 900	Rp 800	Rp 700	Rp 800	Rp 1200
D	Rp 1300	Rp 1500	Rp 800	Rp 1600	Rp 1100
E	Rp 1000	Rp 1300	Rp 1400	Rp 1100	Rp 1700

Langkah-langkah:

- a. Seluruh elemen dalam setiap baris dikurangi dengan nilai maksimum dalam baris yang sama. Prosedur ini menghasilkan Matriks Opportunity Loss. Matriks ini sebenarnya bernilai negative

Pekerjaan karyawan	I	II	III	IV	V
A	Rp 500	Rp 700	Rp 500	Rp 700	0
B	Rp 100	Rp 500	Rp 600	0	Rp 200
C	Rp 300	Rp 400	Rp 500	Rp 400	0
D	Rp 300	Rp 100	Rp 800	0	Rp 500
E	Rp 700	Rp 400	Rp 300	Rp 600	0

- b. Meminimumkan opportunity-loss dengan cara mengurangi seluruh elemen dalam setiap kolom (yang belum ada nolnya) dengan elemen terkecil dari kolom tersebut.

Matriks total opportunity loss

Pekerjaan karyawan	I	II	III	IV	V
A	Rp 400	0	Rp 200	Rp 200	Rp 600
B	Rp 200	Rp 400	Rp 300	0	Rp 300
C	Rp 200	Rp 300	Rp 200	Rp 500	0
D	Rp 700	0	Rp 400	0	Rp 600
E	0	Rp 200	0	Rp 500	0

Dari matriks di atas dapat dilihat bahwa seluruh elemen yang bernilai nol baru dapat diliput oleh 4 garis. Jadi matriks harus direvisi.

- c. Merevisi matriks

Pekerjaan karyawan	I	II	III	IV	V
A	Rp 200	0	0	Rp 200	Rp 600
B	0	Rp 400	Rp 100	0	Rp 300
C	0	Rp 300	0	Rp 500	0
D	Rp 500	0	Rp 200	0	Rp 600
E	0	Rp 400	0	Rp 700	Rp 200

Schedul penugasan optimal dan keuntungan total untuk dua alternative penyelesaian adalah:

Penugasan Alternatif 1	Keuntungan	Penugasan Alternatif 2	Keuntungan
A--II	Rp 1200	A--V	Rp 1500
B--I	Rp 1400	B--IV	Rp 1500
C--V	Rp 1200	C--I	Rp 900
D--IV	Rp 1600	D--II	Rp 1500
E--III	Rp 1400	E--III	Rp 1400
Jumlah	Rp 6800	Jumlah	Rp 6800

3. SOAL LATIHAN

1. Sebuah perusahaan pengecoran logam mempunyai empat jenis mesin yang diberi nama M1, M2, M3 dan M4. Setiap mesin mempunyai kapasitas yang berbeda dalam pengoperasiannya. Dalam minggu mendatang perusahaan mendapatkan pesanan untuk menyelesaikan empat jenis pekerjaan (job) yaitu J1, J2, J3 dan J4. Biaya pengoperasian setiap pekerjaan oleh keempat mesin dapat dilihat dalam tabel berikut:

Job	Mesin			
	M1	M2	M3	M4
J1	210	150	180	130
J2	140	160	200	190
J3	150	175	220	200
J4	200	115	160	190

Masalahnya adalah bagaimana menugaskan keempat mesin untuk menyelesaikan keempat jenis pekerjaan agar total biaya pekerjaan minimum!

3. Seorang pengusaha konveksi mempunyai 4 orang karyawan yang memproduksi 4 jenis produk. Jumlah produk yang dihasilkan masing-masing karyawan tiap bulannya dapat dilihat pada tabel berikut:

Karyawan	Produk			
	Celana Panjang	Rok	Hem	Baju Safari
Ulfah	6	7	10	9
Salma	2	8	7	8
Rana	8	9	5	12
Nabila	7	11	12	3

Buat penugasan agar jumlah produk yang dihasilkan bisa maksimum!

Bab 5

METODE TRANSPORTASI

Metode Transportasi merupakan suatu metode yang digunakan untuk mengatur distribusi dari sumber-sumber yang menyediakan produk yang sama ke tempat-tempat yang membutuhkan secara optimal dengan biaya yang termurah. Alokasi produk ini harus diatur sedemikian rupa karena terdapat perbedaan biaya-biaya alokasi dari satu sumber atau beberapa sumber ke tempat tujuan yang berbeda.

Tabel awal dapat dibuat dengan dua metode, yaitu:

1. **Metode North West Corner (NWC)** => dari pojok kiri atas ke pojok kanan bawah
Kelemahan : tidak memperhitungkan besarnya biaya sehingga kurang efisien.
2. **Metode biaya terkecil** => mencari dan memenuhi yang biayanya terkecil dulu. Lebih efisien dibanding metode NWC.

Setelah tabel awal dibuat, tabel dapat dioptimalkan lagi dengan metode:

1. **Stepping Stone** (batu loncatan)
2. **Modified Distribution Method (MODI)**

Selain metode-metode di atas masih ada satu metode yang lebih sederhana penggunaannya yaitu metode Vogel's Approximation Method (VAM).

Contoh masalah transportasi:

Dari \ Ke	Gudang A	Gudang B	Gudang C	Kapasitas Pabrik
Pabrik W	Rp 20	Rp 5	Rp 8	90
Pabrik H	Rp 15	Rp 20	Rp 10	60
Pabrik P	Rp 25	Rp 10	Rp 19	50
Kebutuhan Gudang	50	110	40	200

Penyelesaian:

1. Metode NWC

Dari \ Ke	Gudang A	Gudang B	Gudang C	Kapasitas Pabrik
Pabrik W	20 50	5 40	8	90
Pabrik H	15	20 60	10	60
Pabrik P	25	10 10	19 40	50
Kebutuhan Gudang	50	110	40	200

Biaya yang dikeluarkan :

$$(50 \cdot 20) + (40 \cdot 5) + (60 \cdot 20) + (10 \cdot 10) + (40 \cdot 19) = 3260$$

2. Metode biaya terkecil

Dari \ Ke	Gudang A	Gudang B	Gudang C	Kapasitas Pabrik
Pabrik W	20	5 60	8	90
Pabrik H	15 50	20	10 40	60
Pabrik P	25 40	10 10	19	50
Kebutuhan Gudang	50	110	40	200

Biaya yang dikeluarkan :

$$(90 \cdot 5) + (20 \cdot 15) + (40 \cdot 10) + (30 \cdot 25) + (20 \cdot 10) = 2400$$

Mengoptimalkan tabel:

1. Metode Stepping Stone , misal tabel awal menggunakan yang NWC

Dari \ Ke	Gudang A	Gudang B	Gudang C	Kapasitas Pabrik
Pabrik W	20 50	40 5	8	90
Pabrik H	15 -	20 60	10	60
Pabrik P	25	10 10	19 40	50
Kebutuhan Gudang	50	110	40	200

Perbaikan 1 dengan cara trial and error

Ke Dari	Gudang A	Gudang B	Gudang C	Kapasitas Pabrik
Pabrik W	20 50	40 5 + 90	8	90
Pabrik H	15 50 -	60 20 + 10	10	60
Pabrik P	25	10	19 40	50
Kebutuhan Gudang	50	110	40	200

Setelah dihitung dengan trial and error, biaya yang dikeluarkan:
 $(50 \cdot 15) + (90 \cdot 5) + (10 \cdot 20) + (10 \cdot 10) + (40 \cdot 19) = 2260$

Perbaikan 2

Dari \ Ke	Gudang A	Gudang B	Gudang C	Kapasitas Pabrik
Pabrik W	20	5 90 - 50	8 40	90
Pabrik H	15 50	20 10	10	60
Pabrik P	25	10 50 +	19 - 40	50
Kebutuhan Gudang	50	110	40	200

Biaya yang dikeluarkan :

$$(50 \cdot 5) + (40 \cdot 8) + (50 \cdot 15) + (10 \cdot 20) + (50 \cdot 10) = 2020$$

Perbaikan 3

Dari \ Ke	Gudang A	Gudang B	Gudang C	Kapasitas Pabrik
Pabrik W	20	50 + 60	40 ←	90
Pabrik H	15	20 ↓	↑ 10	60
Pabrik P	25	10	19	50
Kebutuhan Gudang	50	110	40	200

Biaya yang dikeluarkan :

$$(60 \cdot 5) + (30 \cdot 8) + (50 \cdot 15) + (10 \cdot 10) + (50 \cdot 10) = 1890 \text{ (paling optimal)}$$

Jika hasil belum optimal, lakukan perbaikan terus sampai mendapatkan hasil yang optimal.

3. Metode MODI

Langkah-langkah:

- Misal tabel awal yang digunakan adalah tabel NWC
- Buat variabel R_i dan K_j untuk masing-masing baris dan kolom.
- Hitung sel yang berisi (nilai tiap kolom dan tiap baris) dengan rumus:

$$\begin{array}{ccccc}
 R_i & + & K_j & = & C_i \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \text{baris} & & \text{kolom} & & \text{biaya}
 \end{array}$$

1. $W-A = R1 + K1 = 20$
2. $W-B = R1 + K2 = 5$
3. $H-B = R2 + K2 = 20$
4. $P-B = R3 + K2 = 10$
5. $P-C = R3 + K3 = 19$

dari persamaan di atas, hitung K1 dan R1 dengan cara meng-nol-kan variabel

R1 atau K1, misal $R1 = 0$

1. $R1 + K1 = 20 \Rightarrow 0 + K1 = 20$, $K1 = 20$
2. $R1 + K2 = 5 \Rightarrow 0 + K2 = 5$, $K2 = 5$
3. $R2 + K2 = 20 \Rightarrow R2 + 5 = 20$, $R2 = 15$
4. $R3 + K2 = 10 \Rightarrow R3 + 5 = 10$, $R3 = 5$
5. $R3 + K3 = 19 \Rightarrow 5 + K3 = 19$, $K3 = 14$

letakkan nilai tersebut pada baris / kolom yang bersangkutan

Dari \ Ke	Gudang A K1=20	Gudang B K2=5	Gudang C K3=14	Kapasitas Pabrik
Pabrik W R1=0	20 50	5 40	8	90
Pabrik H R2=15	15	20 60	10	60
Pabrik P R3=5	25	10 10	19 40	50
Kebutuhan Gudang	50	110	40	200

d. Hitung nilai/ index perbaikan setiap sel yang kosong dengan rumus:

$C_{ij} - R_i - K_j$

1. $H-A = 15 - 15 - 20 = - 20$

2. $P-A = 25 - 5 - 20 = 0$

3. $W-C = 8 - 0 - 14 = - 14$

4. $H-C = 10 - 15 - 14 = - 19$

(optimal jika pada sel yang kosong, index perbaikannya ≥ 0 , jika belum maka pilih yang negatifnya besar)

e. Memilih titik tolak perubahan

Pilih nilai yang negatifnya besar yaitu H-A

f. Buat jalur tertutup

Berilah tanda positif pada H-A. Pilih 1 sel terdekat yang isi dan sebaris (H-B), 1 sel yang isi terdekat dan sekolom (W-A), berilah tanda negatif pada dua sel tersebut. Kemudian pilih satu sel yang sebaris atau sekolom dengan dua selbertanda negatif tadi (W-B) dan beri tanda positif. Selanjutnya pindahkan isi dari sel bertanda negatif ke yang bertanda positif sebanyak isi terkecil dari sel yang bertanda positif (50). Jadi, H-A kemudian berisi 50, H-B berisi $60-50=10$, W-B berisi $40+50=90$ dan W-A tidak berisi.

Dari \ Ke	Gudang A K1=20	Gudang B K2=5	Gudang C K3=14	Kapasitas Pabrik
Pabrik W R1=0	50	40 +	8	90
Pabrik H R2=15	15 50 -	60 +	10	60
Pabrik P R3=5	25	10	19 40	50
Kebutuhan Gudang	50	110	40	200

g. Ulangi langkah-langkah c – f sampai indeks perbaikan bernilai ≥ 0 hitung sel yang berisi:

$$W-B = R1 + K2 = 5 \Rightarrow 0 + K2 = 5, K2 = 5$$

$$H-A = R2 + K1 = 15 \Rightarrow R2 + 0 = 15, R2 = 15$$

$$H-B = R2 + K2 = 20 \Rightarrow 15 + 5 = 20,$$

$$P-B = R3 + K2 = 10 \Rightarrow R3 + 5 = 10, R3 = 5$$

$$P-C = R3 + K3 = 19 \Rightarrow 5 + K3 = 19, K3 = 14$$

Perbaikan indeks:

$$W-A = 20 - 0 - 0 = 20$$

$$W-C = 8 - 0 - 14 = -6$$

$$\mathbf{H-C = 10 - 15 - 14 = -19}$$

$$P-A = 25 - 5 - 0 = 20$$

Dari \ Ke	Gudang A K1=20	Gudang B K2=5	Gudang C K3=14	Kapasitas Pabrik
Pabrik W R1=0	20 -	5 90	8	90
Pabrik H R2=15	15 50	20 10	10 +	60
Pabrik P R3=5	25	10 +	19 10	50
Kebutuhan Gudang	50	110	40 -	200

Biaya transportasi : $(90 \cdot 5) + (50 \cdot 15) + (10 \cdot 10) + (20 \cdot 10) + (30 \cdot 19) = 2070$

Hitung sel yang berisi:

$$W-B = R1 + K2 = 5 \Rightarrow 0 + K2 = 5, K2 = 5$$

$$P-B = R3 + K2 = 10 \Rightarrow R3 + 5 = 10, R3 = 5$$

$$P-C = R3 + K3 = 19 \Rightarrow 5 + K3 = 19, K3 = 14$$

$$H-C = R2 + K3 = 10 \Rightarrow R2 + 14 = 10, R2 = -4$$

$$H-A = R2 + K1 = 15 \Rightarrow -4 + K1 = 15, K1 = 19$$

Perbaikan indeks (sel kosong) :

$$W-A = 20 - 0 - 0 = 20$$

$$\mathbf{W-C = 8 - 0 - 14 = -6}$$

$$H-B = 20 - 15 - 5 = 0$$

$$P-A = 25 - 5 - 0 = 20$$

Dari \ Ke	Gudang A K1=20	Gudang B K2=5	Gudang C K3=14	Kapasitas Pabrik
Pabrik W R1=0	20	90 5	8	90
Pabrik H R2=15	15	20	10	60
Pabrik P R3=5	25	20 30	30 20	50
Kebutuhan Gudang	50	110	40	200

Biaya transportasi :

$$(80 \cdot 5) + (10 \cdot 8) + (50 \cdot 15) + (10 \cdot 10) + (30 \cdot 10) + (20 \cdot 19) = 2010$$

Sel berisi:

$$W-B = R1 + K2 = 5 \Rightarrow 0 + K2 = 5, K2 = 5$$

$$W-C = R1 + K3 = 8 \Rightarrow 0 + K3 = 8, K3 = 8$$

$$H-C = R2 + K3 = 10 \Rightarrow R2 + 8 = 10, R2 = 2$$

$$H-A = R2 + K1 = 15 \Rightarrow 2 + K1 = 15, K1 = 13$$

$$P-B = R3 + K2 = 10 \Rightarrow R3 + 5 = 10, R3 = 5$$

Indeks perbaikan:

$$W-A = 20 - 0 - 19 = 1$$

$$H-B = 20 - (-4) - 5 = 19$$

$$P-A = 25 - 5 - 19 = 1$$

Indeks perbaikan sudah positif semua, berarti **sudah optimal**.

Dari \ Ke	Gudang A K1=20	Gudang B K2=5	Gudang C K3=14	Kapasitas Pabrik
Pabrik W R1=0	20 -	5 80	8 10	90
Pabrik H R2=15	15 50	20	10	60
Pabrik P R3=5	25	10 30	19 20	50
Kebutuhan Gudang	50	110	40	200

4. Metode VAM

Metode VAM merupakan metode yang lebih mudah dan lebih cepat untuk mengatur alokasi dari beberapa sumber ke daerah tujuan.

Langkah metode VAM:

1. Cari perbedaan dua biaya terkecil, yaitu terkecil pertama dan kedua (kolom dan baris)
2. Pilih perbedaan terbesar antara baris dan kolom
3. Pilih biaya terendah
4. Isi sebanyak mungkin yang bisa dilakukan
5. Hilangkan baris / kolom yang terisi penuh
6. Ulangi langkah 1-5 sampai semua baris dan kolom seluruhnya teralokasikan.

	A	B	C	Kapasitas	Perbedaan Baris
W	20	5	8	90	$8-5=3$
H	15	20	10	60	$15-10=5$
P	25	10	19	50	$19-10=9$
Kebutuhan	50	110	40		
Perbedaan Kolom	$20-15=5$	$10-5=5$	$10-8=2$		$X_{PB}=50$ Hilangkan Baris P

	A	B	C	Kapasitas	Perbedaan Baris
W	20	5	8	90	$8-5=3$
H	15	20	10	60	$15-10=5$
Kebutuhan	50	$110-50=60$	40		
Perbedaan Kolom	$20-15=5$	$10-5=5$	$10-8=2$		$X_{WB}=60$ Hilangkan Kolom B

	A	C	Kapasitas	Perbedaan Baris
W	20	8	$90-60=30$	$20-8=12$
H	15	10	60	$15-10=5$
Kebutuhan	50	40		
Perbedaan Kolom	$20-15=5$	$10-8=2$		$X_{WB}=60$ Hilangkan Kolom B

	A	C	Kapasitas	Perbedaan Baris
H	15	10	60	$15-10=5$
Kebutuhan	50	$40-30=10$		
Perbedaan Kolom	$20-15=5$	$10-8=2$		$X_{WB}=60$ Hilangkan Kolom B

Biaya transportasi :

$$(10 \cdot 50) + (5 \cdot 60) + (8 \cdot 30) + (15 \cdot 50) + (10 \cdot 10) = 1890$$

(optimal)

SOAL LATIHAN

1.

dari \ Ke	Gudang A	Gudang B	Gudang C	Kapasitas Pabrik
Pabrik 1	Rp 3200	Rp 3300	Rp 3400	106
Pabrik 2	Rp 3600	Rp 4200	Rp 3800	132
Pabrik 3	Rp 3400	Rp 3700	Rp 4000	127
Kebutuhan Gudang	122	152	91	365

Selesaikan dengan metode:

- NWC
- Biaya terkecil
- MODI

2. Produksi pabrik A, B, C adalah sebagai berikut:

Pabrik	Kapasitas produksi tiap bulan
A	150 ton
B	40 ton
C	80 ton
Jumlah	270 ton

Gudang pabrik tersebut mempunyai kapasitas sebagai berikut:

Gudang	Kebutuhan tiap bulan
Gudang H	110 ton
Gudang I	70 ton
Gudang J	90 ton
Jumlah	270 ton

Biaya untuk mendistribusikan barang dari pabrik ke gudang :

Dari \ Ke	Biaya tiap ton (Rp)		
	Ke Gudang H	Ke Gudang I	Ke Gudang J
Pabrik A	27000	23000	31000
Pabrik B	10000	45000	40000
Pabrik C	30000	54000	35000

- Buat tabel awal transportasi
- Selesaikan dengan metode biaya terkecil dan optimalkan dengan metode MODI
- Selesaikan dengan metode VAM

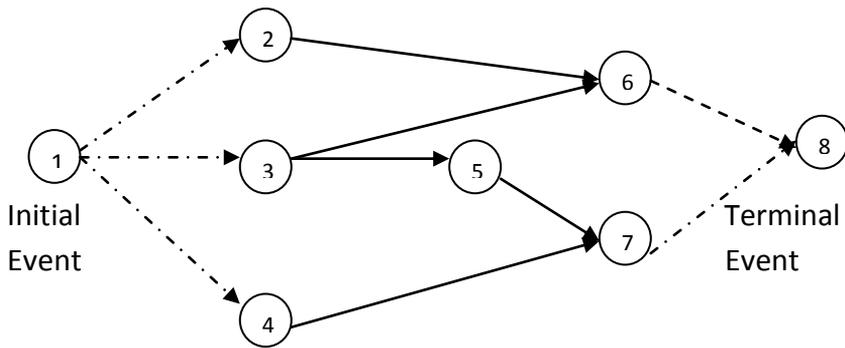
Bab 6

ANALISA NETWORK

1. Pengertian Network

Tim riset operasi mengembangkan sistem pengambilan keputusan yang didasarkan pada optimasi dengan menggunakan metode jaringan kerja (Hiller, 1990:335). Jaringan kerja (model *network*) adalah suatu diagram yang digunakan untuk membantu menyelesaikan masalah matematika yang cukup rumit agar menjadi lebih sederhana dan mudah diamati. Masalah-masalah yang dapat diatasi dengan *network* antara lain masalah penjadwalan (*network planing*), masalah transportasi, masalah penugasan, masalah penggantian peralatan, dan masalah lintasan terpendek. *Network planning* pada prinsipnya adalah hubungan ketergantungan antara bagian-bagian pekerjaan atau variable yang digambarkan atau divisualisasikan dalam diagram *network*. Dengan demikian dapat dikemukakan bagian-bagian pekerjaan yang harus didahulukan, bila perlu dilembur atau tambah biaya.

Contoh *network* dapat dilihat pada gambar 6.1 *Network* suatu kegiatan



Menurut Dipohusodo (1996:245) langkah-langkah dalam menggambar jaringan kerja adalah sebagai berikut.

1. Lukislah anak panah dengan garis penuh dari kiri ke kanan dan garis putus untuk dummy.
2. Dalam menggambarkan anak panah, usahakan adanya bagian yang mendatar untuk tempat keterangan kegiatan dan kurun waktu.
3. Keterangan kegiatan ditulis diatas anak panah, sedangkan kurun waktu di bawahnya.
4. Hindarkan sejauh mungkin garis yang saling menyilang.
5. Kecuali untuk hal yang khusus, panjang anak panah tidak ada kaitannya dengan lamanya kurun waktu.
6. Peristiwa/kejadian dilukiskan sebagai lingkaran dengan nomor yang bersangkutan jika mungkin berada di dalamnya.
7. Nomor peristiwa sebelah kanan lebih besar dari sebelah kiri.

Menurut Dimyati dan Dimyati (1999:177) dalam menggambarkan suatu *network* digunakan simbol sebagai berikut:

—————▶ Anak panah = *arrow (arc)*, menyatakan sebuah kegiatan atau aktivitas. Kegiatan di sini didefinisikan sebagai hal yang memerlukan *duration* (jangka waktu tertentu). Baik panjang maupun kemiringan anak panah ini sama sekali tidak mempunyai arti, jadi tidak selalu menggunakan skala. Kepala anak panah menjadi pedoman arah tiap aktivitas, yang menunjukkan bahwa suatu aktivitas dimulai dari permulaan dan berjalan maju sampai akhir dengan arah dari kiri ke kanan.



Lingkaran kecil = *node*, menyatakan sebuah kejadian atau peristiwa atau *event*. Kejadian (*event*) di sini didefinisikan sebagai ujung atau pertemuan dari satu atau beberapa kegiatan.

-----▶ Anak panah terputus-putus, menyatakan kegiatan / aktivitas semu atau *dummy*. *Dummy* di sini berguna untuk membatasi mulainya aktivitas. Seperti halnya aktivitas biasa, panjang dan kemiringan *dummy* ini juga tidak berarti apa-apa sehingga tidak perlu menggunakan skala, hanya pada *dummy* tidak mempunyai *duration* (jangka waktu tertentu).

—————▶ (anak panah tebal) merupakan kegiatan pada lintasan kritis.

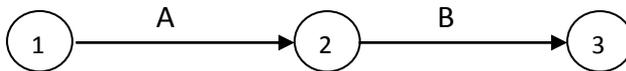
Dalam penggunaannya, simbol-simbol ini digunakan dengan mengikuti aturan-aturan sebagai berikut.

1. Di antara dua kejadian (*event*) yang sama, hanya boleh digambarkan satu anak panah.

2. Nama suatu aktivitas dinyatakan dengan huruf atau dengan nomor kejadian
3. Aktivitas harus mengalir dari kejadian bernomor rendah ke kejadian bernomor tinggi.
4. Diagram hanya memiliki sebuah saat paling cepat dimulainya kejadian (*initial event*) dan sebuah saat paling cepat diselesaikannya kejadian (*terminal event*).

Adapun logika kebergantungan kegiatan-kegiatan itu dinyatakan sebagai berikut:

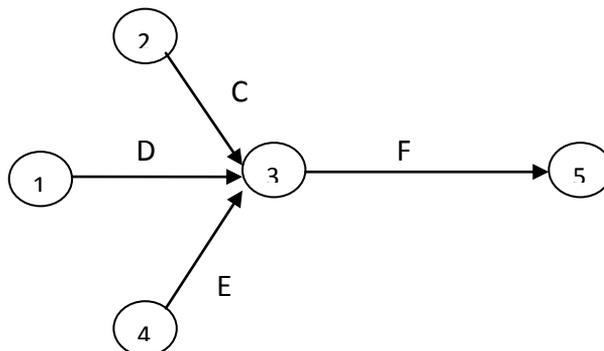
1. Jika kegiatan A harus diselesaikan dahulu sebelum kegiatan B dapat dimulai, maka hubungan antara kedua kegiatan tersebut dapat di lihat pada gambar 2



Gambar 6.2.

Kegiatan A merupakan pendahulu kegiatan B
 Kegiatan A bisa juga ditulis (1,2) dan kegiatan B(2,3)

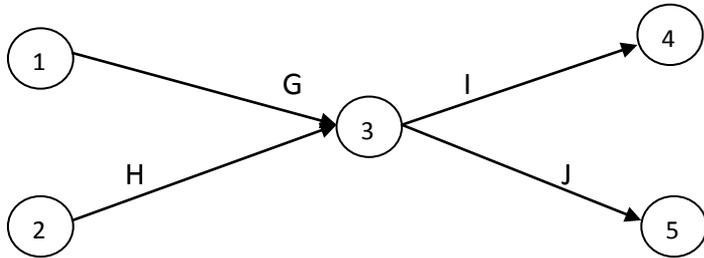
2. Jika kegiatan C,D dan E harus selesai sebelum kegiatan F dapat dimulai, maka dapat di lihat pada gambar 3.



Gambar 6.3.

Kegiatan C, D dan E merupakan pendahulu kegiatan F

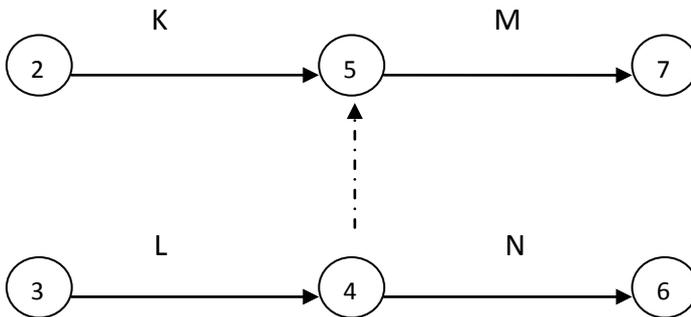
3. Jika kegiatan G dan H harus dimulai sebelum kegiatan I dan J maka dapat di lihat pada gambar 4.



Gambar 6. 4.

Kegiatan G dan H merupakan pendahulu kegiatan I dan J

4. Jika kegiatan K dan L harus selesai sebelum kegiatan M dapat dimulai, tetapi N sudah dapat dimulai bila kegiatan L sudah selesai, maka dapat di lihat pada gambar 5.

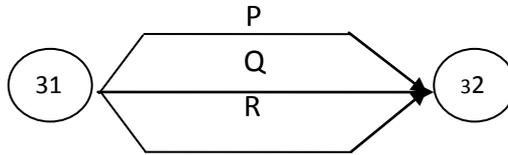


Gambar 6.5.

Kegiatan L merupakan pendahulu kegiatan M dan N

Fungsi *dummy* di atas adalah memindahkan seketika itu juga (sesuai dengan arah panah) keterangan tentang selesainya kegiatan L dari lingkungan kejadian no. 4 ke lingkungan kejadian no. 5.

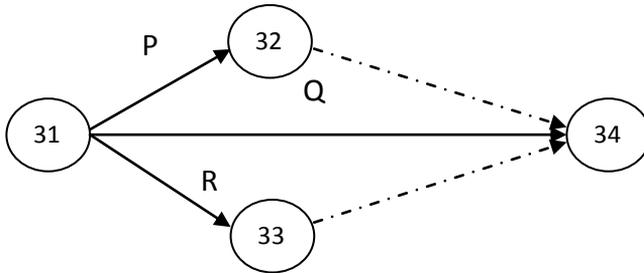
5. Jika kegiatan P,Q, dan R mulai dan selesai pada lingkaran kejadian yang sama, maka kita tidak boleh menggambarannya seperti pada gambar 6.



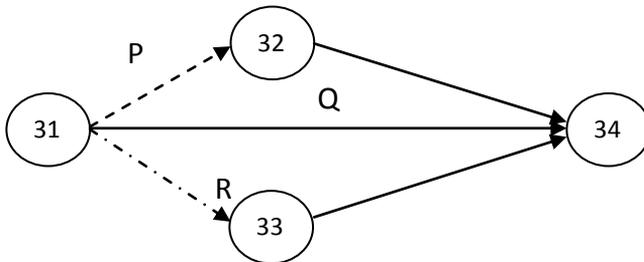
Gambar 6.6.

Gambar yang salah bila kegiatan P, Q dan R mulai dan selesai pada kejadian yang sama

Untuk membedakan ketiga kegiatan itu, maka masing-masing harus digambarkan *dummy* seperti pada gambar 6.7



atau



Gambar 6.7.

Kegiatan P, Q dan R mulai dan selesai pada kejadian yang sama

Kegiatan $P = (31,32)$ $P = (32,34)$
 $Q = (31,34)$ a ta u $Q = (31,34)$
 $R = (31,33)$ $R = (33,34)$

Dalam hal ini tidak menjadi soal di mana saja diletakkannya *dummy* tersebut, pada permulaan ataupun pada akhir kegiatan-kegiatan tersebut.

2. Penentuan Waktu

Setelah *network* suatu proyek dapat digambarkan, langkah berikutnya adalah mengestimasi waktu masing-masing aktivitas, dan menganalisis seluruh diagram *network* untuk menentukan waktu terjadinya masing-masing kejadian (*event*).

Dalam mengestimasi dan menganalisis waktu ini, akan kita dapatkan satu atau beberapa lintasan tertentu dari kegiatan-kegiatan pada *network* tersebut yang menentukan jangka waktu penyelesaian seluruh proyek. Lintasan ini disebut lintasan kritis. Di samping lintasan kritis ini terdapat lintasan-lintasan lain yang mempunyai jangka waktu yang lebih pendek daripada lintasan kritis. Dengan demikian, maka lintasan yang tidak kritis ini mempunyai waktu untuk bisa terlambat yang dinamakan *float*.

Float memberikan sejumlah kelonggaran waktu dan elastisitas pada sebuah *network* dan ini dipakai pada waktu penggunaan *network* dalam praktek atau digunakan pada waktu mengerjakan penentuan jumlah material, peralatan, dan tenaga kerja. *Float* ini terbagi atas dua jenis, yaitu *total float* dan *free float* (Dimiyati dan Dimiyati, 1999:180).

Untuk memudahkan perhitungan waktu digunakan notasi-notasi sebagai berikut.

- TE : *earliest event occurrence time*, yaitu saat tercepat terjadinya kejadian/event.
- TL : *latest event occurrence time*, yaitu saat paling lambat terjadinya kejadian.
- ES : *earliest activity start time*, yaitu saat tercepat dimulainya kegiatan/aktifitas.
- EF : *earliest activity finish time*, yaitu saat tercepat diselesaikannya kegiatan.
- LS : *latest activity start time*, yaitu saat paling lambat dimulainya kegiatan.
- LF : *latest activity finish time*, yaitu saat paling lambat diselesaikannya kegiatan.
- T : *activity duration time*, yaitu waktu yang diperlukan untuk suatu kegiatan
(biasanya dinyatakan dalam hari).
- S : *total slack/total float*.
- SF : *free slack/free float*.

3. Asumsi dan cara perhitungan waktu

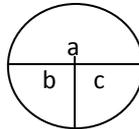
Dalam melakukan perhitungan penentuan waktu ini digunakan tiga buah asumsi dasar, yaitu sebagai berikut.

- Proyek hanya memiliki satu *initial event* dan satu *terminal event*.
- Saat tercepat terjadinya *initial event* adalah hari ke-nol
- Saat paling lambat terjadinya *terminal event* adalah $TL = TE$ untuk *event* ini.

Adapun perhitungan yang harus dilakukan terdiri atas dua cara, yaitu cara perhitungan maju (*forward computation*) dan perhitungan mundur (*backward computation*). Pada perhitungan maju, perhitungan bergerak mulai dari *initial event* menuju *terminal event* maksudnya ialah menghitung saat yang

paling tercepat terjadinya *events* dan saat paling cepat dimulainya serta diselesaikannya aktivitas-aktivitas (TE, ES dan EF).

Pada perhitungan mundur, perhitungan bergerak dari *terminal event* menuju ke *initial event*. Tujuannya ialah untuk menghitung saat paling lambat terjadinya *events* dan saat paling lambat dimulainya dan diselesaikannya aktivitas-aktivitas (TL, LS, dan LF). Dengan selesainya kedua perhitungan ini, barulah *float* dapat dihitung. Untuk melakukan perhitungan maju dan perhitungan mundur ini, lingkaran kejadian (*event*) dibagi atas tiga bagian seperti pada gambar 8.



Gambar 6.8.
Lingkaran kejadian

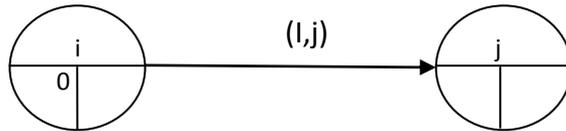
Keterangan :

- a = ruang untuk nomor *event*
- b = ruang untuk menunjukkan saat paling cepat terjadinya *event* (TE), yang merupakan hasil perhitungan maju.
- c = ruang untuk menunjukkan saat paling lambat terjadinya *event* (TL), yang merupakan hasil perhitungan mundur

4. Perhitungan maju

Ada tiga langkah yang harus dilakukan pada perhitungan maju, yaitu sebagai berikut.

- a. Saat tercepat terjadinya *initial event* ditentukan pada hari ke nol sehingga untuk *initial event* berlaku $TE=0$ (Asumsi ini tidak benar untuk proyek yang berhubungan dengan proyek-proyek lain).
- b. Kalau *initial event* terjadi pada hari yang ke-nol, maka dapat di lihat pada gambar 9.



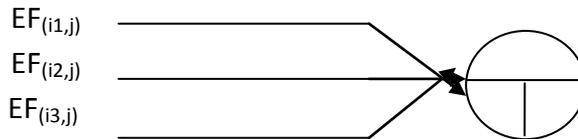
Gambar 6.9.
Mulainya kejadian pada hari yang ke-nol

$$ES_{(i,j)} = TE_{(j)} = 0$$

$$EF_{(i,j)} = ES_{(i,j)} + t_{(i,j)}$$

$$= TE_{(i,j)} + t_{(i,j)}$$

- c. Event yang menggabungkan beberapa aktivitas (*merge event*), dapat dilihat pada gambar 10.



Gambar 6.10.
Kejadian yang menggabungkan beberapa aktivitas

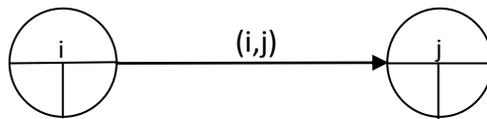
- d. Sebuah event hanya dapat terjadi jika aktivitas-aktivitas yang mendahuluinya telah diselesaikan. Maka saat paling cepat terjadinya sebuah *event* sama dengan nilai terbesar dari saat tercepat untuk menyelesaikan aktivitas-aktivitas yang berakhir pada *event* tersebut.

$$TE_{(l,j)} = \max(EF_{(i1,j)}, EF_{(i2,j)}, \dots, EF_{(in,j)})$$

5. Perhitungan Mundur

Seperti halnya pada perhitungan maju, pada perhitungan mundur ini pun terdapat tiga langkah, yaitu sebagai berikut.

- Pada *terminal event* berlaku $TL=TE$.
- Saat paling lambat untuk memulai suatu aktivitas sama dengan saat paling lambat untuk menyelesaikan aktivitas itu dikurangi dengan *duration* aktivitas tersebut, dapat di lihat pada gambar 11.



Gambar 6.11.

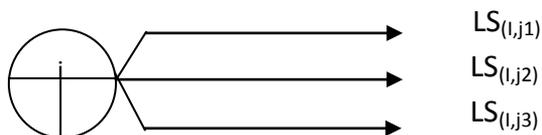
Saat paling lambat untuk memulai dan saat paling lambat untuk menyelesaikan suatu aktivitas

$$LS = LF - t$$

$$LF_{(i,j)} = TL \text{ dimana } TL = TE, \text{ maka}$$

$$LS_{(i,j)} = TL_{(j)} - t_{i,j}$$

- Event yang “mengeluarkan” beberapa aktivitas (*burst event*), dapat dilihat pada gambar 12.



Gambar 6.12.

Kejadian yang mengeluarkan beberapa aktivitas

Setiap aktivitas hanya dapat dimulai apabila *event* yang mendahuluinya telah terjadi. Oleh karena itu, saat paling lambat terjadinya sebuah *event* sama dengan

nilai terkecil dari saat-saat paling lambat untuk memulai aktivitas-aktivitas yang berpangkal pada *event* tersebut.

$$TL(i) = \min(LS(i, j_1), LS(i, j_2), \dots, LS(i, j_n)).$$

6. Lintasan Kritis

Dalam mengestimasi dan menganalisis waktu, akan di dapatkan satu atau beberapa lintasan tertentu dari kegiatan-kegiatan pada *network* tersebut yang menentukan jangka waktu penyelesaian seluruh proyek. Lintasan ini disebut lintasan kritis (Dimiyati dan Dimiyati, 1999:180).

Lintasan kritis adalah jalur atau jalan yang dilintasi atau dilalui yang paling menentukan berhasil atau gagalnya suatu pekerjaan. Dengan kata lain lintasan kritis adalah lintasan yang paling menentukan penyelesaian proyek secara keseluruhan (Badri, 1997:23).

Untuk menentukan lintasan kritis diperlukan langkah-langkah sebagai berikut.

a. Perhitungan Maju (*forward computation*).

Pada perhitungan maju, perhitungan bergerak mulai dari *initial event* menuju ke *terminal event*. Tujuannya ialah menghitung saat yang paling cepat terjadinya *event* dan saat paling cepat dimulainya serta diselesaikannya aktivitas-aktivitas (TE, ES, dan EF).

b. Perhitungan Mundur (*backward computation*).

Pada perhitungan mundur, perhitungan bergerak dari *terminal event* menuju ke *initial event*. Tujuannya ialah untuk menghitung saat paling lambat terjadinya *event* dan saat paling lambat dimulainya dan diselesaikannya aktivitas-aktivitas (TL, LS, dan LF).

c. Perhitungan kelonggaran waktu (*float* atau *slack*)

Float memberikan sejumlah kelonggaran waktu dan elastisitas pada sebuah jaringan kerja, ini dapat dipakai pada waktu penggunaan jaringan kerja dalam praktek dan memungkinkan digunakan pada waktu mengerjakan penentuan jumlah material, peralatan dan tenaga kerja. *Float* ini terbagi atas dua jenis yaitu *total float* dan *free float*.

Total Float (kelembanan suatu kegiatan) adalah jumlah waktu di mana waktu penyelesaian suatu kegiatan dapat diundur tanpa mempengaruhi saat paling cepat dari penyelesaian proyek secara keseluruhan. Karena itu, *total float* dihitung dengan cara mencari selisih antara saat paling lambat dimulainya aktivitas dengan saat paling cepat dimulainya aktivitas.

Float memberikan sejumlah kelonggaran waktu dan elastisitas pada kegiatan (LS-ES), atau dapat pula dengan mencari selisih antara saat paling lambat diselesaikannya kegiatan dan saat paling cepat diselesaikannya kegiatan (LF-EF). Dalam hal ini cukup dipilih salah satu saja.

Jika akan menggunakan persamaan $S = LS - ES$, maka total float kegiatan (i,j) adalah $S(i,j) = LS(i,j) - ES(i,j)$. Dari perhitungan mundur diketahui bahwa $LS(i,j) = TL(i,j) - t(i,j)$, sedangkan dari perhitungan maju $ES(i,j) = TE(i)$. Maka $S(i,j) = TL(j) - t(i,j) - TE(i)$. Jika menggunakan persamaan $S = LF - EF$, maka total float kegiatan (i,j) adalah $S(i,j) = LF(i,j) - EF(i,j)$. Dari perhitungan maju diketahui bahwa $EF(i,j) = TE(i,j) + t(i,j)$, sedangkan dari perhitungan mundur $LF(i,j) = TL(i,j)$, maka $S(i,j) = TL(j) - TE(i) - t(i,j)$.

Free float adalah jumlah waktu dimana penyelesaian suatu kegiatan dapat diukur tanpa mempengaruhi saat paling cepat dimulainya kegiatan yang lain atau saat paling cepat terjadinya kejadian lain pada jaringan kerja. *Free float* kegiatan (i,j) dihitung dengan cara mencari selisih antara saat tercepat terjadinya kejadian diujung kegiatan dengan saat tercepat diselesaikannya kegiatan (i,j) tersebut.

Atau $SF(i,j) = TE(i,j) - EF(i,j)$. Dari perhitungan maju diperoleh $EF(i,j) = TE(i) + t(i,j)$, maka $SF(i,j) = TE(j) - TE(i) - t(i,j)$ (Dimiyati, 1999:187).

Bab 7

TEORI ANTRIAN

Antrian adalah suatu kejadian yang biasa dalam kehidupan sehari-hari. Menunggu di depan loket untuk mendapatkan tiket kereta api atau tiket bioskop, pada pintu jalan tol, pada bank, pada kasir supermarket, dan situasi-situasi yang lain merupakan kejadian yang sering ditemui. Studi tentang antrian bukan merupakan hal yang baru. Antrian timbul disebabkan oleh kebutuhan akan layanan melebihi kemampuan (kapasitas) pelayanan atau fasilitas layanan, sehingga pengguna fasilitas yang tiba tidak bisa segera mendapat layanan disebabkan kesibukan layanan. Pada banyak hal, tambahan fasilitas pelayanan dapat diberikan untuk mengurangi antrian atau untuk mencegah timbulnya antrian. Akan tetapi biayanya karena memberikan pelayanan tambahan, akan menimbulkan pengurangan keuntungan mungkin sampai di bawah tingkat yang dapat diterima. Sebaliknya, sering timbulnya antrian yang panjang akan mengakibatkan hilangnya pelanggan / nasabah.

Salah satu model yang sangat berkembang sekarang ini ialah model matematika. Umumnya, solusi untuk model matematika dapat dijabarkan berdasarkan dua macam prosedur, yaitu : analitis dan simulasi. Pada model simulasi, solusi tidak dijabarkan secara deduktif. Sebaliknya, model dicoba terhadap harga – harga khusus variabel jawab berdasarkan syarat – syarat tertentu (sudah diperhitungkan terlebih dahulu), kemudian diselidiki pengaruhnya terhadap variabel kriteria. Karena itu, model simulasi pada hakikatnya mempunyai sifat induktif.

Misalnya dalam persoalan antrian, dapat dicoba pengaruh bermacam – macam bentuk sistem pembayaran sehingga diperoleh solusi untuk situasi atau syarat pertibaan yang mana pun.

1. Sejarah Teori Antrian

Antrian yang sangat panjang dan terlalu lama untuk memperoleh giliran pelayanan sangatlah menjengkelkan. Rata – rata lamanya waktu menunggu (waiting time) sangat tergantung kepada rata – rata tingkat kecepatan pelayanan (rate of services). Teori tentang antrian ditemukan dan dikembangkan oleh A.K. Erlang, seorang insinyur dari Denmark yang bekerja pada perusahaan teleponi Kopenhagen pada tahun 1910. Erlang melakukan eksperimen tentang fluktuasi permintaan fasilitas telepon yang berhubungan dengan automatic dialing equipment, yaitu peralatan penyambungan telepon secara otomatis. Dalam waktu – waktu yang sibuk operator sangat kewalahan untuk melayanipara penelepon secepatnya, sehingga para penelepon harus antri menunggugiliran, mungkin cukup lama. Persoalan aslinya Erlang hanya memperlakukan perhitunganketerlambatan (delay) dari seorang operator, kemudian pada tahun 1917 penelitian dilanjutkan untuk menghitung kesibukan beberapa operator. Dalam periode ini Erlang menerbitkan bukunya yang terkenal berjudul Solution of some problems in the theory of probabilities of significance in Automatic Telephone Exchange. Baru setelah perang dunia kedua, hasil penelitian Erlang diperluas penggunaannya antara lain dalam teori antrian (Supranto, 1987).

2. Pengertian Antrian

Menurut Siagian (1987), antrian ialah suatu garis tunggu dari nasabah (satu) yang memerlukan layanan dari satu atau lebih pelayan (fasilitas layanan). Pada umumnya, sistem antrian dapat diklasifikasikan menjadi system yang berbeda – beda di mana teori antrian dan simulasi

sering diterapkan secara luas. Klasifikasi menurut Hillier dan Lieberman adalah sebagai berikut :

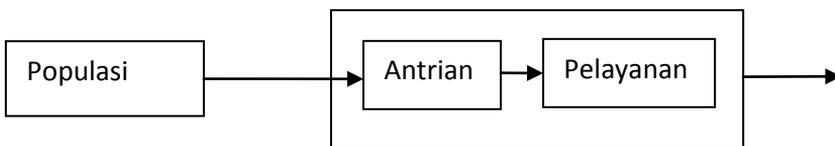
- 1) Sistem pelayanan komersial
- 2) Sistem pelayanan bisnis – industry
- 3) Sistem pelayanan transportasi
- 4) Sistem pelayanan social Sistem pelayanan komersial merupakan aplikasi yang sangat luas dari model – model antrian, seperti restoran, kafetaria, toko – toko, salon, butik, supermarket, dan sebagainya. Sistem pelayanan bisnis – industri mencakup lini produksi, sistem material – handling, sistem pergudangan, dan sistem – sistem informasi komputer. Sistem pelayanan sosial merupakan sistem – sistem pelayanan yang dikelola oleh kantor – kantor dan jawatan – jawatan lokal maupun nasional, seperti kantor registrasi SIM dan STNK, kantor pos, rumah sakit, puskesmas, dan lain – lain (Subagyo, 2000)

3. Komponen Dasar Antrian

Komponen dasar proses antrian adalah :

- 1) Kedatangan setiap masalah antrian melibatkan kedatangan, misalnya orang, mobil, panggilan telepon untuk dilayani, dan lain – lain. Unsur ini sering dinamakan proses input. Proses input meliputi sumber kedatangan atau biasa dinamakan calling population, dan cara terjadinya kedatangan yang umumnya merupakan variabel acak. Menurut Levin, dkk (2002), variable acak adalah suatu variabel yang nilainya bisa berapa saja sebagai hasil dari percobaan acak. Variabel acak dapat berupa diskrit atau kontinu. Bila variabel acak hanya dimungkinkan memiliki beberapa nilai saja, maka ia merupakan variabel acak diskrit. Sebaliknya bila nilainya dimungkinkan bervariasi pada rentang tertentu, ia dikenal sebagai variabel acak kontinu.

- 2) Pelayan-pelayan atau mekanisme pelayanan dapat terdiri dari satu atau lebih pelayan, atau satu atau lebih fasilitas pelayanan. Tiap – tiap fasilitas pelayanan kadang – kadang disebut sebagai saluran (channel) (Schroeder,1997). Contohnya, jalan tol dapat memiliki beberapa pintu tol. Mekanisme pelayanan dapat hanya terdiri dari satu pelayan dalam satu fasilitas pelayanan yang ditemui pada loket seperti pada penjualan tiket di gedung bioskop.
- 3) Antrilnti dari analisa antrian adalah antri itu sendiri. Timbulnya antrian terutama tergantung dari sifat kedatangan dan proses pelayanan. Jika tak ada antrian berarti terdapat pelayan yang menganggur atau kelebihan fasilitas pelayanan (Mulyono, 1991)



SPP akan menerima
 SPP telah menerima
 Pelayanan pelayanan

Proses dasar antrian

Penentu antrian lain yang penting adalah disiplin antri. Disiplin antri adalah aturan keputusan yang menjelaskan cara melayani pengantri. Menurut Siagian(1987), ada 5 bentuk disiplin pelayanan yang biasa digunakan, yaitu :

- 1) First-Come First-Served (FCFS) atau First-In First-Out (FIFO) artinya, lebih dulu datang (sampai), lebih dulu dilayani (keluar). Misalnya, antrian pada loket pembelian tiket bioskop.
- 2) Last-Come First-Served (LCFS) atau Last-In First-Out (LIFO) artinya, yang tiba terakhir yang lebih dulu keluar. Misalnya, sistem antrian dalam elevator untuk lantai yang sama.

- 3) Service In Random Order (SIRO)
artinya, panggilan didasarkan pada peluang secara random, tidak soal siapa yang lebih dulu tiba.
- 4) Priority Service (PS)
artinya, prioritas pelayanan diberikan kepada pelanggan yang mempunyai prioritas lebih tinggi dibandingkan dengan pelanggan yang mempunyai prioritas lebih rendah, meskipun yang terakhir ini kemungkinan sudah lebih dahulu tiba dalam garis tunggu. Kejadian seperti ini kemungkinan disebabkan oleh beberapa hal, misalnya seseorang yang dalam keadaan penyakit lebih berat dibanding dengan orang lain dalam suatu tempat praktek dokter. Dalam hal di atas telah dinyatakan bahwa entitas yang berada dalam garis tunggu tetap tinggal di sana sampai dilayani. Hal ini bisa saja tidak terjadi. Misalnya, seorang pembeli bisa menjadi tidak sabar menunggu antrian dan meninggalkan antrian. Untuk entitas yang meninggalkan antrian sebelum dilayani digunakan istilah pengingkaran (reneging). Pengingkaran dapat bergantung pada panjang garis tunggu atau lama waktu tunggu. Istilah penolakan (balking) dipakai untuk menjelaskan entitas yang menolak untuk bergabung dalam garis tunggu (Setiawan, 1991).

4. Struktur Antrian

Ada 4 model struktur antrian dasar yang umum terjadi dalam seluruh system antrian :

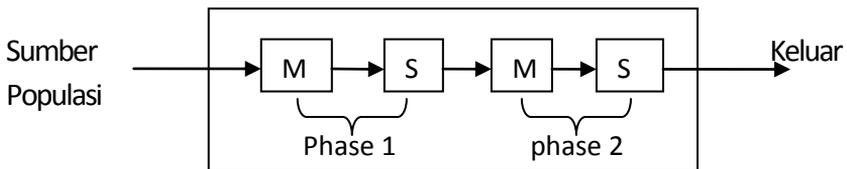
- 1) Single Channel – Single Phase Single Channel
berarti hanya ada satu jalur yang memasuki system pelayanan atau ada satu fasilitas pelayanan. Single Phase berarti hanya ada satu pelayanan.



Model Single Channel – Single Phase

2) Single Channel–Multi Phase

Istilah Multi Phase menunjukkan ada dua atau lebih pelayanan yang dilaksanakan secara berurutan (dalam phase-phase). Sebagai contoh : pencucian mobil



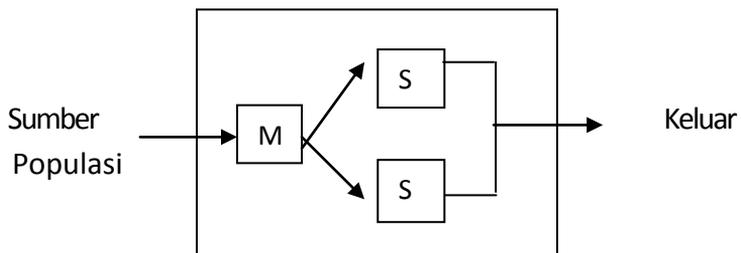
Keterangan :

M = antrian

S = fasilitas pelayanan

3) Multi Channel – Single Phase

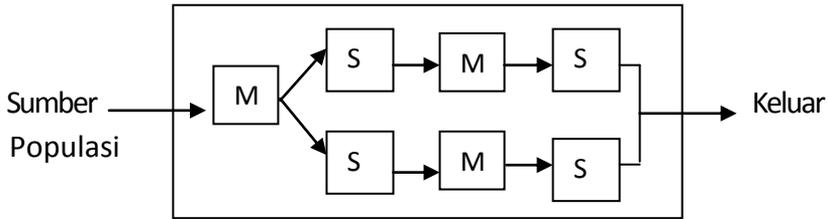
Sistem Multi Channel – Single Phase terjadi kapan saja di mana ada dua atau lebih fasilitas pelayanan dialiri oleh antrian tunggal, sebagai contoh model ini adalah antrian pada teller sebuah bank



Model Multi Chanel-single phase

4) Multi Channel – Multi Phase

Sistem Multi Channel – Multi Phase ditunjukkan dalam contoh, herregistrasi para mahasiswa di universitas, pelayanan kepada pasien di rumah sakit mulai dari pendaftaran, diagnosa, penyembuhan sampai pembayaran. Setiap sistem – sistem ini mempunyai beberapa fasilitas pelayanan pada setiap tahapnya



Model Multi channel-Multi phase

5. Mekanisme Pelayanan

Ada 3 aspek yang harus diperhatikan dalam mekanisme pelayanan, yaitu :

1) Tersedianya pelayanan

Mekanisme pelayanan tidak selalu tersedia untuk setiap saat. Misalnya dalam pertunjukan bioskop, loket penjualan karcis masuk hanya dibuka pada waktu tertentu antara satu pertunjukan dengan pertunjukan berikutnya. Sehingga pada saat loket ditutup, mekanisme pelayanan terhenti dan petugas pelayanan (pelayan) istirahat.

2) Kapasitas pelayanan

Kapasitas dari mekanisme pelayanan diukur berdasarkan jumlah langganan yang dapat dilayani secara bersama – sama. Kapasitas pelayanan tidak selalu sama untuk setiap saat; ada yang tetap, tapi ada juga yang berubah – ubah. Karena itu, fasilitas pelayanan dapat memiliki satu atau lebih saluran. Fasilitas yang mempunyai satu saluran disebut saluran tunggal atau sistem pelayanan tunggal dan

fasilitas yang mempunyai lebih dari satu saluran disebut saluran ganda atau pelayanan ganda.

3) Lamanya pelayanan

Lamanya pelayanan adalah waktu yang dibutuhkan untuk melayani seorang langganan atau satu – satuan. Ini harus dinyatakan secara pasti. Oleh karena itu, waktu pelayanan boleh tetap dari waktu ke waktu untuk semua langganan atau boleh juga berupa variabel acak. Umumnya dan untuk keperluan analisis, waktu pelayanan dianggap sebagai variabel acak yang terpecah secara bebas dan sama serta tidak tergantung pada waktu pertibaan (Siagian, 1987).

6. Model – model Antrian

Pada pengelompokan model – model antrian yang berbeda – beda akan digunakan suatu notasi yang disebut dengan Notasi Kendall. Notasi ini sering dipergunakan karena beberapa alasan. Diantaranya, karena notasi tersebut merupakan alat yang efisien untuk mengidentifikasi tidak hanya model – model antrian, tetapi juga asumsi – asumsi yang harus dipenuhi (Subagyo, 2000).

Format umum model : $(a/b/c);(d/e/f)$, di mana :

- a = distribusi pertibaan / kedatangan arrival distribution), yaitu jumlah pertibaan pertambahan waktu.
- b = distribusi waktu pelayanan / perberangkatan, yaitu selang waktu antara satuan – satuan yang dilayani (berangkat).
- c = jumlah saluran pelayanan paralel dalam sistem.
- d = disiplin pelayanan
- e = jumlah maksimum yang diperkenankan berada dalam sistem (dalam pelayanan ditambah garis tunggu).
- f = besarnya populasi masukan.

Keterangan :

1. Untuk huruf a dan b, dapat digunakan kode – kode berikut sebagai pengganti :

- M = Distribusi pertibaan Poisson atau distribusi pelayanan (perberangkatan) eksponensial; juga sama dengan distribusi waktu antara pertibaan eksponensial atau distribusi satuan yang dilayani Poisson.
- D = Antar pertibaan atau waktu pelayanan tetap.
- G = Distribusi umum perberangkatan atau waktu pelayanan.

2. Untuk huruf c, dipergunakan bilangan bulat positif yang menyatakan jumlah pelayanan paralel.

3. Untuk huruf d, dipakai kode – kode pengganti :
 FIFO atau FCFS = First – In First – Out atau First – Come First – Served.

LIFO atau LCFS = Last – In First – Out

Atau

Last – Come First – Served. SIRO = Service In Random Order. G D = General Service Disciplint.

4. Untuk huruf e dan f, dipergunakan kode N (untuk menyatakan jumlah terbatas) atau ∞ (tak berhingga satuan – satuan dalam sistem antrian dan populasi masukan).

Misalnya, model $(M/M/1);(FIFO/\infty/\infty)$, berarti bahwa model menyatakan pertibaan didistribusikan secara Poisson, waktu pelayanan didistribusikan secara eksponensial, pelayanan adalah satu atau seorang, disiplin antrian adalah first – in first – out, tidak berhingga jumlah langganan boleh masuk dalam sistem antrian, dan ukuran (besarnya) populasi masukan adalah tak berhingga. Menurut Siagian (1987), berikut ini adalah beberapa karakteristik dari sistem antrian untuk model $(M/M/1);(FIFO/\infty/\infty)$:

1. Intensitas Lalu – Lintas

Buat $\rho = \lambda / \mu$ dan ρ disebut intensitas lalu – lintas yakni hasil bagian antara laju pertibaan dan laju pelayanan. Makin besar harga ρ makin panjang antrian dan sebaliknya.

2. Periode Sibuk

Kalau mekanisme pelayanan sibuk, dapat dikatakan bahwa sistem antrian sedang dalam periode sibuk. Peluang bahwa sistem antrian sedang dalam keadaan sibuk pada saat sebarang, dinamakan peluang periode sibuk. Peluang periode sibuk dari sistem antrian dengan pelayanan tunggal sama dengan intensitas lalu – lintas. Karena itu, bila $f(b)$ merupakan fungsi peluang periode sibuk, maka :

$$f(b) = \rho = \lambda/\mu$$

3. Distribusi Peluang dari Langganan dalam Sistem

Bila ρ merupakan peluang bahwa sistem antrian adalah sibuk, maka tentu $1 - \rho$ merupakan peluang bahwa sistem tidak dalam keadaan sibuk pada sebarang waktu. Artinya $1 - \rho$ merupakan peluang bahwa sistem antrian tidak mempunyai langganan. Misalnya P_n merupakan peluang adanya n langganan dalam antrian, maka untuk $n = 0 : P_0 = 1 - \rho$

Karena :

$$P_n = P^n \cdot P_0, \text{ maka :}$$

$$P_n = P^n (1 - \rho)$$

4. Jumlah Rata – rata dalam Sistem

Misalkan $E(n_t)$ berupa jumlah rata – rata langganan dalam sistem antrian, mencakup langganan yang menunggu dan yang sedang dilayani. Maka,

$$\begin{aligned} E(n_t) &= \sum_{n=0}^{\infty} n P_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \end{aligned}$$

urutan suku – suku dari $\sum_{n=0}^{\infty} nP_n$ mempunyai bentuk $0, a, 2a^2, 3a^3, 3, \dots, na^n, \dots$. Dalam hal ini a konstan dan kurang dari 1, deret ini akan konvergen menjadi jumlah, dengan rumus :

$$S = a / (1-a)^2$$

Dimana $a = \lambda/\mu$

$$\text{Jadi } E(n_t) = (1 - \lambda/\mu) \cdot \frac{\lambda/\mu}{(1 - \lambda/\mu)^2}$$

$$= \frac{\lambda/\mu}{1 - \lambda/\mu} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

Bila jumlah laju pertibaan mendekati jumlah laju λ pelayanan , maka jumlah rata – rata dalam sistem, $E(n_t)$ berkembang menjadi lebih besar. Bila ρ atau $\lambda = \mu$ atau $\rho = 1$ maka $E(n_t) = \infty$ atau jumlah rata – rata langganan dalam sistem antrian menjadi besar tak berhingga.

5. Jumlah Rata – rata dalam Antrian

Misalkan $E(n_w)$ sebagai jumlah rata – rata langganan dalam antrian, maka :

$$E(n_w) = E(n_t) - \lambda/\mu$$

$$= \frac{\lambda}{\mu - \lambda} - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{\rho^2}{1 - \rho}$$

6. Jumlah Rata – rata yang Menerima Layanan

Misalkan $E(n_s)$ adalah jumlah rata – rata yang menerima layanan, jadi :

$$\begin{aligned}
 E(n_s) &= E(n_t) - E(n_w) \\
 &= \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{\rho^2}{1-\rho} = \rho
 \end{aligned}$$

7. Waktu Rata – rata dalam Sistem

Misalkan $E(T_t)$ merupakan waktu rata – rata bahwa seorang pelanggan akan menghabiskan waktunya dalam sistem, maka

$$E(T_t) = \frac{E(n_t)}{\lambda}$$

dimana

$E(n_t)$ adalah jumlah rata – rata pelanggandalam sistem. Jadi

$$E(T_t) = \frac{\lambda/(\mu-\lambda)}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

8. Waktu Rata – rata dalam Antrian

Misalkan $E(T_w)$ waktu rata-rata yang dihabiskan oleh seorang pelanggan dalam antrian, maka

$$\begin{aligned}
 E(T_w) &= \frac{E(n_w)}{\lambda} \\
 &= \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\lambda^2}{\lambda \cdot \mu (\mu - \lambda)} \\
 &= \frac{\lambda}{\mu (\mu - \lambda)}
 \end{aligned}$$

9. Waktu Pelayanan Rata-rata

Misalkan $E(T_s)$ merupakan waktu rata-rata yang diperlukan seorang pelanggan untuk menerima pelayanan, maka :

$$\begin{aligned} E(T_s) &= E(T_t) - E(T_w) \\ &= 1/\mu \end{aligned}$$

7. Teknik Simulasi

1) Pengertian Simulasi

Simulasi ialah suatu metodologi untuk melaksanakan percobaan dengan menggunakan model dari satu sistem nyata (Siagian, 1987). Menurut Hasan (2002), simulasi merupakan suatu model pengambilan keputusan dengan mencontoh atau mempergunakan gambaran sebenarnya dari suatu sistem kehidupan dunia nyata tanpa harus mengalaminya pada keadaan yang sesungguhnya. Simulasi adalah suatu teknik yang dapat digunakan untuk memformulasikan dan memecahkan model – model dari golongan yang luas. Golongan atau kelas ini sangat luasnya sehingga dapat dikatakan, “ Jika semua cara yang lain gagal, cobalah simulasi” (Schroeder, 1997).

Kelebihan dan Kekurangan Simulasi

Meskipun model analitik sangat berguna dan sering digunakan, namun masih terdapat beberapa keterbatasan, yaitu :

- a) Model analitik tidak mampu menelusuri perangai suatu sistem pada masalah dan masa mendatang melalui pembagian waktu. Model analitik hanya memberikan penyelesaian secara menyeluruh, suatu jawab yang mungkin tunggal dan optimal tetapi tidak menggambarkan suatu prosedur operasional untuk masa lebih singkat dari masa perencanaan. Misalnya, penyelesaian persoalan program linier dengan masa perencanaan

satutahun, tidak menggambarkan prosedur operasional untuk masa bulan demibulan, minggu demi minggu, atau hari demi hari.

- b) Model matematika yang konvensional sering tidak mampu menyajikan sistem nyata yang lebih besar dan rumit (kompleks). Sehingga sukar untuk membangun model analitik untuk sistem nyata yang demikian. Walaupun model matematika mampu menyajikan sistem nyata yang kompleks demikian, tetapi bisa jadi tidak mungkin diselesaikan dengan hanya menggunakan teknik analitis yang sudah ada. Seperti sistem pedesaan yang dikaitkan dengan faktor ekonomi, sosial, politik, dan lain – lain.
- c) Model analitik terbatas pemakaiannya dalam hal – hal yang tidak pasti dan aspek dinamis (faktor waktu) dari persoalan manajemen

Berdasarkan hal di atas, maka konsep simulasi dan penggunaan model simulasi merupakan solusi terhadap ketidakmampuan dari model analitik. Beberapa alasan yang dapat menunjang kesimpulan di atas adalah sebagai berikut :

Simulasi dapat memberi solusi kalau model analitik gagal melakukannya.

- a) Model simulasi lebih realistis terhadap sistem nyata karena memerlukan asumsi yang lebih sedikit. Misalnya, tenggang waktu dalam model persediaan tidak perlu harus deterministik.
- b) Perubahan konfigurasi dan struktur dapat dilaksanakan lebih mudah untuk menjawab pertanyaan : what happen if... Misalnya, banyak aturan dapat dicoba untuk mengubah jumlah langganan dalam sistem antrian.
- d) Dalam banyak hal, simulasi lebih murah dari percobaannya sendiri.
- e) Simulasi dapat digunakan untuk maksud pendidikan.
- f) Untuk sejumlah proses dimensi, simulasi memberikan penyelidikan yang langsung dan terperinci dalam periode waktu khusus. Namun, model simulasi juga memiliki beberapa kekurangan, yaitu :1. Simulasi bukanlah presisi dan juga bukan suatu proses optimisasi. Simulasi tidak menghasilkan solusi, tetapi ia

menghasilkan cara untuk menilai solusi termasuk solusi optimal.2. Model simulasi yang baik dan efektif sangat mahal dan membutuhkan waktu yang lama dibandingkan dengan model analitik.3. Tidak semua situasi dapat dinilai melalui simulasi kecuali situasi yang memuat ketidakpastian (Siagian, 1987).

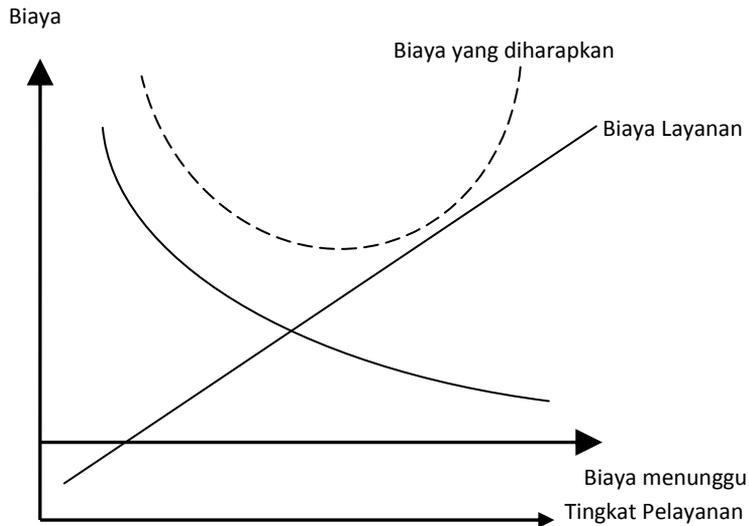
Langkah – Langkah Dalam Proses Simulasi

Pada umumnya terdapat 5 langkah pokok yang diperlukan dalam menggunakan simulasi, yaitu :

- 1) Menentukan persoalan atau sistem yang hendak disimulasi.
- 2) Formulasikan model simulasi yang hendak digunakan.
- 3) Ujilah model dan bandingkan tingkah lakunya dengan tingkah laku dari sistem nyata, kemudian berlakulah model simulasi tersebut.
- 4) Rancang percobaan – percobaan simulasi.
- 5) Jalankan simulasi dan analisis data (Levin, dkk, 2002).

8. Perilaku Biaya

Dalam sistem antrian ada dua jenis biaya yang timbul. Yaitu biaya karena orang mengantri, dan di sisi lain biaya karena menambah fasilitas layanan. Biaya yang terjadi karena orang mengantri, antara lain berupa waktu yang hilang karena menunggu. Sementara biaya menambah fasilitas layanan berupa penambahan fasilitas layanan serta gaji tenaga kerja yang memberi pelayanan. Tujuan dari sistem antrian adalah meminimalkan biaya total, yaitu biaya karena mengantri dan biaya karena menambah fasilitas layanan.



9. SOAL LATIHAN

1. Sebutkan tiga komponen yang terdapat dalam system antrian
2. Jelaskan karakteristik dari setiap komponen dalam sistem antrian
3. Jelaskan jenis biaya dalam kaitannya dengan sistem antrian.
4. jelaskan perbedaan antara disiplin antrian, prioritas yang preepentive dan non preepentive. berikan contoh dalam keempat desain sistem antrian
5. Pada suatu fasilitas pencucian mobil, informasi yang dikumpulkan menunjukkan kedatangan mobil ke pelayanan mengikuti distribusi Poisson dengan rata-rata 4 per jam. Waktu pencucian masing-masing mobil bervariasi dan mengikuti distribusi eksponensial dengan rata-rata 10 menit per mobil. Fasilitas pelayanan tidak dapat menangani lebih dari satu mobil dalam periode waktu tertentu.

6. Sebuah perusahaan yang menyewakan furniture mempunyai satu gudang dengan satu mesin pengangkut yang dioperasikan oleh satu kelompok yang terdiri dari tiga orang tenaga kerja. Pemimpin perusahaan melihat pada jam-jam tertentu terjadi antrian truk tetapi di saat lain, petugas yang mengoperasikan mesin menganggur. Dari data yang telah lalu, diketahui rata-rata kedatangan 4 truk per jam, dan rata-rata pelayanan 6 truk per jam. Untuk mengatasi masalah tersebut, pimpinan perusahaan merencanakan untuk menambah kelompok tenaga kerja untuk mengoperasikan mesin. Bagaimana dampak penambahan kelompok tenaga kerja terhadap biaya total yang dikeluarkan perusahaan jika biaya sewa truk \$ 20 per jam, sedang upah tenaga kerja untuk mengoperasikan mesin \$6 per orang per jam. Diasumsikan jika perusahaan menggunakan dua kelompok tenaga kerja maka rata-rata pelayanan menjadi 12 truk per jam dan jika perusahaan menggunakan tiga kelompok tenaga kerja maka rata-rata pelayanan menjadi 18 truk per jam. 1 hari 8 jam kerja.
7. Manajer personalia pada PT Bintang Timur yang menawarkan jasa perbaikan komputer sedang mempertimbangkan untuk menerima pegawai baru. Diketahui bahwa rata-rata tingkat kedatangan komputer yang rusak 3 per hari mengikuti distribusi Poisson. Diperkirakan biaya yang dikeluarkan perusahaan karena komputer sedang antri untuk diperbaiki atau pun yang sedang diperbaiki \$80 per hari. Ada dua pelamar. Pelamar pertama dapat memperbaiki komputer dengan rata-rata 5 komputer per hari mengikuti distribusi eksponensial dengan upah \$18 per hari. Pelamar kedua dapat memperbaiki komputer rata-rata 4 komputer per hari mengikuti distribusi eksponensial dengan upah \$10 per hari

Bab 8

PROGRAM TUJUAN GANDA

1. Pengertian Program Tujuan Ganda

Program Tujuan Ganda (Linear Goal Programming atau Multiple Objective Programming) merupakan kerabat program linier. Program Tujuan Ganda (PTG) bukan berarti mempunyai banyak fungsi tujuan. tetapi modelnya sama dengan program linier yang hanya mempunyai satu fungsi tujuan. Akan tetapi pada program tujuan ganda fungsi tujuannya bertujuan untuk meminimumkan simpangan atau deviasi terhadap tujuan, target. atau sasaran yang telah ditetapkan dengan memperhatikan kendala-kendala atau syarat ikatan yang ada. yaitu kendala tujuan dan kendala sumberdaya (Gallagher and Watson. 1980). Perbedaan antara program linier dengan program tujuan ganda secara rinci disajikan pada Tabel 9.1

2. Model Umum Program Tujuan Ganda Tanpa Prioritas

Seperti yang disajikan pada Tabel 7.1 bahwa di dalam struktur model tujuan ganda. Terdapat :

- a. Fungsi tujuan. yang bersifat meminimumkan simpangan dari tujuan atau target. Disamping itu terdapat urutan skala prioritas dari tujuan atau target tersebut.
- b. Terdapat dua fungsi kendala. yaitu : (a) kendala tujuan dan (b) kendala sumberdaya atau kendala fungsional.

Tabel 8.1

Perbedaan antara Program Tujuan Ganda dengan Program Linier.

Program linier	Program Tujuan Ganda
1. Tidak dapat menjawab permasalahan yang informasinya kurang lengkap	1. Dapat menjawab permasalahan yang informasinya kurang lengkap
2. Hanya dapat menganalisis permasalahan yang mempunyai tujuan tunggal (Unidimensional)	2. Dapat menganalisis permasalahan yang mempunyai tujuan tunggal dan tujuan ganda (multidimensional)
2. Skala ukurannya dalam unit yang sama. biasanya diukur dalam satuan uang	3. Skala ukurannya dapat dalam unit yang berbeda. misalnya: kg. ton. Pp. dsb
4. Meminimumkan atau memaksimumkan suatu fungsi tujuan tertentu	4. Meminimumkan simpangan diantara berbagai tujuan target, sasaran yang telah ditetapkan
5. Dalam fungsi tujuannya tidak terdapat urutan skala prioritas	5. Dalam fungsi tujuannya terdapat urutan skala prioritas
6. Terdapat hanya satu jenis kendala. yaitu kendala sumberdaya	6. Terdapat dua Jenis kendala yaitu kendala tujuan dan kendala sumberdaya
7. Ada peubah disposal untuk menampung efek dan surplus dari sumberdaya	7. Ada peubah deviasional sebagai pengganti peubah elek dan surplus dari target atau tujuan.

Pada sub-bab ini akan diuraikan tentang model program tujuan ganda tanpa memperhatikan faktor prioritas dalam struktur fungsi tujuannya. Model Umum program tujuan ganda tersebut adalah sebagai berikut :

$$\text{Minimumkan } Z = \sum_{i=1}^m w_i (d_i^- + d_i^+)$$

dengan kendala :

1. Kendala Tujuan :

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} X_j + d_i^- - d_i^+ = t_i \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, m$$

2. Kendala sumberdaya

$$\sum_{i=1}^m a_{kj} X_j + s \text{ atau } \geq b_k \text{ untuk } \begin{matrix} k = 1, 2, \dots, p \\ j = 1, 2, \dots, n \end{matrix}$$

3. Syarat non negativitas

$$\begin{aligned} X_j, d_i^-, d_i^+ &\geq 0 \\ d_i^-, d_i^+ &= 0 \end{aligned}$$

Dimana :

- d₁⁻ dan d₁⁺ = Deviasi yang kekurangan (-) atau kelebihan (+) terhadap tujuan (b₁) .
- W₁ = Bobot yang diberikan terhadap suatu unit deviasi
- a_{ij} = Koefisien teknologi fungsi kendala tujuan
- X_j = Peubah pengambilan keputusan
- T₁ = Target yang ingin dicapai
- G_{kj} = Koefisien teknologi fungsi kendala sumberdaya
- B_k = Jumlah sumberdaya k yang tersedia

Selanjutnya pada sub-bab ini akan diuraikan tentang fungsi kendala dan fungsi tujuan serta Contoh persoalan program tujuan ganda.

3. Fungsi Kendala

Fungsi kendala yang terdapat pada program tujuan ganda adalah: (a) kendala sumberdaya dan (b) kendala tujuan. Kendala sumberdaya, seperti yang telah diterangkan pada Bab Program Linier merupakan kendala yang bersifat kaku. Sebagai contoh adalah sebagai berikut: PT. Ayo Maju adalah produsen sepatu (X_j) dan sandal ($X_\$$). Untuk memproduksi kedua jenis produk tersebut hanya tersedia kulit sapi per bulannya seluas 50 m . Sedangkan untuk memproduksi 10 pasang sepatu dan 10 pasang sandal diperlukan masing-masing seluas 3 m dan 2 m~ kulit sapi, maka tentunya fungsi kendalanya ditulis sebagai berikut :

$$3 X_1 + 2 X_2 \leq 50$$

Hal ini berarti bahwa tidak ada nilai di atas 50 yang diperbolehkan.

Pada kendala tujuan, berbeda dengan kendala sumberdaya, sifatnya tidak terlalu kaku dan mutlak. Simpangan di atas atau di bawah tujuan atau target mungkin saja dapat terjadi. Pada "kendala tujuan ini akan diperkenalkan peubah deviasional untuk menampung kelebihan atau kekurangan dari tujuan atau target. Di bawah ini akan diuraikan secara rinci kasus-kasus yang berhubungan dengan jenis kendala tujuan.

a. Hanya Ketidaktercapaian Tujuan yang Diperbolehkan.

Sebagai contoh dalam kasus ini adalah sebagai berikut: Andaikan Bagian Pemasaran PT Ayo Maju menyatakan bahwa maksimum jumlah sepatu dan sandal

yang dapat dijual dalam satu hari masing-masing sebanyak 5 dan 4 pasang. maka fungsi kendala tujuannya dapat ditulis sebagai berikut :

$$X_1 + d_1 = 5$$

$$X_2 + d_2 = 4$$

Dimana :

d_1 = Ketidaktercapaian dari tujuan penjualan sepatu

d_2 = ketidaktercapaian dari tujuan penjualan sandal

Dalam hal ini keterlewatan tujuan tidak diperbolehkan. sehingga peubah deviasional positif (keterlewatan) ditiadakan.

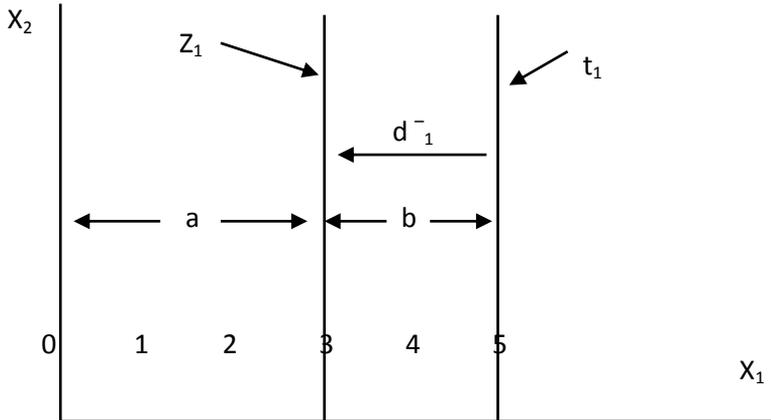
Sebagai contoh. pada Gambar 7.1 disajikan secara grafis, kendala ketidaktercapaian penjualan sepatu. Pada gambar tersebut dapat dilihat, seandainya tujuan hanya mencapai pada titik Z_1 , dimana jarak dari titik 0 ke Z dimisalkan a. dan dari target ke titik Z_1 dimisalkan b, maka untuk mencapai target, masih ada kekurangan sebesar b. Dalam hal ini besar simpangan negatif (d_1) adalah b. dimana nilai b berkisar antara 0 sampai 5 (target). Oleh karena itu tanda simpangan negatif selalu positif. Karena untuk mencapai tujuan yang ditargetkan sama dengan tujuan yang dicapai ditambah dengan simpangannya. Besarnya simpangan dapat dicatatkan secara umum bahwa simpangan ketidaktercapaian antara 0 sampai target (dinotasikan dengan t_i).

$$d_i^- = \begin{cases} 0 & \text{apabila tujuan yang dicapai } (Z_1) \text{ sama dengan target } (t_i) \\ t_i - Z_i & \text{apabila tujuan yang dicapai } (Z^*) \text{ tidak mencapai target} \end{cases}$$

Kendala tujuan yang hanya memperbolehkan ketidaktercapaian target saja secara umum dapat ditulis sebagai berikut :

$$t_i = X_i + d_i^-$$

$$t_i = \text{Target}$$



Gambar 9.1.

Kendala Retidaktercapaian Tujuan Penjualan Sepatu

b. Hanya Keterlewatan Tujuan yang Diperbolehkan.

Sebagai contoh dalam kasus ini adalah sebagai berikut: Andaikan Bagian Pemasaran FT Ayo Maju menyatakan bahwa minimum jumlah sepatu dan sandal yang dapat dijual dalam satu hari masing-masing sebanyak 3 dan 2 pasang. Maka fungsi kendala tujuannya dapat ditulis sebagai berikut :

$$X_1 - d1+ = 3$$

$$X_2 - d2+ = 2$$

Dimana :

d1+ = Keterlewatan dari tujuan penjualan sepatu

d_{2+} = Keterlewatan dari tujuan penjualan sandal

Dalam .hal ini ketidaktercapaian tujuan tidak diperbolehkan sehingga peubah deviasional negatif (ketercapaian) ditiadakan.

Sebagai contoh. pada Gambar 9.2 disajikan secara grafis. kendala keterlewatan penjualan sepatu. Pada gambar tersebut dapat dilihat. Seandainya dari target yang ditetapkan hanya dicapai Z_1 . dimana jarak dari titik target (t_1) ke Z_1 dimisalkan a , maka kelebihan dari target terdapat kelebihan sebesar a . Dalam hal ini besar simpangan positif (d_j) adalah a . dimana nilai a berkisar antara 0 sampai 3 (target). Oleh karena itu tanda simpangan positif selalu negatif. Karena kelebihan dari tujuan yang ditargetkan sama dengan tujuan yang dicapai dikurangi dengan simpangannya.

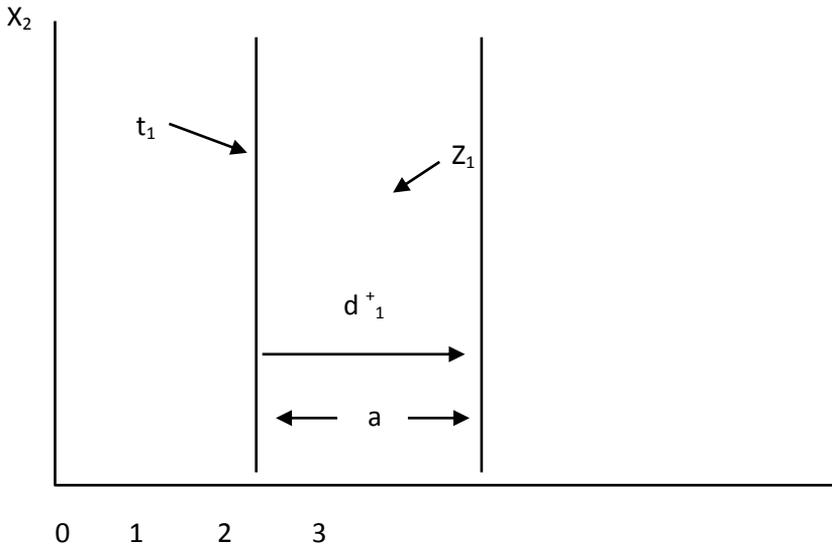
Secara umum besarnya simpangan dapat dikatakan. bahwa simpangan keterlewatan antara 0 sampai target (dinotasikan dengan t_1).

$$d_i^- \begin{cases} 0 & \text{apabila tujuan yang dicapai } (Z_1) \text{ sama dengan target } (t_i) \\ Z_1 - t_i & \text{apabila tujuan yang dicapai } (Z^1 \text{ tidak mencapai target} \end{cases}$$

Kendala tujuan yang hanya memperbolehkan keterlewatan target saja secara umum dapat ditulis sebagai berikut :

$$T_i = x_i - d_i +$$

$$T_i = \text{target}$$



Gambar 8.2
Kendala Keterlewatan Tujuan Penjualan Sepatu

c. Kedua Peubah Simpangan Tujuan Diperbolehkan.

Andaikan pimpinan PT Ayo Maju, menginginkan penggunaan secara penuh tenaga kerja yang ada, yaitu sebanyak 12 hari orang kerja (HOK) per hari, dan mengurangi kerja lembur sampai seminimum mungkin. Diasumsikan bahwa untuk membuat 1 pasang sepatu diperlukan 4 HOK dan untuk pembuat 1 pasang sandal diperlukan 3 HOK. Target yang telah disebutkan di atas tersebut menunjukkan bahwa kemungkinan dapat tidak tercapai dan dapat pula terlewati. Oleh karena itu kendala tujuan dari kasus di atas dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$4 X_1 + 3 X_2 + d_1^- - d_1^+ = 12$$

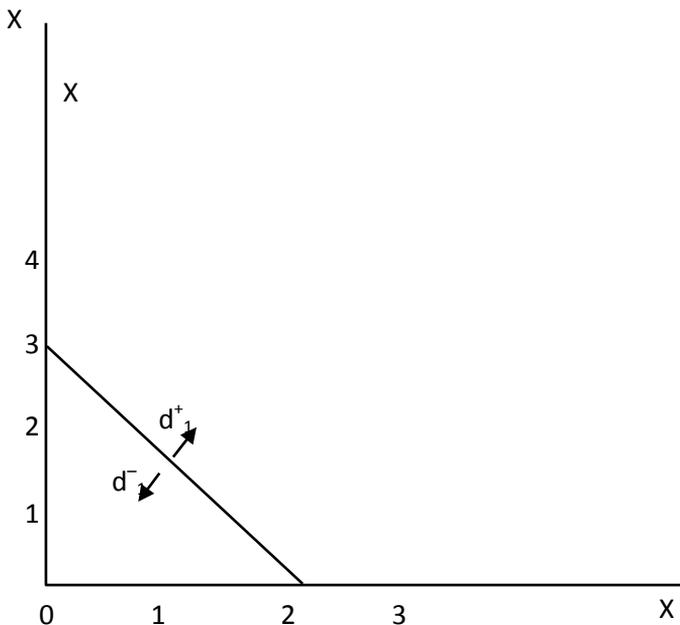
Dimana :

- X_1 = Jumlah pasang sepatu yang diproduksi
- X_2 = Jumlah pasang sandal yang diproduksi
- d_1 = ketidaktercapaian tujuan atau target penggunaan tenaga kerja
- d_1^- = Keterlewatan tujuan atau target penggunaan tenaga kerja

Pada Gambar 9.2 disajikan secara grafis fungsi kendala tujuan kasus di atas.

d. Kedua Peubah Simpangan Tidak Diperbolehkan

Pada kasus ini. kendala tujuan merupakan persamaan yang outlak atau pasti. tanpa adanya peubah deviasional. Sebagai contoh.



Gambar 8.3
Kendala Tujuan dengan Memperbolehkan
Kedua Peubah Simpangan

Pimpinan PT Ayo Maju menargetkan jumlah sepatu yang diproduksi per hari sebanyak 6 pasang. tidak boleh lebih dan tidak boleh kurang. Kendala tujuan pada kasus ini dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$X1 = 6$$

Dimana :

$$X1 = \text{Jumlah pasang sepatu yang diproduksi}$$

4. Fungsi Tujuan

Fungsi tujuan dari Program Tujuan Ganda. selalu meminimumkan dari beberapa kombinasi peubah simpangan atau deviasional. Bentuk fungsi tujuan akan beragam tergantung dari bobot dari setiap tujuan atau target. Berdasarkan pembobotan tujuan maka fungsi tujuan dibagi menjadi dua jenis yaitu: (1) fungsi tujuan dengan bobot yang earns: dan (2) fungsi tujuan dengan bobot yang tidak sama.

a. Fungsi Tujuan dengan Bobot yang Sama

Model umum Program Tujuan Ganda dengan fungsi tujuan yang mempunyai bobot yang sama adalah sebagai berikut :

$$\text{Mininumkan } Z = W (d^- + d1+)$$

Karena mempunyai bobot yang sama maka dapat ditulis sebagai berikut :

$$\text{Mininumkan } Z = W (d^- + d1+)$$

Dimana :

$$W = \text{Bobot dari tujuan}$$

$$Di^- = \text{Jumlah unit ketidaktercapaian dari tujuan}$$

$$d1+ = \text{Jumlah unit keterlewatan dari tujuan}$$

Contoh 1

Untuk lebih memudahkan pemahaman model di atas maka pada sub-bab ini akan diberikan Contoh pemecahan suatu permasalahan dengan menggunakan model di atas.

PT Ria Dharma adalah produsen kursi tamu dan tempat tidur. Untuk membuat satu set kursi tamu diperlukan kayu jati sebanyak $\frac{1}{2}$ m³ dan tenaga kerja sebanyak 20 HOK. Sedangkan untuk- membuat 1 set tempat tidur diperlukan 1 m kayu jati dan tenaga kerja sebanyak 30 HOK. Persediaan kayu jati untuk satu bulan sebanyak 30 m³, sedangkan tenaga kerja yang tersedia dalam satu bulan sebanyak 500 HOK. Harga satu set kursi tamu Rp 300.000.- dan harga 1 set tempat tidur sebanyak Rp 500.000.-. Pimpinan perusahaan menargetkan sebagai berikut :

- 1) Penerimaan dari penjualan kursi tamu dan tempat tidur dalam satu bulan paling sedikit sebanyak Rp 12.500.000
- 2) Minimum jumlah kursi tamu yang terjual dalam satu bulan sebanyak 8 set
- 3) Minimum jumlah tempat tidur yang terjual dalam satu bulan sebanyak 25 set.

Pertanyaannya adalah berapa jumlah kursi tamu dan tempat tidur yang harus diproduksi? Jawablah hanya sampai pada model matematikanya saja.

Penyelesaian

Langkah-langkah untuk menjawab persoalan di atas adalah sebagai berikut :

1) Merumuskan Fungsi Kendala Tujuan

Misalkan X_1 adalah jumlah set kursi tamu yang akan diproduksi dan X_2 adalah jumlah set tempat tidur yang akan diproduksi. Maka perumusan fungsi kendala tujuan dari masing-masing target adalah sebagai berikut :

a. Target Penerimaan :

$$300.000 X_1 + 500.000 X_2 - d_1^+ = 12.500.000$$

b. Target Penjualan Kursi Tamu

$$X_1 - d_2^+ = 8$$

c. Target Penjualan Tempat Tidur

$$X_2 - d_3^+ = 25$$

2) Merumuskan Fungsi Tujuan

Fungsi tujuan dari persoalan ini adalah meminimumkan simpangan atau deviasi dari tiap-tiap target. Oleh karena itu fungsi tujuan dari persoalan ini adalah sebagai berikut :

$$\text{Minimumkan } Z = d_1^+ + d_2^+ + d_3^+$$

Pada fungsi tujuan peubah atau kegiatan riil (X_1 dan X_2) tidak ditulis. karena nilai koefisien kedua peubah tersebut sama dengan nol (0). Pada persoalan ini bobot dari setiap tujuan atau target adalah sama yaitu satu.

3) Merumuskan Kendala Sumberdaya

a) Sumberdaya Kayu Jati

$$1/2 X_1 + 1 X_2 \leq 500$$

b) Sumberdaya Tenaga Kerja

$$20 X_1 + 30 X_2 \leq 500$$

c) Merumuskan Model Matematika Keseluruhan

a. Fungsi Tujuan :

$$\text{Minimumkan } Z = d_1^+ + d_2^+ + d_3^+$$

b. Kendala Tujuan :

(a) Target penerimaan :

$$300.000 X_1 + 500.000 X_2 - dx + = 12.500.000$$

(b) Target Penjualan Kursi Tamu

$$X_1 - d_2 + = 8$$

(c) Target Penjualan Tempat Tidur

$$X_2 - d_3 + = 25$$

Merumuskan Kendala Sumberdaya :

1) Sumberdaya Kayu Jati

$$1/2 X_1 + X_2 \leq 30$$

2) Sumberdaya Tenaga Kerja

$$20 X_1 + 30 X_2 \leq 500$$

Contoh 2

PT Suara Merdu. adalah produsen TV dan Radio.

Pimpinan perusahaan menargetkan sebagai berikut :

- 1) Jumlah TV yang terjual per minggu maksimum 5 buah
- 2) Jumlah Radio yang terjual per minggu maksimum 6 buah
- 3) Ingin menggunakan secara penuh tenaga kerja sebanyak 52 jam orang kerja (JOK) per minggu dan sedapat mungkin mengurangi kerja lembur. Seandainya diasumsikan bahwa untuk memproduksi TV diperlukan 8 JOK sedangkan untuk memproduksi radio diperlukan 6 JOK.

Pertanyaannya adalah berapa Jumlah TV dan radio yang harus dijual yang memenuhi target tersebut.

Penyelesaian

Misalkan jumlah TV yang dijual adalah X_1 sedangkan radio yang dijual adalah X_2 . Langkah-langkah perhitungannya adalah sebagai berikut :

1) Merumuskan kendala tujuan.

a) Jumlah TV yang terjual

$$X_1 + d_1^- = 5$$

b) Jumlah radio yang terjual

$$X_2 + d_2^- = 6$$

c) Tenaga Kerja yang digunakan

$$8X_1 + 6X_2 + d_3^- - d_3^+ = 52$$

2) Merumuskan kendala sumberdaya

Pada persoalan di atas. tidak ada kendala sumberdaya

3) Merumuskan fungsi tujuan

Fungsi tujuan dari persoalan di atas adalah meminimumkan simpangan dari kendala tujuan. Oleh karena itu fungsi tujuannya dapat ditulis sebagai berikut :

$$\text{minimumkan } Z = d_1^- + d_2^- + d_3^- + d_3^+$$

b. Fungsi Tujuan dengan Bobot yang Tidak Sama

Model umum Program Tujuan Ganda dengan fungsi tujuan yang mempunyai bobot yang tidak sama adalah sebagai berikut :

$$\text{Minimumkan } Z = d_1^- + d_2^- + d_3^- + d_3^+$$

Dimana :

W_i = Bobot dari tujuan ke i . dimana sekurang-kurangnya terdapat satu tujuan yang berbobot tidak sama dengan tujuan yang lainnya

d_i^- = Jumlah unit ketidaktercapaian dari tujuan

di + = Jumlah unit keterlewatan dari tujuan
 Bobot di atas mencerminkan kegunaan relatif (relatif utility) atau nilai dari tujuan.

Contoh

Untuk memudahkan dalam memahami model di atas maka pada bagian ini akan diberikan Contoh pemecahan persoalan dengan menggunakan model di atas.

Persoalan pada Contoh ini sama dengan Contoh 2. hanya ada perbedaan sedikit. Asumsikan bahwa margin keuntungan dari TV adalah 2 kali lipat dari radio. Sehingga ketidaktercapaian penjualan TV adalah 2 kali lipat ketidaktercapaian penjualan radio. Sehingga kendala tujuannya berubah menjadi sebagai berikut :

a. Kendala Tujuan

1) Jumlah TV yang terjual

$$X_1 + 2 d_1^- = 5$$

2) Jumlah radio yang terjual

$$X_2 + d_2^- = 6$$

3) Tenaga Kerja yang digunakan

$$8 X_1 + 6 X_2 + d_3^- - d_3^+ = 52$$

b. Fungsi Tujuan

Fungsi tujuan dari persoalan di atas menjadi sebagai berikut :

$$\text{Minimalkan } Z = 2 d_1^- + d_2^- + d_3^- + d_3^+$$

5. Metode Analisis

Metode analisis yang digunakan untuk persoalan PTG dengan tanpa prioritas adalah: (a) metode grafik dan

(b) metode simpleks. Pada bagian ini hanya akan diuraikan penggunaan cara analitik dengan metode simpleks saja.

Metode Simpleks

Contoh 1

Persoalan yang digunakan pada Contoh 1 ini sama dengan persoalan pada Contoh 1. Langkah-langkahnya sama dengan seperti yang telah diterangkan sebelumnya. Akan tetapi pada bagian ini hanya akan dijelaskan tahap kelayakan pendahuluan dan tahap optimal saja yang masing-masing disajikan pada Tabel 9.2 dan Tabel 9.3.

Tabel 8.2
Penyelesaian Kelayakan Pendahuluan

Cj ----- >			0	0	1	1	1	1	Bi
CB	PB	Bi	X1	X2	D1 ⁻	D2 ⁻	D3 ⁻	D3 ⁺	
1	d1 ⁻	5	1	0	1	0	0	0	und
1	d2 ⁻	6	0	1	0	1	0	0	6
1	d3 ⁻	52	8	6	0	0	1	-1	6,5
Zj Zj		63	1	7	1	1	1	-1	
Cj		63	1	7	0	0	0	-2	

Keterangan : und. = tidak didefinisikan

Tabel 9.3
Tahap Optimal

Cj ----->			0	0	1	1	1	1	Ri
CB	PB	bi	X1	X2	D1 ⁻	D2 ⁻	D3 ⁻	D3 ⁺	
0	X1	2	1	0	0	-3/4	1/8	-1/8	
1	d1	3	0	0	1	3/4	-1/8	1/8	
0	X2	2	0	1	0	1	0	0	
Zj Zj		2	0	0	1	3/4	-1/8	1/8	
Cj		2	0	0	0	-1/4	-1 1/3	-7/8	

Dari Tabel 9.3 dapat dilihat bahwa untuk mencapai optimal. maka perusahaan tersebut harus memproduksi TV sebanyak 3 buah dan radio sebanyak 4 buah. Sedangkan kelebihan dari target penjualan TV adalah 2 buah. Simpanan lainnya ($d2^-$. $d3^+$ dan $d3^+$) bernilai 0.

Contoh 2

Persoalan pada Contoh ini sama dengan persoalan pada Contoh 2 bagian. Penyelesaian kelayakan pendahuluan dan tahap optimal masing-masing disajikan pada Tabel 9.4 dan 9.5.

Tabel 8.4
Penyelesaian Kelayakan Pendahuluan

Cj ----- >			0	0	1	1	1	1	Bi
CB	PB	Bi	X1	X2	d1 ⁻	d2 ⁻	d3 ⁻	d3 ⁺	
1	d1 ⁻	5	1	0	1	0	0	0	5
1	d2 ⁻	6	0	1	0	1	0	0	und.
1	d3 ⁺	52	8	6	0	0	1	-1	6
Zj		65	9	8	1	2	1	-1	
Zj	Cj	54	8	7	-1	1	0	-2	

Tabel 8.5
Tahap Optimal

Cj ----- >			0	0	1	1	1	1	Ri
CB	PB	bi	X1	X2	d1 ⁻	d2 ⁻	d3 ⁻	d3 ⁺	
1	X1-	2	1	0	0	-0,750	0.125	-0.125	
2	d1-	1.5	0	0	1	0,375	-0.063	0.125	
1	X2	6	0	1	0	1	0	0	
Zj Zj		2	0	0	2	0.750	-0.126	0.250	
Zj	Cj	ri	0	0	(i	-0.125	-1.126	-0,875	

Dari Tabel 7.5 tersebut dapat dilihat bahwa jumlah TV yang diproduksi adalah 2 buah dengan d_1^- sama dengan 1.5. Sedangkan jumlah radio yang diproduksi adalah 6 buah. Simpangan lainnya (d_2^- , d_3^- dan d_3^+) bernilai 0.

6. Model Umum Program Tujuan Ganda Dengan Prioritas

Banyaknya tujuan yang ingin dicapai, menyebabkan perlunya ditetapkan prioritas tujuan. Misalkan tujuan yang paling periling atau paling dahulu yang hendak dicapai ditetapkan sebagai prioritas ke 1. Kemudian prioritas ditetapkan berturut-turut berdaearkan kepentingan tujuan tersebut. Penetapan prioritas tersebut disebut pengutamaan. yaitu mendahulukan tercapainya kepuasan sesuatu tujuan yang diprioritas utamakan sebelum menuju kepada tujuan-tujuan berikutnya. Faktor prioritas dalam perumusan program tujuan ganda dinyatakan dengan P_i (untuk $i = 1, 2, \dots, m$). Faktor prioritas tersebut mempunyai hubungan sebagai berikut :

$P_1 > P_2 > P_1 > P_i + 1$ Hubungan prioritas tersebut menunjukkan bahwa walaupun faktor prioritas P_i dikalikan sebanyak n kali (dimana $n > 0$), tetapi faktor prioritas yang diutamakan akan tetap paling utama.

Model Umum PTG yang memiliki struktur timbangan pengutamaan (preemptive weighats) dengan peringkat ordinal (ordinal ranking) adalah sebagai berikut :

1. Minimumkan :

$$Z = \sum_{i=1}^m (P_y W_p \cdot y^+ \cdot d_i^+ + P_s W_i \cdot s^- \cdot d_i^-)$$

2. Fungsi Kendala Tujuan :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} X_j + d_i^- - d_i^+ = b_i \text{ (untuk } i = 1, 2, \dots, m)$$

3. Fungsi Kendala Fungsional :

$$\sum_{j=1}^n g_{kj} X_j \leq \text{atau} \geq C_k$$

dimana : $k = 1, 2, \dots, p$

$j = 1, 2, \dots, n$

4. Syarat Non-negativitas

$$X_j \cdot d_i^- \geq 0$$

$$d_i^- \cdot d_i^+ = 0$$

Dimana :

$d_i^+ \cdot d_i^- =$ Deviasi positif dan negatif dari tujuan ke i

$P_y \cdot F_s =$ Faktor prioritas

$W_i \cdot y^+ =$ Timbanan relatif dari d_i^+ dalam peringkat ke y

$W_i \cdot e^+ =$ Timbangan relatif dari d_i^- dalam peringkat ke e

Metode Analisis

Metode analisis yang digunakan untuk persoalan PTG dengan prioritas adalah metode simpleks. Untuk lebih memudahkan pemahaman penggunaan metode ini pada persoalan PTG dengan prioritas ini, di bawah ini akan diberikan sebuah Contoh.

Contoh 1

Persoalan yang digunakan pada Contoh ini sama dengan pada Contoh 1. Hanya pada Contoh ini ada perbedaan sedikit. Dalam persoalan ini pimpinan perusahaan tersebut menetapkan peringkat prioritas dari ketiga target tersebut seperti yang disajikan pada Tabel 9.6. Pertanyaannya adalah berapa jumlah video dan TV yang diproduksi yang memenuhi target dan prioritas tersebut?

Tabel 8.6

Peringkat Prioritas Target PT Suara Merdu

Tujuan	Prioritas		Keterangan
	No	Faktor	
1	1	PI	Target penjualan TV per minggu maksimum 5 buah
2	2	P2	Target penjualan radio per minggu maksimum 6 buah
3	3	P3	Target penggunaan secara penuh 52 JOK per minggu dan meminimumkan kerja lembur

Penyelesaian

Misalkan jumlah video yang diproduksi adalah X_1 dan Jumlah TV yang diproduksi adalah X_2 . Model matematika dari Persoalan di atas adalah sebagai berikut :

1) Fungsi Tujuan

Fungsi tujuan dari persoalan di atas menjadi sebagai berikut :

$$\text{Minimumkan } Z = P_1 d_1^- + P_2 d_2^- + P_3 (d_3^- + d_3^+)$$

2) Kendala Tujuan

a) Jumlah TV yang terjual

$$X_1 + 2 d_1^- = 5$$

b) Jumlah radio yang terjual

$$X_2 + d_2^- = 6$$

c) Tenaga Kerja yang digunakan

$$8 X_1 + 6 X_2 + d_3^- - d_3^+ = 52$$

Setelah diketahui model matematikanya. maka persoalan di atas dianalisis dengan menggunakan metode simpleks. Pada Tabel 9.7 disajikan tabel simpleks penyelesaian persoalan PTG tersebut., Penggunaan metode simpleks untuk .persoalan PTG agak sedikit berbeda dengan persoalan program linier. Pada persoalan PTG, kolom Z_j dan $Z_i - C_j$. dibagi berdasarkan jumlah prioritas yang ada dan prioritas yang paling rendah ditempatkan di atas. Dasar perhitungan persoalan PTG dengan metode simpleks ini adalah mencari nilai optimal dengan mempertimbangkan prioritas tertinggi dulu kemudian baru dengan prioritas-prioritas yang lebih rendah. Cara perhitungannya untuk mencapai tahap optimal adalah sebagai berikut :

- a. Semua nilai positif pada baris $Z_j - C_j$ untuk prioritas tertinggi harus dihilangkan semua.
- b. Setelah semua nilai $Z_j - C_j$ pada prioritas tertinggi - tersebut lebih kecil atau sama dengan nol. Maka dilanjutkan dengan prioritas berikutnya sampai nilai pada baris $Z_j - C$ untuk prioritas yang terendah. Namun apabila pada baris prioritas terendah masih ada nilai yang positif. tetapi akan memasukkan peubah yang mempunyai prioritas tertinggi, maka perhitungan akan dihentikan.

Untuk menghitung Z_j caranya hampir sama dengan perhitungan Z_j pada program linier. Karena adanya peringkat prioritas, maka penulisannya untuk setiap prioritas tersebut dibedakan. Pada Tabel 9. 7. Z_j dan $Z_j - C_j$ dibagi menjadi 3. yaitu untuk prioritas pertama (P1) yang ditempatkan paling bawah dan selanjutnya disusun sedemikian rupa secara berurutan. sehingga prioritas yang paling rendah (P3) berada paling atas. Sebagai contoh

perhitungan Z_j perhatikan Tabel 7.7 Pada tahap I. Perhatikan kolom d2. Pada kolom tersebut nilai Z_j adalah sebagai berikut :

$$Z_j = 0 P_1 + 1 P_2 + 0 P_3$$

Untuk kolom d2⁻ tersebut nilai $C_j = P_2$. maka nilai $Z_j - C_j$ adalah :

$$\begin{aligned} Z_j - C_j &= (0 P_1 + 1 P_2 + 0 P_3) - P_2 \\ &= 0 P_1 + 0 P_2 + 0 P_3 \end{aligned}$$

Tabel 8.7
Tabel Simpleks

CJ ----->			0	6	p1	P2	P3	p3	R1
CB	P _B	b ₁	x1	x2	d1 ⁻	D2 ⁻	d3 ⁻	D3 ⁺	
← Px	d1-	5	1	0	1	0	0	0	5
Tahap P9	d2-	6	0	1	0	1	0	0	und.
I P3	d3-	52	E	6	0	0	1	-1	6,5
Zj	P3	52	8	6	0	0	1	-1	
Zj - Cj		52	8	6	0	0	0	- o	
Zj	P2	6	0	1	0	1	0	0	
Zj - Cj		6	0	1	0	0	0	0	1 : i
Zj	P1	5	1	0	1	0	0	0	
Zj - Cj		5	1	0	0	0	0	0	
Tahap 0	X1	5	1	0	.1	0	0	0	und
II P2	d2-l	6	0	1	0	1	0	0	6
← P3	d3-	12	0	6	-8	0	1	-1	2
Zj	P3	12	0	6	-8	0	1	-1	
ZJ-CJ		12	0	6	-8	0	0	_2	
Zj	P2	6	0	1	0	1	0	0	
Zj - Cj		6	0	1	0'	0	0	0	
Zj	P1	0	0	0	0	0	0	0	
Zj - Cj		0	0	0	-1	0	0	0	
Tahap 0	X1	5	1	0	1	0	0	0	
III P2	d2-	4	0	0	1 1/3	1	0	0	
0	X2	2	0	1	-1 1/3	0	0	0	
Zj	p3	0	0	0	0	0	0	0	
Zj - Cj		0	0	0	0	0	-1	-1	
Zj	p2	4	0	0	1 1/3	1	0	0	
Zj - Cj		4	0	1	1 1/3	0	0	0	
Zj	p1	5	0	0	0	0	0	0	
Zj - Cj		5	0	0	-1	0	0	0	

Nilai-nilai tersebut. diletakkan sesuai dengan baris prioritasnya. Sebagai contoh lainnya perhatikan kolom Xj. Pada kolom tersebut nilai Zj adalah :

$$Z_j = 1 P_1 + 0 P_2 + 8 P_3$$

Kemudian letakkan nilai-nilai tersebut pada baris prioritasnya. Sehingga nilai Zj pada kolom X1 untuk prioritas P1 adalah 1, untuk P2 adalah 0 dan untuk P3 adalah 8. Nilai Cj untuk kolom X1 adalah 0. Sehingga nilai Zj - Cj adalah :

$$\begin{aligned} Z_j - C_j &= (1 P_x + 0 P_2 + 8 P_3) - 0 \\ &= 1 P_x + 0 P_2 + 8 P_3 \end{aligned}$$

Letakkan nilai-nilai tersebut pada baris Zj - Cj pada kolom X1 untuk masing-masing prioritas. Sehingga nilai Zj - Cj untuk kolom X1 pada prioritas P1 adalah 1. pada P2 adalah 0 dan pada P3 adalah 8.

Untuk mengetahui baris mana yang keluar dari basis dan kolom mana yang masuk ke dalam basis. Perhatikan nilai-nilai Zj - Cj pada prioritas yang paling tinggi apakah ada nilai yang positif atau tidak. Apabila tidak ada nilai yang positif. maka perhatikan nilai Zj - Cj yang lebih rendah. Untuk lebih mudah pemahaman. hal tersebut perhatikan Tabel 6.7. Pada tahap I. nilai Zj - Cj pada prioritas Pj terdapat nilai positif. yaitu pada kolom Xj sebesar 1. Berarti kolom yang akan masuk ke dalam basis adalah kolom Xj. Untuk mengetahui baris mana yang keluar dari basis maka harus dihitung dulu nilai Ri. Cara perhitungan nilai Ri sama seperti pada program linier. Kemudian dicari nilai Ri yang paling kecil. Baris yang mempunyai Rj yang paling kecil itulah yang akan keluar dari basis. Pada tahap I Tabel 7.7. yang mempunyai nilai Ri yang paling kecil adalah baris d1` sehingga baris d1` yang akan keluar dari basis. Untuk

perhitungan nilai-nilai baris baru sampai pada tahap II maupun tahap III sama seperti pada program linier.

Pada tahap II, ternyata nilai-nilai $Z - C_j$ pada prioritas P1 tidak ada yang bernilai positif. Oleh karena itu untuk mencari baris mana yang ke luar dan kolom mana yang akan masuk ke dalam basis, perhitungan dialihkan pada nilai-nilai $Z, - C_j$ untuk prioritas P2. Selanjutnya perhitungan dilanjutkan seperti cara yang telah diuraikan di atas.

Perhatikan tahap III. pada tahap ini perhitungan nilai mencapai optimal. Walaupun pada baris $Z_t - C_j$ untuk prioritas P2 pada kolom d_j masih bernilai negatif. Hal ini disebabkan karena apabila d_1^- masuk lagi ke dalam basis, maka akan melanggar ketentuan dari tujuan bahwa P1 menempati . Prioritas yang tertinggi. Dari tahap III tersebut dapat dilihat bahwa penyelesaian yang memuaskan dicapai apabila perusahaan tersebut memproduksi X_1 sebanyak 5 buah dan X_2 sebanyak 2 buah dengan ketidaktercapaian peniualan radio (d_2^-) sebanyak 4 buah. Untuk simpangan lainnya bernilai nol.

7. SOAL LATIHAN

a. Fungsi Tujuan

$$\text{Minimumkan : } Z = d_1^- + d_1^+ + d_2^- + d_2^+ + d_3^- + d_2^+$$

b. Kendala Fungsi Tujuan

1) Tenaga Kerja

$$400 (X_1 + X_2 + X_3) + 100 (X_4 + X_5 + X_6) + d_1^- - d_1^+ = 100000$$

2) Hasil Padi

$$10 (X_1 + X_2 + X_3) + d_2^- - d_2^+ = 50000$$

3) Hasil Kedele

$$2 (X_4 + X_5 + X_6) + d_3^- - d_3^+ = 2000, >r> .,$$

c. Kendala Fungsional

1) Tanah :

$$X1 + X4 < 2000$$

$$X2 + X5 < 3000$$

$$X3 + X6 < 4000$$

2) Tenaga Kerja :

$$X1 + X4 < 480000$$

$$X2 + X5 < 600000$$

$$X3 + X6 < 700000$$

3) Tanaman

$$X1 + X2 + X3 \leq 7000$$

$$X4 + X5 + X6 \leq 3000$$

Dimana :

d_1^- = Jumlah HOK dimana target tenaga kerja yang ditetapkan tidak tercapai

d_1^+ = Jumlah HOK dimana target tenaga kerja yang ditetapkan terlewati

d_2^- = Jumlah hasil padi yang ditargetkan tidak tercapai

d_2^+ = Jumlah hasil padi yang ditargetkan terlewati

d_3^- = Jumlah hasil kedele yang ditargetkan tidak tercapai

d_3^+ = Jumlah hasil kedele yang ditargetkan terlewati

DAFTAR PUSTAKA

1. Aminudin, 2005, Prinsip-Prinsip Riset Operasi, Erlangga.
2. Badri, S. 1997. *Dasar-dasar Network Planing*. Jakarta : PT Rika Cipta.
3. Dimiyati, T dan Dimiyati, A. 1999. *Operation Research Model-model Pengambilan Keputusan*. Bandung: Sinar Baru Algesindo.
4. Hamdy Taha, 1996, *Operation Research An Introduction*, Edisi 4, Macmillan, New York
5. Hiller, F.S. 1990. *Pengantar Riset Operasi*. Jakarta : Erlangga.
6. Richard Bronson, 2000, *Theory and Problem of Operation Research* , McGraw-Hill, Singapore.
7. Sitinjak, T.JR. 2006. *RISET OPERASI Untuk Pengambilan Keputusan Manajerial dengan Aplikasi Excel*. Yogyakarta : Graha Ilmu.
8. Soekartawi, 1995, *Multi Objective Goal Programming (Program Tujuan Ganda) Teori dan Aplikasinya* PT. Gramedia Widiasarana Indonesia, Jakarta
9. Subagyo Pangestu, 2000, Marwan Asri, dan T. Hani Handoko. *Dasar-Dasar Operation Research*, Yogyakarta: PT. BPFY-Yogyakarta.

Tentang Penulis



Prof. Dr. H. Bahar Sinring, SE, M.Si, lahir di Bone pada tgl. 19 September 1957. Gelar Sarjana Ekonomi (Ekonomi Umum) pada Fakultas Ekonomi UMI Makassar diraih tahun 1986, Magister Sains (S2) Ilmu Ekonomi dan Studi Pembangunan diraih tahun 1992 pada Program Pascasarjana Universitas Gajah Mada Yogyakarta, sedang Gelar Doktor Ilmu Ekonomi (S3) diperoleh pada tahun 2003 dari Program Pascasarjana Universitas Airlangga Surabaya. Pada tahun 1994 menjabat Sekretaris Jurusan Ilmu Ekonomi Studi Pembangunan Fak. Ekonomi UMI, tahun 2003 sebagai Ketua Lembaga Pengabdian Pada Masyarakat (LPPM) UMI, tahun 2006 sebagai Ketua Lembaga Penelitian UMI dan pada tahun 2009 sampai sekarang menjabat Dekan Fak. Ekonomi UMI. Di samping itu juga aktif sebagai pengajar tetap pada Program Magister (S2) dan Doktor (S3) Program Pascasarjana UMI Makassar.



H. Hamzah Hafied, SE, M.Si, Ph.D, dilahirkan di Majene pada tanggal 22 April 1960, Pendidikan Dasar sampai Menengah Atas diselesaikannya di Majene. Pada tahun 1979 diterima pada Jurusan Ilmu Ekonomi Fakultas Ekonomi Universitas Muslim Indonesia Makassar dan lulus pada tahun 1986, pendidikan Magister (S2) diikuti tahun 1993 pada program Pascasarjana Universitas Hasanuddin Makassar, sedang gelar Ph.D (S3) diperoleh pada tahun 2009 dari Program Doktor Universitas Tun Abdul Razak Malaysia. Sejak berkiprah di Universitas Muslim Indonesia, berbagai jabatan yang telah diemban, diantaranya : Ketua Koperasi Ukhuwah UMI, Wakil Dekan I, Wakil Dekan II dan Dekan Fak. Ekonomi, Juga pernah menjabat sebagai asisten direktur II Program Pascasarjana UMI. Beberapa buku yang telah diterbitkan sebelumnya, diantaranya Ekonomi Pembangunan dan Perencanaan (2009), Produk Domestik Regional Bruto dan Aplikasi (2010), Naskah Akademik Rancangan Peraturan Daerah di Bidang Perpajakan Daerah.

ISBN 978-602-9060-99-7



9 786029 060997